СССР ОЛИЙ ТАЪЛИМ МИНИСТРЛИГИ
В. И. ЛЕНИН номидаги ЎРТА ОСИЁ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
СРЕДНЕАЗИАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ЛЕНИНА

ТРУДЫ
Новая серия, выпуск 144
Физико-математические науки, книга 18

М. Ф. ШУЛЬГИН

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО САГУ
ТАШКЕНТ — 1958

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена ряду вопросов аналитической динамики, связанных с выводом и дальнейшим развитием некоторых уравнений движения для несвободных материальных систем.

В развитии механики всегда играли важную роль или методы, открывающие возможность решения нового класса механических задач, или исследования дающие изучаемому материалу изящный и законченный вид.

За последние десятилетия теория движения неголономных систем и теория связанных задач механики стали одними из основных направлений аналитической динамики и привлекают к себе все большее внимание ученых и инженеров. Это объясняется тем, что теория неголономных систем, помимо теоретического интереса, обусловленного принципиальной новизной самого вопроса, нашла себе важные приложения во многих вопросах современной техники (в теории электрических машин и счетно—интегрирующих приборов, в теории посадки и взлета самолета, теории движения саней и автомобиля и т. д.). Неголономные связи, являясь механическим осуществлением некоторых дифференциальных соотношений, применяются также в системах автоматического регулирования врубовых машин и угольных комбайнов, как это выяснено в целом ряде работ А. И. Кухтенко (ДАН УССР, № № 2, 3, 4, 1954 г.; Труды ин-та машиноведения А. Н. СССР, т. 15, в. 58, 1955 г. и др.).

Можно указать также на весьма обширный класс динамических задач, при решении которых, во избежание излишнего осложнения расчета, возникает необходимость и оказывается целесообразным сохранение большего числа переменных, чем это необходимо для определения конфигурации системы.

На возможность таких случаев указывал еще Лагранж в своей знаменитой „Аналитической механике", предлагая для решения задач механики, наряду с методом независимых параметров, метод неопределенных множителей. В некоторых случаях введение в рассмотрение избыточных координат вызываются требованиями, связанными с удобствами пользования при решении задач переменными параметрами, имеющими простое геометрическое значение. В таких случаях координаты, определяющие положение системы, будут связаны между собой некоторыми условными уравнениями, число которых должно быть равно числу „лишних" координат. Соответствующие задачи динамики принято называть связанными задачами.

Как известно, по методу Лагранжа решение всякой связанной задачи динамики сводится к интегрированию некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих неопределенные множители. Но интегрирование уравнений динамики с множителями связей, вообще говоря, сложно, так как приходится иметь дело с излишне большим числом уравнений и переменных, а потому и число постоянных интеграции получается больше, чем нужно для искомого движения.

Но хотя уравнения Лагранжа с неопределенными множителями впервые появились в литературе еще в конце 18 века, тем не менее теория связанных задач динамики представляет собой сравнительно мало разработанный отдел аналитической динамики. В дальнейшем эти уравнения изучались как самостоятельно, так и в связи с их многочисленными приложениями.

Значительный вклад в развитие теории лагранжевых уравнений с множителями связей внес Г. К. Суслов (Теоретическая механика, 1946 г.), распространивший метод полного интеграла Гамильтона—Якоби на голономные консервативные системы.

Что касается других теорий (теорема Пуассона, теория преобразования уравнений и др.), относящихся к интегрированию лагранжевых уравнений первого рода, то их развитие даже для голономных систем не было сделано. Это объясняется, главным образом, теми трудностями, которые возникают вследствие наличия в уравнениях движения неопределенных множителей.

Однако, поскольку уравнения движения в избыточных координатах необходимы и имеют широкое применение в механике, то возникает необходимость в развитии теорий, имеющих отношение к изучению свойств этих уравнений: их интеграции, изучение их интегралов и т. д.

Естественно возникает мысль о необходимости получения для связанных задач динамики уравнений движения свободных от неопределенных множителей, на базе которых можно было бы построить все теории аналитической динамики, как и для уравнений Лагранжа второго рода или союзных им уравнений Гамильтона.

Советским ученым принадлежит ведущая роль как в развитии динамики неголономных систем, так и в развитии других разделов современной аналитической динамики. Наши ученые (С. А. Чаплыгин, П. В. Воронец, И. В. Мещерский, В. В. Вагнер, В. В. Добронравов, Н. Г. Четаев и другие) сделали ряд существенных вкладов в аналитическую динамику, несмотря на то, что эта область, казалось, была уже полностью исчерпана трудами создателей классической механики, относящимся к 18 и 19 векам.

После открытия в 1894 г. Герцем неголономных механических систем возникло ряд проблем, как по составлению уравнений движения таких систем, так и по изучению различных свойств найденных уравнений.

Неудивительно поэтому, что за время от Герца и Чаплыгина до наших дней появилось большое количество исследований по этим проблемам. Однако, следует подчеркнуть, что большая часть этих исследований посвящена, главным образом, проблеме составления уравнений движения, которые охватывали бы как голономные системы, так и неголономные.

По вопросу о составлении дифференциальных уравнений движения механических систем, наиболее интересные исследования принадлежат: С. А. Чаплыгину (1895 г.), П. Аппелю (1900 г.), П. В. Воронцу (1901 г.), Г. А. Маджи (1901 г.), А. Больтцману (1902 г.), Г. Гамелю (1904 г.), З. Гораку (1928 г.), А. Пшеборскому (1932 г.) и другим.

В результате этих исследований было получено много различных типов уравнений движения, как в истинных координатах, так и в неголономных координатах. Первыми по времени их появления (1895 г.) были уравнения С. А. Чаплыгина. Это были уравнения движения в истинных координатах и без неопределенных множителей. В другой своей работе С. А. Чаплыгин (Полн. собр. сочин., т. I, стр. 207—215, Изд. А. Н. СССР, 1933) исследовал вопрос о приводимости предложенных им уравнений к виду канонических уравнений Гамильтона и дал обобщение метода полного интеграла Гамильтона—Якоби на неголономные системы с двумя степенями свободы. Таким образом, в работах С. А. Чаплыгина содержатся начала аналитической динамики неголономных систем с двумя степенями свободы.

Наиболее полная история развития динамики неголономных систем дана в работе Х. М. Муштари „О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости" (Математ. сборник, т. 39, 105—126. 1932 г.) и в работе В. В. Добронравова „Аналитическая динамика в неголономных координатах" (Учен. записки МГУ, вып. 122, стр. 77—182, 1948 г.).

Что же касается уравнений динамики для неголономных систем с любым числом степеней свободы, то для них аналитическая динамика в целом оказалась не развитой и не созданной, несмотря на то, что этой проблеме посвящена довольно обширная литература, свидетельствующая о ее важности. В тоже время некоторым ученым, особенно русским (С. А. Чаплыгину, Г. К. Суслову, П. В. Воронцу, Н. Е. Кочину, Н. Г. Четаеву, В. В. Добронравову и др.) удалось получить ряд общих результатов, продвинувших эту проблему вперед. К числу результатов общего характера принадлежат найденное С. А. Чаплыгиным (1897 г.) обобщение теоремы площадей и предложенное Г. К. Сусловым (1901 г.) обобщение принципа Остроградского—Гамильтона, одинаково приложимых и к голономным и к неголономным системам.

