

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** На оси, вращающейся в двух неподвижных подшипниках под действием постоянного внешнего момента, закреплён цилиндр и жёсткий невесомый стержень с точечной массой на конце. Ось цилиндра составляет малый угол с осью вращения. Найти динамические составляющие реакций подшипников.

**ПЛАН РЕШЕНИЯ**

Динамические составляющие реакций подшипников  $X_A, X_B, Y_A, Y_B$  на подвижные оси, связанные с вращающимся ротором, удовлетворяют уравнениям [24]

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= -m y_c \varepsilon_z - m x_c \omega_z^2, \\ Y_A + Y_B &= m x_c \varepsilon_z - m y_c \omega_z^2, \\ z_A X_A + z_B X_B &= -J_{yz} \varepsilon_z - J_{xz} \omega_z^2, \\ -z_A Y_A - z_B Y_B &= -J_{xz} \varepsilon_z + J_{yz} \omega_z^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m = \sum_i m_i$  — масса ротора,  $x_c, y_c, z_c$  — координаты его центра масс,  $J_{yz}, J_{xz}$  — центробежные моменты инерции ротора. Ось  $z$  направлена по оси вращения ротора;  $\omega_z, \varepsilon_z$  — угловые скорость и ускорение ротора в проекции на  $z$ ;  $z_A, z_B$  — координаты подшипников  $A$  и  $B$ .

1. Вводим систему координат. Начало координат помещаем в одном из подшипников, например,  $A$ . Ось  $z$  направляем по оси вращения, ось  $x$  направляем так, чтобы ось цилиндра лежала в плоскости  $xz$ . Определяем массу  $m$  системы двух тел и координаты центра масс системы:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^2 m_i x_{c_i}, \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^2 m_i y_{c_i}, \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^2 m_i z_{c_i}, \quad (2)$$

где  $x_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i}$  — координаты центров масс тел.

2. Вычисляем моменты инерции цилиндра, ось  $\zeta$  которого составляет малый угол с осью вращения  $z$ , относительно осей координат:

$$\begin{aligned} J_{zz}^{(\text{цил})} &= \frac{m_1 R^2}{2} + m_1 (y_{c_1}^2 + x_{c_1}^2), \\ J_{xz}^{(\text{цил})} &= \alpha \frac{m_1 R^2}{4} + m_1 x_{c_1} z_{c_1}, \\ J_{yz}^{(\text{цил})} &= m_1 y_{c_1} z_{c_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Малый угол  $\alpha$  отсчитывается от оси цилиндра  $\zeta$  к положительному направлению оси  $z$ . Угол берётся положительный, если со стороны оси  $y$  поворот оси цилиндра к оси  $z$  виден против часовой стрелки, и отрицательный — если поворот виден по направлению часовой стрелки. Мо-

менты инерции  $J_{yz}^{(\text{цил})}$ ,  $J_{zz}^{(\text{цил})}$  и  $J_{xz}^{(\text{цил})}$  вычислены по теореме Гюйгенса<sup>1</sup>. Вторые слагаемые в (3) представляют собой соответствующие моменты инерции центра масс цилиндра относительно начала координат.

3. Вычисляем моменты инерции точечной массы (груза) относительно осей  $x, y, z$ :

$$J_{zz}^{(\text{груз})} = m_2(y_{c_2}^2 + x_{c_2}^2), \quad J_{xz}^{(\text{груз})} = m_2x_{c_2}z_{c_2}, \quad J_{yz}^{(\text{груз})} = m_2y_{c_2}z_{c_2}.$$

4. Находим суммарные моменты инерции системы:

$$\begin{aligned} J_{zz} &= J_{zz}^{(\text{цил})} + J_{zz}^{(\text{груз})}, \\ J_{xz} &= J_{xz}^{(\text{цил})} + J_{xz}^{(\text{груз})}, \\ J_{yz} &= J_{yz}^{(\text{цил})} + J_{yz}^{(\text{груз})}. \end{aligned}$$

5. Вычисляем угловое ускорение ротора,  $\varepsilon_z = M_z/J_{zz}$ , и угловую скорость ротора в указанный момент  $t$ . Если  $\varepsilon_z = \text{const}$  и  $\omega_z(0) = 0$ , то  $\omega_z = \varepsilon_z t$ .

6. Искомые реакции находим из решения системы (1) при  $z_A = 0$ .

**ПРИМЕР.** На оси, вращающейся в неподвижных подшипниках  $A$  и  $B$  под действием постоянного момента  $M_z = 0.4$  Нм, закреплен ротор, состоящий из цилиндра массой  $m_1 = 50$  кг и жесткого невесомого стержня длиной  $L = 21$  см с точечной массой  $m_2 = 6$  кг на конце (рис. 142). Ось цилиндра составляет угол  $\alpha = 0.06$  рад с осью вращения  $Az$ . Центр массы цилиндра лежит на оси  $Az$ . Стержень перпендикулярен  $Az$ . Найти динамические составляющие реакций подшипников в момент времени  $t = 3$  с. Ротор вращается из состояния покоя.

