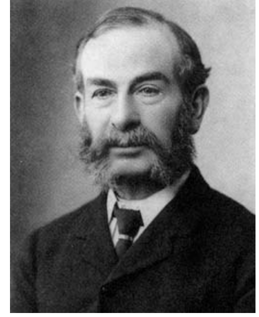
Кирсанов М.Н.



Уравнение Рауса

Консервативная система имеет s степеней свободы с обобщенными координатами $q_k, k = 1, .., s$ из которых n являются циклическими, т.е. они входят в функцию Лагранжа только своими производными $\dot{q}_k$, $k = 1, .., n \leq s$. Таким образом

$$L = L(q_{n+1}, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s).$$

В силу уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,\ \ k = 1, .., s, \tag{1}$$

имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0,\ \ k = 1, .., n$$

Интегрируя получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k, \quad k = 1, ..., n, \tag{2}$$

где p_k — обобщенные импульсы. Уравнения (2) называются циклическими интегралами. Из этих равенств надо выразить скорости циклических координат $\dot{q}_k$, $k = 1, .., n$ через скорости остальных координат и подставить в оставшиеся $s - n$ уравнения.

Введем функцию Рауса

$$R = L - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k. \tag{3}$$

Очевидно $R = R(q_{n+1}, .., q_s, \dot{q}_{n+1}, .., \dot{q}_s, p_1, .., p_n)$.

Варьируем (3)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n+1}^{s} \frac{\partial R}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_{k=n+1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial p_k}\delta p_k = \\
&= \sum_{k=n+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k + \sum_{k=n+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k - \\
&- \sum_{k=1}^{n} \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k.
\end{aligned} \tag{4}$$

Сокращая второй и последние члены в правой части, получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n+1}^{s} \frac{\partial R}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_{k=n+1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial p_k}\delta p_k = \\
&= \sum_{k=n+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_{k=n+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k - \sum_{k=1}^{n} \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k
\end{aligned} \tag{5}$$

В силу независимости вариаций и (2) получим

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial R}{\partial q_k},\ \ k = n + 1, .., s,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k},\ k = n+1, .., s,$$

$$\dot{q}_k = -\frac{\partial R}{\partial p_k},\ k = 1, .., n$$

Отсюда из (1) следует уравнение Рауса для нециклических координат

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_k} = 0,\ k = n+1, .., s, \qquad (6)$$

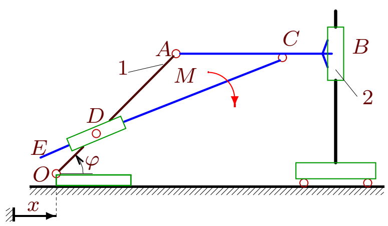
Для циклических координат

$$q_k = -\int \frac{\partial R}{\partial p_k} dt,\ k = 1, .., n$$

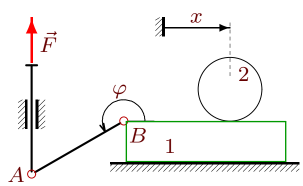
Задачи

Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы. Найти функцию Рауса.

Задача 1.
Горизонтальный стержень AB жестко соединен с муфтой B. Муфта скользит по вертикальному стержню, установленному на тележке. На кривошипе OA длиной a закреплена качающаяся муфта D, в которой скользит стержень CE. Масса кривошипа, шарнирно соединенного с пластиной, скользящей по основанию, равна m_1, масса муфты — $m_2 = m_1$; $AC = AD = b$. К стержню CE приложен момент M. За обобщенные координаты принять угол поворота φ кривошипа и смещение x пластины.



Задача 2.



Стержень AB соединяет вертикальный шток и горизонтально скользящий брусок массой $m_1 = m$. По бруску катается цилиндр массой $m_2 = 2m$. К штоку приложена вертикальная сила F. За обобщенные координаты принять угол поворота φ стержня и смещение x оси цилиндра.

Ответы.

1 $\quad -ma^2(5 + 12\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2/48 + (3/4)p_x a\dot{\varphi}\sin\varphi + M\varphi/2 + (3/2)mga\sin\varphi + p_x^2/(4m)$

2 $\quad -(5/6)ma^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + (1/3)p_x a\dot{\varphi}\sin\varphi + Fa\sin\varphi + p_x^2/(6m)$

Литература

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. В 2-х частях. Ч. 2. Динамика системы материальных точек. — СПб.: Лань, 2009.