В работах, посвященных принципу Гаусса Н. Г. Четаев (1934, 1941) рассматривает вопрос о совместности принципов Даламбера и Гаусса в системах с неголономными нелинейными связями и дает оригинальное видоизменение этого принципа. Н. Е. Кочин в работе „Об освобождении механических систем" (ПММ, т. 10, 1946 г.) вводит определение возможных перемещений, которое имеет принципиально важное значение для динамики неголономных систем с нелинейными связями.[1]

После работ П. В. Воронца, А. Больтцмана и Г. Гамеля метод неголономных координат был перенесен в геометрию, где он получил широкое развитие, но в самой аналитической механике долгое время его применение ограничивалось выводом уравнений движения.

Разработка и применение этого метода к аналитической динамике принадлежит В. В. Добронравову, изложившим ее в неголономных координатах в своей докторской диссертации „Аналитическая динамика в неголономных координатах" (1948 г). Таким путем В. В. Добронравов совершенно строго получил в неголономных координатах для голономных систем теорию Гамильтона—Якоби, теорию Пуассона, теорию интегральных инвариантов и т. д.

Из работ, относящихся к решению связанных задач динамики голономных систем, нужно отметить статьи Н. Г. Четаева „Об урав-

---

[1] Аналогичным, но более общим определением возможных перемещений (в случае нелинейных связей) пользовался А. Пшеборский (A. Przeborski, „Die allgemeinsten Gleichungen der klass. Dynamik," Math. Zeitsch. т. 36, 1, 1932 г.).

В остальной части настоящей работы мы даем для голономных систем весьма простой способ построения всей аналитической динамики в неголономных координатах, а также даем вывод наиболее общих уравнений движения классической динамики, пригодных для исследования движения неголономных систем и систем с сервомоторными связями.

Подробное представление о содержании настоящей работы дает оглавление.

Работа в настоящем виде была написана в 1952 г. Тогда же рукопись была просмотрена и получила положительную оценку академика А. И. Некрасова.

Основные результаты настоящей работы изложены в наших статьях, напечатанных в следующих журналах: 1) Бюллетень Среднеазиатского государст. универс., вып. 23, стр. 42—44, 1945 г.; вып. 30, стр. 141—165, 1949 г.; 2) Труды Среднеазиатского государств. универ., вып. 17, стр. 147—153, 1950 г.; вып. 17, стр. 155—164, 1950 г.; вып. 37, стр. 49—58, 1954; вып. 37, стр. 183—190, 1954 г.; вып. 66, стр. 55—60, 1956 г.; 3) Труды ин—та математ. и механики АН УзССР, вып. 6, стр. 107—130, 1950 г., вып. 7, стр. 247—254, 1950 г.; вып. 8, стр. 138—145, 1951 г.; вып. 10, часть II, стр. 191—195, 1953 г.; 4) Доклады Академии Наук СССР, нов. сер., том 75, № 3, стр. 349—351, 1950 г.; том. 81, № 1, стр. 23—26, 1951 г.; том. 83, № 3, стр. 373—376, 1952 г.; том 84, № 3, стр. 453—456, 1952 г.; том 84, № 5, стр. 899—902, 1952 г.; том 87, № 5, стр. 701—703, 1952 г.; 5) Доклады Академии Наук УзССР, № 10, стр. 3—9, 1951 г.; № 12, стр. 3—8, 1951 г.; № 3, стр. 8—12, 1953 г.; № 11, стр. 3—7, 1953 г.; 6) Труды Среднеазиатского государствен. универ., вып. 54, стр. 131—136, 1954 г.; вып. 54, стр. 115—130, 1954 г.; вып. 83, книга 14, 1956 г.

ГЛАВА I.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ В НЕГОЛОНОМНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 1. Указание способа. В данной главе мы даем весьма простой способ построения аналитической динамики в неголономных координатах.

Главное преимущество неголономных координат перед обычными истинными лагранжевыми координатами состоит в том, что неголономные координаты более общи, чем истинные. Поскольку метод неголономных координат необходим и имеет приложение и в теоретической механике, и в дифференциальной геометрии, и в теоретической физике, то возникает потребность в изучении свойств этого метода, его отношение и связь с обычным методом истинных координат, приложение которых разработано во многих деталях.

Применение метода неголономных координат к аналитической динамике для голономных систем было разработано В. В. Добронравовым, изложившим ее в неголономных координатах[1]. Таким путем В. В. Добронравов получил в неголономных координатах теорию Пуассона, теорию Гамильтона—Якоби, теорию последнего множителя и другие[2].

Однако, мы считаем возможным предложить свое решение этого вопроса не только потому, что оно гораздо проще, чем все нам известные, но также потому, что предлагаемый здесь способ может быть использован для построения в неголономных координатах не только отдельных теорем, но и всей аналитической динамики.

В основе этого способа лежат канонические уравнения Гамильтона и метод приведения этих уравнений к неголономным переменным. Получаемые при этом так называемые канонические уравнения динамики в неголономных координатах обладают свойствами, аналогичными свойствам обычных уравнений Гамильтона. Замечателен тот факт, что при помощи тех же самых преобразований переменных и всякая теорема о свойствах уравнений Гамильтона переходит в предложение, характеризующее соответствующее свойство канонических уравнений в неголономных координатах. Другими словами, из всякой теоремы аналитической динамики в истинных координатах мы можем

---

[1] В. В. Добронравов. Аналитическая динамика в неголономных координатах. Ученые записки МГУ, вып. 122, механика, т. II, 1948.

[2] Для уравнений в переменных Пуанкаре аналогичные предложения были еще раньше в 1927 и 1928 гг. получены Н. Г. Четаевым (Н. Г. Четаев, Об уравнениях Пуанкаре. ДАН,сер. А, № 7 (1928) и т. 185, стр. 1577 (1927)).

получить при помощи одного и того же простого преобразования переменных соответствующую ей теорему в неголономных координатах.

Тем самым обнаруживается крайне простой способ построения всей аналитической динамики в неголономных координатах. В виде примеров, иллюстрирующих этот способ в §§ 3, 4, 5 мы даем обобщение некоторых из названных выше теорем на случай неголономных координат.

§ 2. Канонические уравнения динамики в неголономных координатах. Вообразим некоторую консервативную механическую систему стесненную гладкими голономными связями, конфигурация которой определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Так как знание этих величин и структуры системы достаточно для определения положения любой точки системы, то эти величины называют еще истинными координатами. Возьмем уравнения движения системы в форме Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

и выясним, какой вид примут эти уравнения, если мы отбросим ограничение об истинности координат.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ будут n независимых друг от друга линейных форм от скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, определяемых при помощи уравнений:

$$\omega_\rho = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\rho\mu} \dot{q}_\mu, \quad (\rho = 1, 2, \ldots n), \tag{1.2}$$

где $\alpha_{\rho\mu}$ — данные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и детерминант $|\alpha_{\rho\mu}| \neq 0$. Тогда будем иметь обратное преобразование

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n} \beta_{\lambda\mu} \omega_\lambda, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Коэффициенты уравнений (1.2) и (1.3) удовлетворяют условиям:

$$\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\rho\mu} \beta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 0 \text{ при } \lambda \neq \rho, \\ 1 \text{ при } \lambda = \rho, \end{cases} \quad (\rho, \lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.4}$$

Вводя условное обозначение

$$\omega_\rho = \frac{d\pi_\rho}{dt}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n),$$

мы можем уравнения (1.2) переписать так:

$$d\pi_\rho = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\rho\mu} dq_\mu, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.5}$$

Эти уравнения непосредственно интегрируются, если для всех ρ, μ, k выполняются условия

$$\frac{\partial \alpha_{\rho\mu}}{\partial q_k} - \frac{\partial \alpha_{\rho k}}{\partial q_\mu} = 0. \tag{1.6}$$

В этом случае будут существовать истинные координаты π_ρ $(\rho = 1, 2, \ldots, n)$. Но так как уравнения (1.5) могут быть и неинтегрируемыми, то величины $d\pi_\rho$ $(\rho=1, 2,\dots, n)$ могут и не являться дифференциалами от координат π_ρ $(\rho=1, 2,\dots, n)$.