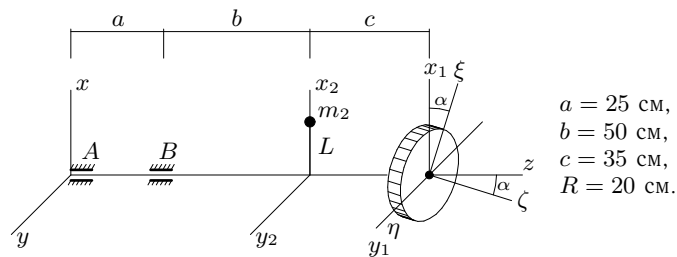


Рис. 142

Введены системы координат  $x_i, y_i, z_i$ ,  $i = 1, 2$ , с осями, параллельными  $x, y, z$ , проходящими через центры масс тел 1 и 2. Ось  $\zeta$  является

<sup>1</sup>Христиан Гюйгенс (1629–1695) — нидерландский математик, механик, физик и астроном.

осью цилиндра и вместе с осями  $x_1$  и  $x_2$  лежит в плоскости  $xz$ . Оси  $\xi$  и  $\eta$  перпендикулярны  $\zeta$ .

### РЕШЕНИЕ

1. Вводим систему координат. Начало координат помещаем в подшипнике  $A$ , ось  $z$  направляем по оси вращения. Ось цилиндра лежит в плоскости  $xz$ . Определяем массу системы  $m = m_1 + m_2 = 56$  кг и координаты центра масс системы по формуле (2):

$$x_c = \frac{1}{56}6 \cdot 0.2 = 0.0225 \text{ м}, \quad y_c = 0, \quad z_c = \frac{1}{56}(50 \cdot 1.1 + 6 \cdot 0.85) = 0.982 \text{ м}.$$

2. Вычисляем моменты инерции цилиндра относительно осей координат по формулам (3), где  $\alpha > 0$ :

$$J_{zz}^{(\text{цил})} = 1 \text{ кг м}^2, \quad J_{xz}^{(\text{цил})} = 0.03 \text{ кг м}^2, \quad J_{yz}^{(\text{цил})} = 0.$$

Угол берется положительный, так как со стороны оси  $y$  поворот оси цилиндра к оси  $z$  виден против часовой стрелки.

3. Вычисляем моменты инерции точечной массы (груза) относительно осей  $x, y, z$ :

$$J_{zz}^{(\text{груз})} = 0.265 \text{ кг м}^2, \quad J_{xz}^{(\text{груз})} = 0.945 \text{ кг м}^2, \quad J_{yz}^{(\text{груз})} = 0.$$

4. Находим суммарные моменты инерции системы  $J_{zz} = 1.265 \text{ кг м}^2$ ,  $J_{xz} = 0.975 \text{ кг м}^2$ ,  $J_{yz} = 0$ .

5. Вычисляем угловое ускорение ротора,  $\varepsilon = M_z/J_{zz} = 0.316 \text{ рад/с}^2$ , и угловую скорость ротора в момент  $t = 3$  с. Так как  $\varepsilon = \text{const}$  и  $\omega(0) = 0$ , то  $\omega = 0.316 \cdot 3 = 0.949 \text{ рад/с}$ .

6. Динамические реакции опор вычисляем, решая систему (1) при  $z_A = 0$ ,  $z_B = a = 0.25$  м:

$$\begin{aligned} X_B &= -(J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2)/z_B = -3.512 \text{ Н}, \\ Y_B &= (J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2)/z_B = 1.233 \text{ Н}, \\ X_A &= -m y_c \varepsilon - m x_c \omega^2 - X_B = 2.377 \text{ Н}, \\ Y_A &= m x_c \varepsilon - m y_c \omega^2 - Y_B = -2.494 \text{ Н}. \end{aligned}$$

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** На оси, вращающейся в подшипниках  $A$  и  $B$  под действием постоянного момента  $M_z$ , закреплен ротор, состоящий из цилиндра 1 и жесткого невесомого стержня длиной  $L$  с точечной массой 2 на конце. Ось цилиндра составляет малый угол  $\alpha$  с осью вращения  $Az$ . Центр массы цилиндра лежит на оси  $Az$ . Стержень перпендикулярен  $Az$ . Найти динамические составляющие реакций подшипников в момент времени  $t$ . Ротор вращается из состояния покоя. В центрах масс тел 1 и 2 введены системы координат  $x_i, y_i, z_i$ ,  $i = 1, 2$  с осями, параллельными  $x, y, z$ . Ось  $\zeta$  является осью