

Уравнение Рауса

Из книги А.П.Маркеева Теоретическая механика, М.:Наука, 1990, с.250

Функция Рауса¹ имеет вид

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L(q_i, q_{\alpha}, \dot{q}_i, \dot{q}_{\alpha}, t) \quad (4)$$

Полный дифференциал функции Рауса вычисляется по формуле

$$dR = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=k+1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial R}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} \right) + \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (5)$$

С другой стороны, вычислив полный дифференциал (4), получим

$$dR = - \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \sum_{\alpha=k+1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha=k+1}^n (p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha} + \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha}) - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Так как $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = p_{\alpha}$, получаем после сокращения $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha}$ и $-p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha}$:

$$dR = - \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=k+1}^n \left(\dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6)$$

Сравнение (5) и (6) дает

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (7)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_{\alpha}} = - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}, \quad \frac{\partial R}{\partial p_{\alpha}} = \dot{q}_{\alpha}, \quad \alpha = k + 1, \dots, n \quad (8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (9)$$

С учетом уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (11)$$

и

$$\frac{dq_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_{\alpha}}, \quad \frac{dp_{\alpha}}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial q_{\alpha}}, \quad \alpha = k + 1, \dots, n \quad (12)$$

Совокупность (11) и (12) образует систему уравнений Рауса.

¹Раус Эдвард (1831 – 1907) — английский ученый и педагог, см. **А.А. Буров Эдвард Джон Раус**//Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика, вып. 26 – М.: МГУ, 2006.