Мы будем предполагать, что уравнения (1.5) не образуют вполне интегрируемой системы уравнений Пфаффа[1], а величины $d\pi_1, d\pi_2,\dots, d\pi_n$ будем называть дифференциалами неголономных координат. Обозначим через T^* результат исключения $\dot q_1, \dot q_2,\dots, \dot q_n$ из живой силы $T(t;\, q;\, \dot q)$ при помощи уравнений (1.3).

Введем еще группу переменных $u_1, u_2,\dots, u_n$ — неголономных импульсов:

$$u_\rho=\sum_{\mu=1}^{n}\beta_{\rho\mu}p_\mu=\frac{\partial T^*}{\partial\dot\pi_\rho},\ (\rho=1, 2,\dots, n),\ p_\mu=\frac{\partial T}{\partial\dot q_\mu}. \tag{1.7}$$

Тогда будем иметь обратное преобразование

$$p_\mu=\sum_{\lambda=1}^{n}\alpha_{\lambda\mu}u_\lambda.\quad (\mu=1, 2,\dots, n). \tag{1.8}$$

Умножая теперь первую группу уравнений (1.1) на $\alpha_{\rho i}$ и складывая, а вторую группу этих уравнений на $\beta_{\rho i}$ и складывая, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\rho i}\dot q_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\rho i}\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \sum_{i=1}^{n}\beta_{\rho i}\dot p_i=-\sum_{i=1}^{n}\beta_{\rho i}\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad (\rho=1, 2,\dots, n). \tag{1.9}$$

Обозначая через H^* результат исключения $p_1, p_2,\dots, p_n$ из функции $H(t;\, p;\, q)$ при помощи уравнений (1.8), будем иметь:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=\frac{\partial H^*}{\partial q_i}+\sum_{\mu,\,\sigma,\,\kappa=1}^{n}\alpha_{\kappa\sigma}\frac{\partial\beta_{\mu\sigma}}{\partial q_i}\frac{\partial H^*}{\partial u_\mu}u_k,\quad (i=1,2,\dots, n), \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\sum_{\mu=1}^{n}\beta_{\mu i}\frac{\partial H^*}{\partial u_\mu},\quad (i=1, 2,\dots, n).$$

Далее, из уравнений (1.8) и (1.4), находим:

$$\dot p_i=\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_{\kappa i}\dot u_\kappa+\sum_{\kappa,\,\sigma=1}^{n}\frac{\partial\alpha_{\kappa i}}{\partial q_\sigma}\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}u_k,\quad (i=1, 2,\dots, n),$$

$$\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_{\rho\mu}\frac{\partial\beta_{\lambda\mu}}{\partial q_i}=-\sum_{\mu=1}^{n}\beta_{\lambda\mu}\frac{\partial\alpha_{\rho\mu}}{\partial q_i}. \tag{1.11}$$

На основании формул (1.11) и (1.10), принимая во внимание еще формулы (1.2) и (1.4), мы можем уравнения (1.9) привести к виду:

$$\omega_\rho=\dot\pi_\rho=\frac{\partial H^*}{\partial u_\rho},\quad (\rho=1, 2,\dots, n),$$

$$\dot u_\rho=-\sum_{i=1}^{n}\beta_{\rho i}\frac{\partial H^*}{\partial q_i}+\sum_{\kappa,\,\mu=1}^{n}\sum_{i,\,\sigma=1}^{n}\beta_{\rho i}\beta_{\mu\sigma}\left(\frac{\partial\alpha_{\kappa\sigma}}{\partial q_i}-\frac{\partial\alpha_{\kappa i}}{\partial q_\sigma}\right)\frac{\partial H^*}{\partial u_\mu}u_k. \tag{1.12}$$

Величина

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_{\rho i}\frac{\partial H^*}{\partial q_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H^*}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\pi_\rho}$$

---

[1] т. е. уравнения $d\pi_\rho-\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_{\rho\mu}\,dq_\mu=0$ не могут быть приведены к эквивалентной системе $dy_1=dy_2=\dots=dy_n=0$ (Картан. Интегральные инварианты, гл. X).

представляет собой $\frac{\partial H^*}{\partial \pi_\rho}$, если π_ρ является истинной координатой. Будем обозначать эту величину через $\frac{\partial H^*}{\partial \pi_\rho}$, независимо от того, является ли π_ρ истинной координатой или неголономной координатой.

Кроме того, вводя коэффициенты Риччи-Гамеля, т. е.

$$\gamma_{\mu\kappa\rho} = \sum_{i,\sigma=1}^{n} \beta_{\rho i}\, \beta_{\mu\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{\kappa\sigma}}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_{\kappa i}}{\partial q_\sigma} \right), \tag{1.13}$$

мы можем уравнения (1.12) переписать в виде:

$$\dot{\pi}_\rho = \frac{\partial H^*}{\partial u_\rho}, \quad \dot{u}_\rho = -\frac{\partial H^*}{\partial \pi_\rho} + \sum_{\kappa,\mu=1}^{n} \gamma_{\mu\kappa\rho} \frac{\partial H^*}{\partial u_\mu} u_k, \; (\rho = 1, 2, \dots, n). \tag{1.14}$$

Уравнения (1.14) суть искомые канонические уравнения движения голономной системы в неголономных координатах. Если все π_ρ являются истинными координатами, то в силу равенств (1.6) все величины $\gamma_{\mu\kappa\rho}$ обращаются в нуль и уравнения (1.14) делаются обычными уравнениями Гамильтона.

Если система неголономных координат вводится при помощи реономных пфаффовых форм

$$d\pi_\rho = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\rho\mu}\, dq_\mu + \alpha_{\rho, n+1}\, dt, \quad d\pi_{n+1} = dq_{n+1} = dt, \quad (\rho = 1, 2, \dots, n), \tag{1.15}$$

с обратным преобразованием

$$dq_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n} \beta_{\lambda\mu}\, d\pi_\lambda + \beta_{n+1,\mu}\, dt, \quad dq_{n+1} = d\pi_{n+1} = dt, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n), \tag{1.16}$$

то аналогичными рассуждениями, выбирая за дополнительную координату $\pi_{n+1} = q_{n+1} = t$ можно преобразовать уравнения (1.1) к неголономным переменным и привести их к виду:

$$\dot{\pi}_\rho = \frac{\partial H^*}{\partial u_\rho}, \quad \dot{u}_\rho = -\frac{\partial H^*}{\partial \pi_\rho} + \sum_{\kappa=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n+1} \gamma_{\mu\kappa\rho} \frac{\partial H^*}{\partial u_\mu} u_k, \quad \left(\frac{\partial H^*}{\partial u_{n+1}} = 1 \right), \quad (\rho = 1, 2, \dots, n). \tag{1.17}$$

§ 3. Теорема Пуассона в неголономных координатах. Как известно, для уравнений Гамильтона (1.1), составленных в истинных координатах, существует классическая теорема Пуассона о том, что если имеется два первых интеграла

$$\varphi(t;\, q_i;\, p_i) = \text{const}, \quad \psi(t;\, q_i;\, p_i) = \text{const} \tag{1.18}$$

системы канонических уравнений (1.1), то равенство

$$(\varphi, \psi) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) = \text{const} \tag{1.19}$$

определяет собою, вообще говоря, некоторый новый интеграл этой системы.

Для получения этой теоремы в неголономных координатах, введем в формулу (1.19), при помощи уравнений (1.8), вместо переменных p_i переменные u_i.

