

1.4. Ранг-полином графа

Ранг графа определяется как $\nu^* = n - k$, где n — число вершин, k — число компонент связности графа. Коранг графа, или цикломатический ранг, есть $\nu = t - \nu^* = t - n + k$, где t — число ребер.

Ранг-полином¹ графа G имеет вид

$$P_\nu(x, y) = \sum x^{\nu_G^* - \nu_H^*} y^{\nu_H},$$

где $\nu_G^* = n - k$ — ранг графа G , ν_H — коранг остоного (т.е. включающего в себя все вершины графа) подграфа H , а ν_H^* — его ранг. Суммирование ведется по всем остовным подграфам графа G .

Ранг-полином служит для анализа множества остовных подграфов. Так, например, коэффициент при x^{-k} в $P_\nu(x, 1/x)$ есть число подграфов размера k , а значение $P_\nu(0, 1)$ равно числу подграфов (включая несобственный подграф), ранг которых равен рангу самого графа. Другие свойства ранга-полинома приведены в программе 6 на с. 98.

Задача. Найти ранг-полином графа (рис. 1.11).

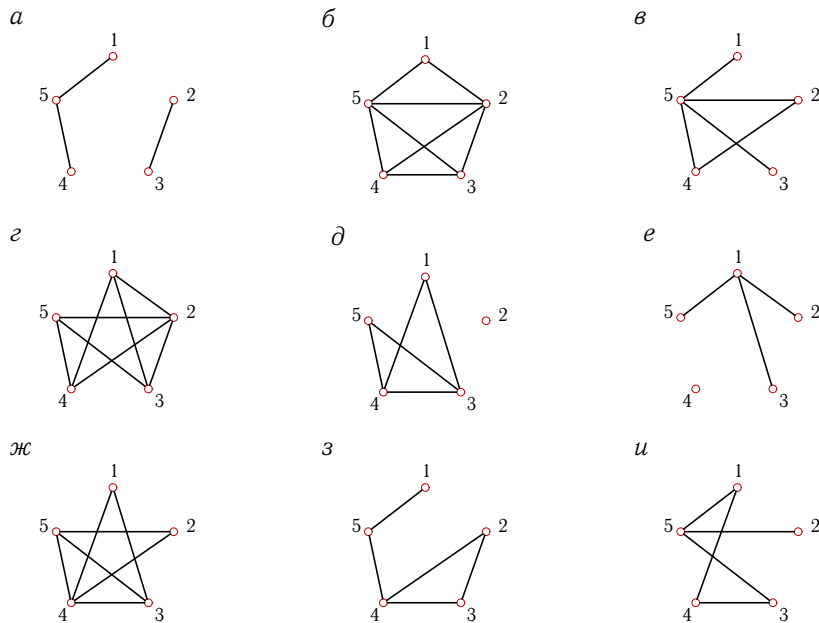


Рис. 1.11

¹Название этого полинома (rankpoly) заимствовано из Maple.

Ответы

	$P_\nu(x, y)$
а	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
б	$y^4 + (x+8)y^3 + (8x+27)y^2 + (5x^2+30x+48)y + x^4 + 8x^3 + 28x^2 + 51x + 40$
в	$(x^2 + 2x + 1)y + x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 9x + 3$
г	$y^5 + 9y^4 + (3x+36)y^3 + (2x^2+21x+81)y^2 + (13x^2+58x+x^3+105)y + x^4 + 9x^3 + 71x + 35x^2 + 66$
д	$y^2 + (2x+5)y + x^3 + 5x^2 + 10x + 8$
е	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
ж	$y^3 + (2x+7)y^2 + (14x+3x^2+19)y + x^4 + 7x^3 + 21x^2 + 21 + 32x$
з	$(x^2 + 2x + 1)y + x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 9x + 3$
и	$(x+1)y + x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 4$

Пример. Найти ранг-полином графа (рис. 1.12).

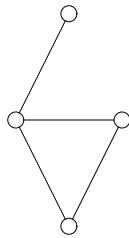


Рис. 1.12

Решение. Найдем все 16 остовных подграфов графа G (рис. 1.13–1.15). Множество представим в виде четырех графов размера 1 (т.е. с одним ребром), шести графов размера 2, четырех графов размера 3 и двух несобственных графов (пустой граф и граф G). Найдем для каждого подграфа ранг (по формуле $\nu^* = 4 - k$, где k — число компонент подграфа, включая изолированные вершины) и коранг ($\nu = m - \nu^*$, где m — число ребер подграфа).

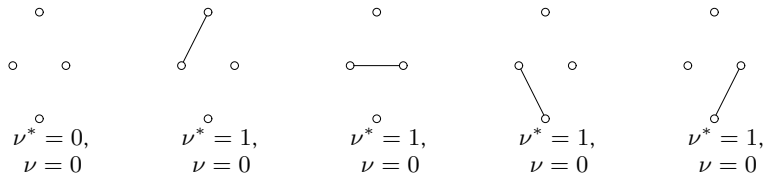


Рис. 1.13

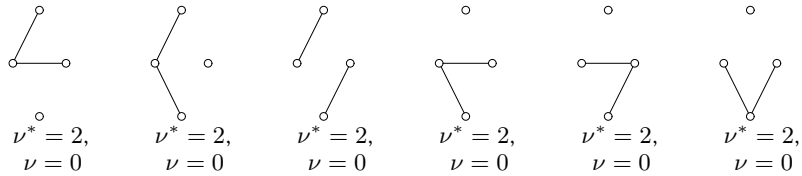


Рис. 1.14

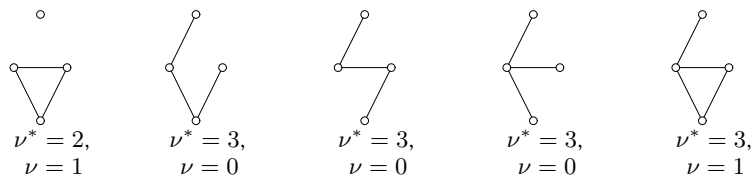


Рис. 1.15

Учитывая, что ранг ν_G^* графа равен 3, получаем сумму

$$\begin{aligned} \sum x^{\nu_G^* - \nu_H^*} y^{\nu_H} &= \\ &= x^{3-0}y^0 + 4x^{3-1}y^0 + 6x^{3-2}y^0 + 3x^{3-3}y^0 + x^{3-2}y^1 + x^{3-3}y^1 = \\ &= x^3 + 4x^2 + 6x + 3 + xy + y. \end{aligned}$$

Программа нахождения ранга-полинома графа в системе **Maple** приведена на с. 98.

1.5. Циклы

Маршрут, в котором начало и конец совпадают, — *циклический*. Циклический маршрут называется *циклом*, если он — цепь.

Остовом графа G называют граф, не содержащий циклов и состоящий из ребер графа G и всех его вершин. Остов графа определяется неоднозначно.

Ребра графа, не входящие в остов, называются *хордами*. Цикл, получающийся при добавлении к остову графа его хорды, называется *фундаментальным* относительно этой хорды.

Теорема 11. Число ребер неграфа, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно цикломатическому рангу графа.

Задача. По заданной матрице смежности (рис. 1.16) определить число циклов длины 3 (c_3) и длины 4 (c_4). Записать матрицу инцидентности и матрицу фундаментальных циклов.