Обозначая через φ^* и ψ^* результат исключения величин p_i из функций φ и ψ через посредство равенств (1.8), мы можем написать для этих функций формулы, аналогичные формулам (1.10) для H и H*, а именно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}=\frac{\partial\varphi^*}{\partial q_i}+\sum_{\mu,\sigma,\kappa=1}^{n}\alpha_{\kappa\sigma}\frac{\partial\beta_{\mu\sigma}}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi^*}{\partial u_\mu}u_k,\ \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}=\sum_{\mu=1}^{n}\beta_{\mu i}\frac{\partial\varphi^*}{\partial u_\mu},\ (i=1,\ 2,..,n)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_i}=\frac{\partial\psi^*}{\partial q_i}+\sum_{\mu,\sigma,\kappa=1}^{n}\alpha_{\kappa\sigma}\frac{\partial\beta_{\mu\sigma}}{\partial q_i}\frac{\partial\psi^*}{\partial u_\mu}u_k,\ \frac{\partial\psi}{\partial p_i}=\sum_{\mu=1}^{n}\beta_{\mu i}\frac{\partial\psi^*}{\partial u_\mu}. \qquad (1.20)$$

Заменяя теперь в равенстве (1.19) величины $\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}$, $\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$, $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$ их выражениями (1.20), имея при этом в виду формулы (1.11), будем иметь:

$$(\varphi,\psi)\equiv\sum_{\mu,i=1}^{n}\beta_{\mu i}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial q_i}\frac{\partial\psi^*}{\partial u_\mu}-\frac{\partial\varphi^*}{\partial u_\mu}\frac{\partial\psi^*}{\partial q_i}\right)+\sum_{\mu,\kappa,\lambda,i,\sigma=1}^{n}\beta_{\lambda i}\beta_{\mu\sigma}\left(\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial\alpha_{\kappa\sigma}}{\partial q_i}\right)\frac{\partial\varphi^*}{\partial u_\mu}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial u_\lambda}u_\kappa=\text{const}$$

или, вводя коэффициенты Риччи-Гамеля и производные по неголономным координатам,

$$(\varphi,\psi)=\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial\pi_\mu}\frac{\partial\psi^*}{\partial u_\mu}-\frac{\partial\varphi^*}{\partial u_\mu}\frac{\partial\psi^*}{\partial\pi_\mu}\right)+\sum_{\lambda,\kappa,\mu=1}^{n}\gamma_{\lambda\kappa\mu}\frac{\partial\varphi^*}{\partial u_\mu}\frac{\partial\psi^*}{\partial u_\lambda}u_\kappa=\text{const} \qquad (1.21)$$

или

$$\{\varphi^*,\ \ \psi^*\}=\text{const},$$

где фигурные скобки означают следующее выражение:

$$\{\varphi^*,\ \psi^*\}\equiv\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial\pi_\mu}\frac{\partial\psi^*}{\partial u_\mu}-\frac{\partial\varphi^*}{\partial u_\mu}\frac{\partial\psi^*}{\partial\pi_\mu}\right)+\sum_{\lambda,\kappa,\mu=1}^{n}\gamma_{\lambda\kappa\mu}\frac{\partial\varphi^*}{\partial u_\mu}\frac{\partial\psi^*}{\partial u_\lambda}u_\kappa, \qquad (1.22)$$

которые следуя В. В. Добронравову мы будем называть обобщенными скобками Пуассона в неголономных координатах. Эти скобки обладают всеми свойствами обыкновенных скобок Пуассона.

Резюмируя мы можем полученный результат высказать следующим образом: *Если* $\varphi(q_i,\ u_i,\ t)=\text{const}$ и $\psi(q_i,\ u_i,\ t)=\text{const}$ *представляют собою два первых интеграла канонической системы уравнений в неголономных координатах (1.14), то равенство* $\{\varphi,\ \ \psi\}=\text{const}$ *выражает некоторый новый интеграл этой системы.*

§ 4. Теорема Гамильтона-Якоби в неголономных координатах. Классическое уравнение в частных производных Гамильтона-Якоби, как известно, имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\mathrm{H}\left(t;\ q_i;\ \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=0, \qquad (1.23)$$

причем имея полный интеграл $S(t;\ q_1,\ q_2,..,\ q_n;\ a_1,\ a_2,..,\ a_n)+a_{n+1}$ этого уравнения, где $a_j=\text{const}$, мы можем получить общее решение системы канонических уравнений (1.1) из конечных соотношений:

$$\frac{\partial S}{\partial a_i}=b_i,\quad \frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i,\quad (i=1,\ 2,\dots,\ n), \qquad (1.24)$$

где b_i — постоянные.

Выясним какую форму примет уравнение (1.23) и как будет формулироваться сама теорема Гамильтона-Якоби, если мы отбросим ограничение об истинности координат. Для получения этой теоремы в неголономных координатах, достаточно в уравнения (1.23) и (1.24) вместо переменных $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ ввести переменные u_i через посредство равенств (1.7) и (1.8). Имеем

$$u_\rho = \sum_{\mu=1}^{n} \beta_{\rho\mu} p_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} \beta_{\rho\mu} \frac{\partial S}{\partial q_\mu} = \frac{\partial S}{\partial \pi_\rho}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\mathrm{H}(t;\ q_i;\ p_i) = \mathrm{H}^*(t;\ q_i;\ u_i)$$

и, следовательно, уравнение (1.23) перепишется так:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathrm{H}^*\left(t;\ q_\rho;\ \frac{\partial S}{\partial \pi_\rho}\right) = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.25}$$

Далее, переписывая первую группу уравнений (1.24) без изменения, а вторую группу этих уравнений умножая на $\beta_{\rho i}$ и складывая, принимая при этом во внимание формулу (1.7), получим:

$$\frac{\partial S}{\partial a_\rho} = b_\rho, \quad \frac{\partial S}{\partial \pi_\rho} = u_\rho, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.26}$$

Таким образом, получаем следующее предложение, представляющее собою обобщение теоремы Гамильтона-Якоби для голономных систем на случай неголономных координат: *Если известен полный интеграл уравнения (1.25), т. е. найдена функция $S(t;\ q_i;\ a_i)$ удовлетворяющая уравнению (1.25), то уравнения (1.26), будут представлять собою общее решение системы канонических уравнений в неголономных координатах (1.14).*

Если система неголономных координат вводится при помощи реономных пфаффовых форм (1.15), (1.16) и, следовательно, система канонических уравнений в неголономных координатах имеет вид (1.17), то уравнение Гамильтона в частных производных и теорема Якоби будут формулироваться следующим образом: *Если известен полный интеграл $S(t;\ q_i;\ a_i) + a_{n+1}$ уравнения*

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_{n+1}} + H^*\left(t;\ q_\rho;\ \frac{\partial S}{\partial \pi_\rho}\right) = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.27}$$

где

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_{n+1}} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{n} \beta_{n+1,\mu} \frac{\partial S}{\partial q_\mu},$$

то общее решение канонических уравнений (1.17) определится из равенств

$$\frac{\partial S}{\partial a_\rho} = b_\rho, \quad \frac{\partial S}{\partial \pi_\rho} = u_\rho, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n),$$

где a_ρ и b_ρ — *постоянные*. Доказательство такое же, как и для случая склерономных пфаффовых форм.

§ 5. Канонические преобразования. Канонические уравнения в неголономных координатах (1.14) обладают одним замечательным свойством, которое заключается в том, что они не изменяют своего вида при некоторых преобразованиях переменных. Для уравнений Гамильтона в истинных координатах, это свойство было открыто Якоби и формулируется в виде теоремы, принятой называть теоремой Якоби.

Далее мы обобщим на случай неголономных координат сначала более общую теорему, принадлежащую Шарлье[1], из которой теорема Якоби в неголономных координатах получается как частный случай.

Пусть имеем систему канонических уравнений (1.14), в которых H^* есть данная функция от q_i, u_i, t. Пусть $F(t;\ q_i;\ Q_i)$ будет произвольная функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, t и новых величин $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

Введем вместо переменных q_i, u_i, новые переменные Q_i, P_i при помощи уравнений:

$$u_\rho = \sum_{\mu=1}^{n} \beta_{\rho\mu} \frac{\partial F}{\partial q_\mu} = \frac{\partial F}{\partial \pi_\rho}, \quad P_\rho = -\sum_{\mu=1}^{n} \beta_{\rho\mu} \frac{\partial F}{\partial Q_\mu} = -\frac{\partial F}{\partial \Pi_\rho}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.28}$$

где $\beta_{\rho\mu}$ и $\beta^*_{\rho\mu}$ суть коэффициенты уравнений:

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\rho=1}^{n} \beta_{\rho\mu} \dot{\pi}_\rho, \quad \dot{Q}_\mu = \sum_{\rho=1}^{n} \beta^*_{\rho\mu} \dot{\Pi}_\rho, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.29}$$

причем $\beta_{\rho\mu}$ зависят от q_i, а $\beta^*_{\rho\mu}$ — от Q_i. Из уравнений (1.28) мы можем определить, например, старые переменные в функции новых и времени:

$$q_\rho = q_\rho(t;\ Q_i;\ P_i), \qquad u_\rho = u_\rho(t;\ Q_i;\ P_i), \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n).$$

Можно доказать теперь следующую теорему: *Если переменные q_ρ, u_ρ преобразованы в новые переменные Q_ρ, P_ρ, причем старые и новые переменные связаны равенствами (1.28) и, кроме того, имеют место соотношения (1.29), то дифференциальные уравнения для новых переменных также будут иметь каноническую форму и напишутся в виде*:

$$\dot{\Pi}_\rho = \frac{\partial R}{\partial P_\rho}, \quad \dot{P}_\rho = -\frac{\partial R}{\partial \Pi_\rho} + \sum_{\kappa=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \gamma^*_{\mu\kappa\rho} \frac{\partial R}{\partial P_\mu} P_\kappa, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.30}$$

где R — новая характеристическая функция, определяемая формулой:

$$R = H^* + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{1.31}$$

а $\gamma^*_{\mu\kappa\rho}$ — коэффициенты Риччи-Гамеля, т. е.

$$\gamma^*_{\mu\kappa\rho} = \sum_{l,\ \sigma=1}^{n} \beta^*_{\mu\sigma} \beta^*_{\rho l} \left(\frac{\partial \alpha^*_{\kappa\sigma}}{\partial Q_l} - \frac{\partial \alpha^*_{\kappa l}}{\partial Q_\sigma} \right),$$

где $\alpha^*_{\kappa\sigma}$ — коэффициенты уравнений:

$$\dot{\Pi}_\rho = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^*_{\rho\mu} \dot{Q}_\mu, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.32}$$

Доказательство можно провести аналогично тому, как и доказательство обычной теоремы Шарлье для истинных координат, но с учетом свойств неголономных координат. Однако, гораздо проще эту теорему получить из обычной теоремы Шарлье переходя от истинных координат к неголономным координатам.

---

[1] Мультон Ф. Р. Введение в небесную механику, 1935, стр. 392—397.

Действительно, пусть мы имеем систему канонических уравнений (1.1). Введем в эти уравнения вместо переменных q_i, p_i новые переменные Q_i, U_i, при помощи уравнений:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad U_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.33}$$

где F — произвольная функция от t, q_i, Q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда теорему Шарлье можно формулировать так: Если переменные q_i, p_i преобразованы в новые переменные Q_i, U_i, причем старые и новые переменные связаны уравнениями (1.33), то уравнения движения в новых переменных также будут иметь каноническую форму и напишутся в виде:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial R}{\partial U_i}, \quad \dot{U}_i = -\frac{\partial R}{\partial Q_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.34}$$

где функция R определяется формулой:

$$R = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{1.35}$$

Умножая теперь уравнения (1.33): первую группу на $\beta_{\rho i}$ и складывая, а вторую группу на $\beta^*_{\rho i}$ и складывая, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{\rho i} p_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_{\rho i} \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} \beta^*_{\rho i} U_i = -\sum_{i=1}^{n} \beta^*_{\rho i} \frac{\partial F}{\partial Q_i},$$

или, вводя неголономные импульсы u_ρ и P_ρ по формулам (1.7) и производные по неголономным координатам,

$$u_\rho = \frac{\partial F}{\partial \pi_\rho}, \quad P_\rho = -\frac{\partial F}{\partial \Pi_\rho}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n).$$

Кроме того, так как $H(t;\ q;\ p) = H^*(t;\ q;\ u)$ то из формулы (1.35), находим:

$$R = H^* + \frac{\partial F}{\partial t},$$

т. е. получаем формулы преобразования (1.28) и (1.31). Мы видим, таким образом, что формулы (1.28) и (1.31) получаются из формул (1.33) и (1.35) при помощи тех же преобразований переменных q_i, p_i и Q_i, U_i через переменные q_i, u_i и Q_i, P_i, как и канонические уравнения (1.14) и (1.30) в неголономных координатах получаются из соответствующих им уравнений Гамильтона (1.1) и (1.34) в истинных координатах. Но формулы (1.33) и (1.35) дают возможность найти выражения величин Q_i, U_i через q_i, p_i при таком преобразовании переменных, при котором каноническая система (1.1) переходит также в каноническую систему (1.34). Отсюда следует, что формулы (1.28) и (1.31) определяют такие преобразования переменных q_i, u_i в переменные Q_i, P_i, при которых система канонических уравнений в неголономных координатах (1.14) сохраняет свою форму, т. е. переходит тоже в канонические уравнения в неголономных координатах (1.30); что и требовалось доказать.

Эти преобразования, как видно из формул (1.28) и (1.30), зависят от выбора произвольной функции F (t; q_i; Q_i), а также от выбора систем неголономных координат π_ρ и Π_ρ, определяемых пфаффовыми формами (1.29).

В частном случае, если уравнения (1.5) (или первая группа уравнений (1. 29)) образуют вполне интегрируемую систему, то будут существовать истинные координаты $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$; тогда все величины $\gamma_{\mu k \rho}$ обращаются в нуль и уравнения (1.14) делаются обычными уравнениями Гамильтона:

$$\dot{\pi}_\rho = \frac{\partial H^*}{\partial u_\rho}, \quad \dot{u}_\rho = -\frac{\partial H^*}{\partial \pi_\rho}, \; (\rho = 1, 2, .., n). \qquad (1.36)$$

В этом случае формулы (1.28) и (1.31) определяют преобразование переменных π_i, u_i в переменные Q_i, P_i, при котором каноническая система уравнений (1.36) в истинных координатах переходит в систему канонических уравнений (1.30) в неголономных координатах (см. § 2).

Если же, наоборот, уравнения (1.5) не образуют вполне интегрируемой системы, а система уравнений (1.32) — вполне интегрируемая, то все величины $\gamma^*_{\mu k \rho} = 0$ и уравнения (1.30) обращаются в обычные уравнения Гамильтона в истинных координатах.

В этом частном случае формулы (1.28) и (1.31) дают возможность найти выражения новых переменных Π_i, P_i через старые q_i, u_i при преобразовании, при котором система канонических уравнений в неголономных координатах (1.14) переходит в обычные уравнения Гамильтона

$$\dot{\Pi}_\rho = \frac{\partial K}{\partial P_\rho}, \quad \dot{P}_\rho = -\frac{\partial R}{\partial \Pi_\rho}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.37)$$

Наконец, если параметры π_ρ и Π_ρ являются истинными координатами, то формулы (1.28) и (1.31) будут переводить одну систему Гамильтона в другую такую же систему канонических уравнений.

Допустим теперь, что функция преобразования F явно от времени не зависит, т. е. $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. В этом случае, как видно из формулы (1.31), функция R преобразованной системы получается простой подстановкой в H^* вместо q_i, u_i их выражений в функции новых переменных Q_i, P_i, полученных из уравнений (1.28). Следовательно, преобразованная система представится в виде:

$$\dot{\Pi}_\rho = \frac{\partial H^*}{\partial P_\rho}, \quad \dot{P}_\rho = -\frac{\partial H^*}{\partial \Pi_\rho} + \sum_{\kappa,\mu=1}^{n} \gamma^*_{\mu \kappa \rho} \frac{\partial H^*}{\partial P_\mu} P_\kappa, \; (\rho = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1.38)$$

т. е. преобразованная система имеет в точности такой же вид, как и первоначальная, с той же самой характеристической функцией H^* (обобщенная теорема Якоби).

В заключение следует отметить, что метод, которым мы здесь пользовались, без каких либо изменений, можно применить к обобщению на случай неголономных координат и других предложений динамики. Из изложенного ясно, что, применяя указанные выше преобразования мы из аналитической динамики голономных систем в истинных координатах легко можем получить аналитическую динамику в неголономных координатах.[1]

[1] Относительно дальнейших исследований по вопросу о применении метода неголономных координат в механике сошлемся на работу В. С. Новоселова „Применение нелинейных неголономных координат в аналитической механике" (Ученые зап. ЛГУ, № 217, механика, вып. 31, стр. 50-83, 1957 г.), в которой автор выводит уравнения движения для механических систем с голономными и нелинейными неголономными связями в нелинейных неголономных координатах.

Г Л А В А II.

ДИНАМИКА ГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ИЗБЫТОЧНЫХ (ЗАВИСИМЫХ) КООРДИНАТАХ.

§ 6. Предварительные замечания. Избыточные координаты. В этой главе мы будем заниматься исследованием теории движения несвободных материальных систем, подчиненных некоторым голономным гладким связям, положение которых определяется зависимыми переменными. В некоторых случаях введение в рассмотрение зависимых переменных вытекает из самой сущности задачи.

Если голономная механическая система $\sum$, имеющая n степеней свободы и определяемая поэтому n независимыми параметрами q_1, q_2, .., q_n, подвергается действию новых голономных связей, то это получает выражение в том, что координаты $q_1, q_2, ..., q_n$ связываются одним или несколькими уравнениями вида;

$$f_\alpha\ (t; q_1,\ q_2, ..., q_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, .., m) \quad (a)$$

которые мы можем предполагать между собою независимыми. Получаемая нами, таким образом, новая система $\sum^1$, оставаясь голономной, имеет $n-m$ степеней свободы; из уравнений (a) можно выразить m параметров q_i через остальные $n-m$, и эти последние можно принять за обобщенные координаты системы $\sum^1$. В такого рода случаях часто бывает целесообразно сохранить те же координаты q_1, $q_2, ..., q_n$ так-же и для системы $\sum^1$, но теперь они уже не будут независимыми, а будут связаны уравнениями (a). В таком случае параметры $q_1, q_2, ..., q_n$ называются избыточными координатами.[1]

В частности, для всякой голономной системы из N материальных точек, можно принять их декартовы координаты $x_1, x_2, ... x_{3N}$ за $3N$ избыточных координат; если система имеет n степеней свободы, то эти координаты будут связаны между собой $3N-n$ уравнениями вида:

$$F_\alpha\ (t;\ x_1,\ x_2, ..., x_{3N}) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, ..., 3\ N - n). \quad (в).$$

Для изучения движения несвободных материальных систем Лагранж создал два метода, а именно: метод неопределенных множителей и метод обобщенных координат. Следуя каждому из них вопрос об определении движения несвободной голономной системы сводится к

[1] См. Т. Леви-Чивита и У. Амальди. Курс теоретической механики т. 1, ч. 1 стр. 280, М., 1952 г.

составлению и интегрированию соответственно уравнений Лагранжа первого рода или уравнений Лагранжа второго рода, либо к составлению и интегрированию союзных им гамильтоновых уравнений.

Однако, уравнения движения с неопределенными множителями содержат лишние неизвестные, имеют сложный вид и могут быть проинтегрированы лишь в простейших случаях. Общая теория интегрирования этих уравнений, как известно, почти не разработана.

Что касается второго общего метода механики, основанного на применении лагранжевых уравнений второго рода, то, хотя этот метод находится в достаточном развитии, его применение к системам с избыточными координатами затруднено, ибо этот метод требует исключения „лишних" координат, что сопряжено с усложнением расчета при более или менее сложном виде уравнений связей.[1]

Поэтому возникает такой вопрос: нельзя ли так видоизменить дифференциальные уравнения движения в случае системы с избыточными координатами, чтобы можно было избежать необходимости производить операцию исключения „лишних" (зависимых) координат, как этого требует метод лагранжевых уравнений второго рода, и чтобы не вводить неопределенных множителей, как это имеет место в лагранжевых уравнениях первого рода; нельзя ли получить для связанных задач динамики такие уравнения движения, в которых „лишние" координаты остаются неисключенными и которые, несмотря на это, обладают всеми свойствами, аналогичными свойствам обычных лагранжевых уравнений второго рода?

Задаче о разыскании такого типа уравнений движения и их дальнейшему развитию посвящена эта глава. Характерная особенность этих уравнений состоит в том, что хотя они составлены в зависимых координатах, но не содержат неопределенных множителей и, следовательно, не заключают реакций. При решении связанных задач динамики такой тип уравнений может представить значительные преимущества по сравнению с классическим методом уравнений с неопределенными множителями, особенно, если при анализе задачи пользоваться общими соображениями из теории интегрирования дифференциальных уравнений. Действительно, мы увидим, что для предлагаемых нами канонических уравнений движения системы с избыточными координатами имеют место теории, аналогичные классическим теориям (Пуассона, Гамильтона-Якоби и др.) для гамильтоновых уравнений. Вполне очевидна та польза, которую можно извлечь из этих теорий для решения связанных задач динамики голономных систем.[2]

§ 7. Уравнения движения для голономных механических систем с избыточными координатами. Рассмотрим движение некоторой механической системы из N материальных точек под действием данных активных сил, стесненную гладкими голономными связями. Координаты точек системы относительно основной системы отсчета и их массы обозначим через

$$x_{3\nu-2},\ x_{3\nu-1},\ x_{3\nu},\ m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu},\quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots\ N)$$

а сумму проекций всех активных сил, действующих на точку с номером ν, — через

[1] См. конкретные примеры таких систем ниже, в главе II и приложении.

[2] Развитию уравнений Пуанкаре на случай переменных, связанных условными уравнениями, когда группа возможных перемещений интранзитивна посвящена статья Н. Г. Четаева (Н. Г. Четаев. Об уравнениях Пуанкаре, ПММ, т. 5, вып. 2, 1941 г.) Он применял иные сравнительно с предлагаемыми нами методы, и полученные им результаты формулируются иначе, чем в данной работе.

$$\overset{1}{X}_{3\nu-2},\ \overset{1}{X}_{3\nu-1},\ \overset{1}{X}_{3\nu},$$

и допустим, что связи механической системы выражаются конечными уравнениями:

$$f_\rho\ (t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{3N}\ )=0,\qquad (\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{2.1}$$

Следовательно, мы имеем голономную механическую систему с 3 N-r степенями свободы, положение которой определяется 3 N избыточными декартовыми координатами $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{3N}$

. Дифференциальные уравнения движения для рассматриваемой голономной системы с избыточными координатами возможно получить из принципа наименьшего действия Остроградского-Гамильтона:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}(\delta T_0+\sum_{i=1}^{3N}\overset{1}{X}_i\,\delta x_i)\,dt=0, \tag{2.2}$$

где $T_0=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{3N}m_i\dot{x}_i^2$ — кинетическая энергия системы. Для этого прежде преобразуем подинтегральное выражение в (2.2), исключая из него зависимые скорости $\dot{x}$ и зависимые вариации δx.

Дифференцируя уравнения (2.1) по времени, будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{3N+1}\frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}\dot{x}_i=0,\qquad (\dot{x}_{3N+1}=\dot{t}=1),\qquad (\rho=1,2,\ldots,\ r). \tag{2.3}$$

Вариации координат δx будут связаны между собой условиями:

$$\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}\delta x_i=0\qquad (\rho=1,2,\ldots,\ r). \tag{2.4}$$

Уравнения (2.3) и (2.4) дают возможность выразить скорости $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2,\ldots,\ \dot{x}_r$ и вариации $\delta x_1,\ \delta x_2,\ldots,\ \delta x_r$ через остальные скорости и вариации в виде

$$\dot{x}_\rho=\sum_{j=r+1}^{3N+1}A_{j\rho}\,\dot{x}_j,\qquad (\rho=1,\ 2,\ldots,\ r) \tag{2.5}$$

$$\delta x_\rho=\sum_{j=r+1}^{3N}A_{j\rho}\,\delta x_j,\qquad (\rho=1,\ 2,\ldots,\ r) \tag{2.6}$$

где $A_{j\rho}$ — известные функции $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{3N},\ t$.

При помощи уравнений (2.5) можно исключить из функции T_0 величины $\dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ldots,\ \dot{x}_r$, т. е. скорости соответствующие зависимым координатам $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_r$. После этого T_0 станет функцией от $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{3N},\ \dot{x}_{r+1},\ldots,\ \dot{x}_{3N}$. Преобразованную таким образом функцию T_0 мы обозначим через T. Тогда мы можем переписать уравнение (2.2) так:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{j=r+1}^{3N}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_j}\delta\dot{x}_j+\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial T}{\partial x_i}\delta x_i+\sum_{i=1}^{3N}\overset{1}{X}_i\,\delta x_i\right)dt=0. \tag{2.7}$$

Но, вследствие полной интегрируемости уравнений связей (2.5), операторы d и δ обладают свойством коммутативности, а поэтому билинейный ковариант для каждой избыточной координаты будет равен нулю, т. е.

$$\delta\frac{dx_i}{dt}-\frac{d}{dt}\delta x_i=0,\qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ 3N). \tag{2.8}$$

Имея это в виду и применяя к членам первой суммы равенства (2.7) интегрирование по частям, получим:

(2,8)

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=r+1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j \, dt = \left[\sum_{j=r+1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=r+1}^{3N} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \, dt =$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=r+1}^{3N} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \, dt, \tag{2.9}$$

так как все δx_j на концах интервала (t_0, t_1) равны нулям.

Далее, исключая из остальных двух сумм уравнения (2.7) зависимые вариации $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_r$ при помощи равенств (2.6), преобразуем их в следующие:

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial x_j} \delta x_j = \sum_{j=r+1}^{3N} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} + \sum_{\rho=1}^{r} A_{j\rho} \frac{\partial T}{\partial x_\rho} \right) \delta x_j =$$

$$= \sum_{j=r+1}^{3N} E_j(T) \delta x_j, \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{3N} X_i^1 \delta x_i = \sum_{j=r+1}^{3N} \left(X_j^1 + \sum_{\rho=1}^{r} A_{j\rho} X_\rho^1 \right) \delta x_j = \sum_{j=r+1}^{3N} X_j \delta x_j, \tag{2.11}$$

где символ $E_j(T)$ означает оператор вида:

$$E_j(T) = \frac{\partial T}{\partial x_j} + \sum_{\rho=1}^{r} A_{j\rho} \frac{\partial T}{\partial x_\rho}, \quad (j = r+1, \ldots, 3N) \tag{2.12}$$

а величина X_j, определяемая формулой

$$X_j = X_j^1 + \sum_{\rho=1}^{r} A_{j\rho} X_\rho^1, \quad (j = r+1, \ldots, 3N). \tag{2.13}$$

есть обобщенная сила, отнесенная к координате x_j.

На основании формул (2.9), (2.10) и (2.11) мы можем переписать уравнение (2.7) так:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=r+1}^{3N} \left[-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} + E_j(T) + X_j \right] \delta x_j \, dt = 0.$$

Но интервал интегрирования (t_0, t_1) произволен и вариации δx_j независимы, поэтому все коэффициенты при δx_j под интегралом должны быть нулями:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} - E_j(T) = X_j, \quad (j = r+1, \ldots, 3N). \tag{2.14}$$

Уравнения (2.14) и представляют искомые уравнения движения голономной системы с избыточными декартовыми координатами[1]. В эти уравнения не входят неизвестные реакции связей, причем число этих уравнений как раз равно числу степеней свободы системы.

[1] В дальнейшем (гл. IV, § 28) мы показываем, что уравнения типа (2.14) могут быть получены как частный случай из уравнений П. В. Воронца (П. В. Воронец, Об уравнениях движения для неголономных систем. Математический сборник т. 22, 1901 г.). Но он не придал этим уравнениям особого значения, и дальнейшее их развитие не было сделано.

Присоединяя к уравнениям (2.14) уравнения связей (2.1), будем иметь полную систему $3N$ уравнений для определения $3N$ координат x_i в функции от t.

Если будет определено движение системы, то легко могут быть найдены реакции связей. Определение реакций по заданному движению, как известно, является задачей кинетостатики.

Если на механическую систему действуют активные силы, допускающие силовую функцию U (t; x_1, x_2,..., x_{3N}), то уравнениям движения (2.14) можно придать более простой вид. В этом случае, имеем:

$$X_j = X_j^1 + \sum_{\rho=1}^{r} A_{j\rho} X_\rho^1 = \frac{\partial U}{\partial x_j} + \sum_{\rho=1}^{r} A_{j\rho} \frac{\partial U}{\partial x_\rho} =$$
$$= E_j(U), \ (j = r + 1, \dots, 3N).$$

Поэтому обозначая через $L = T + U$ кинетический потенциал, мы можем переписать уравнения движения (2.14) так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - E_j(L) = 0, \quad (j = r + 1, \dots, 3N). \tag{2.15}$$

Если механическая система дискретна и состоит из конечного числа N материальных точек, стесненных голономными связями, то можно воспользоваться декартовыми координатами и исследовать движение системы при помощи уравнений (2.15).

В случае же, когда геометрическая конфигурация голономной системы задается не декартовыми, а криволинейными избыточными координатами (как, например, в случае твердых тел и их систем), уравнения движения в избыточных координатах тоже можно получить из принципа Остроградского-Гамильтона.

Действительно, пусть голономные связи механической системы с κ степенями свободы, положение которой определяется n криволинейными координатами q_1, q_2,..., q_n, заданы $n - \kappa = m$ непроинтегрированными линейными уравнениями вида

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n+1} B_{\rho\mu} \dot{q}_\rho, \ (\dot{q}_{n+1} = \dot{t} = 1), \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \tag{2.16}$$

или равносильными им уравнениями в конечной форме:

$$f_\mu (t; \ q_1 \ q_2, \dots, q_n) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \tag{2.17}$$

где $B_{\rho\mu}$ — известные функции q_1, q_2,..., q_n, t. Вариации координат δq связаны между собой условиями:

$$\delta q_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu} \delta q_\rho, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m). \tag{2.18}$$

Вследствие наличия связей (2.17) или (2.16), все координаты q могут быть разделены на независимые и зависимые. Примем за зависимые первые m координат q_1, q_2,..., q_m, а остальные q_{m+1}, q_{m+2},..., q_n — будут независимыми. В силу уравнений (2.16) зависимые скорости $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_m$ являются линейными функциями независимых скоростей $\dot{q}_{m+1}$, $\dot{q}_{m+2}$,..., $\dot{q}_n$. Поэтому после исключения скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$,..., $\dot{q}_m$ живая сила T будет квадратичной функцией переменных $\dot{q}_{m+1}$,..., $\dot{q}_n$:

$$T = T(t; \ q_1, \ q_2, \dots, q_n; \ \dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n).$$

Если на рассматриваемую материальную систему действуют силы, имеющие силовую функцию $U(t; q_1 q_2, \dots, q_n)$, то рассуждениями аналогичными предыдущим, вводя кинетический потенциал $L(t; q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_{m+1} \dots, \dot{q}_n) = T + U$, возможно получить из принципа Остроградского-Гамильтона

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0 \qquad (2.19)$$

дифференциальные уравнения движения системы с избыточными координатами в виде:

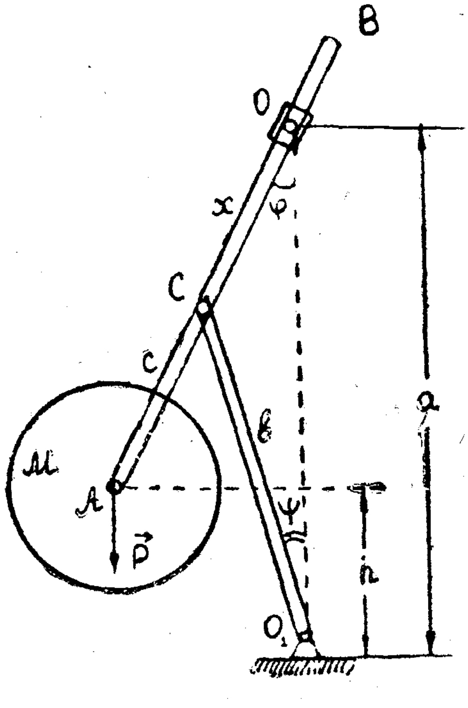
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - E_j(L) = 0, \quad (j = m+1, \dots, n), \qquad (2.20)$$

где $E_j(L)$ означает попрежнему оператор вида:

$$E_j(L) = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{\rho=1}^{m} B_{j\rho} \frac{\partial L}{\partial q_\rho}, \quad (j = m+1, \dots, n). \qquad (2.21)$$

Уравнения (2.20) вместе с уравнениями связей (2.16) или (2.17) дают систему n уравнений для определения n координат q_i в функции t.

По существу уравнения (2.20) представляют собою обобщения уравнений Лагранжа второго рода на случай голономной механической системы с избыточными координатами. Ясно, что если из функции L исключить „лишние" координаты $q_1, q_2, \dots, q_m$ при помощи уравнений (2.17), то уравнения (2.20) перейдут в обычные уравнения Лагранжа второго рода.



черт 1

§ 8. Примеры[1] *1. Паллограф как система с избыточными координатами.* В качестве первого примера для пояснения применения метода уравнений в избыточных координатах (2.20) и сравнения его с методом уравнений Лагранжа второго рода остановимся на составлении дифференциальных уравнений движения маятника в паллографе Шлика, предназначенного для записи горизонтальных вибраций корпуса корабля.

Этот маятник состоит из массивного тела M веса P, имеющего форму цилиндра, прикрепленного к концу стержня A, проходящего через поворотную трубку, которая может вращаться вокруг неподвижной оси O (таких стержней два, по одному с каж

[1] См. Е. Л. Николаи. Теоретическая механика, ч. III, ГОНТИ НКТП СССР 1939 г., §§ 11, 13, 18.

... стороны цилиндра). В точке C стержень AB сочленен шарнирно с коромыслом CO_1, вращающимся вокруг неподвижной оси O_1.

Обозначим массу цилиндра через m, его радиус инерции относительно оси A через — ρ; пусть $OO_1 = a$, $CO_1 = b$, $AC = c$. Составим уравнение колебания маятника, при этом для простоты пренебрежем массами стержней AB и CO_1, а также трением в сочленениях прибора.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы; примем за обобщенную координату угол отклонения $\varphi = q_3$ стержня AB от вертикали.

Решим нашу простую задачу сначала методом уравнений Лагранжа второго рода. Дифференциальное уравнение движение системы будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0, \quad L = T - V. \tag{2.22}$$

Нужно вычислить живую силу T и потенциальную энергию V нашей системы, представив их как функции от q_3 и $\dot{q}_3$. Для этого введем две вспомогательные (лишние) переменные: переменное расстояние $CO = x = q_1$ и угол $\psi = q_2$, образованный стержнем CO_1 с вертикалью. Тогда живая сила и потенциальная энергия системы, будут определяться формулами:

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{q}_1^2 + (c + q_1)^2 \dot{q}_3^2 + \rho^2 \dot{q}_3^2 \right], \quad V = ph =$$
$$= p\,[a - (c + q_1)\cos q_3],$$

и, следовательно,

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{q}_1^2 + (c + q_1)^2 \dot{q}_3^2 + \rho^2 \dot{q}_3^2 \right] - p\,[a - (c + q_1)\cos q_3]. \tag{2.23}$$

Остается выразить здесь q_1 и $\dot{q}_1$ через q_3 и $\dot{q}_3$. Из чертежа находим, что „лишние“ координаты q_1 и q_2 связаны с основной координатой q_3 уравнениями:

$$q_1 \cos q_3 + b \cos q_2 - a = 0, \quad q_1 \sin q_3 - b \sin q_2 = 0. \tag{2.24}$$

Отсюда можно получить, вообще говоря, величины q_1 и q_2 как функции q_3. Однако, следует отметить, что применение этого метода, требующего исключения из функции L избыточных координат и их производных, при более сложном виде уравнений связей, может привести к громоздким вычислениям и к весьма сложным уравнениям движения.

В данном случае из уравнений (2.24) легко найдем:

$$\begin{aligned} q_1 &= a \cos q_3 - \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 q_3}, \\ \dot{q}_1 &= a \sin q_3 \left[\frac{a \cos q_3}{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 q_3}} - 1 \right] \dot{q}_3. \end{aligned} \tag{2.25}$$

(перед радикалом удержали знак минус, который соответствует малым отклонениям маятника). Заменяя в выражении (2.23) величины q_1 и $\dot{q}_1$ их значениями (2.25), получим окончательно выражение для кинетического потенциала:

$$\begin{aligned} L = \frac{m}{2} \Bigg[& a^2 \sin^2 q_3 \left(\frac{a \cos q_3}{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 q_3}} - 1 \right)^2 + \\ & + \left(c + a \cos q_3 - \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 q_3} \right)^2 + \rho^2 \Bigg] \dot{q}_3^2 - \\ & - \left[a - \left(c + a \cos q_3 - \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 q_3} \right) \cos q_3 \right] p. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Уравнение (2.22) в данном случае принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\left\{m\dot{q}_3\left[a^2\sin^2 q_3\left(\frac{a\cos q_3}{\sqrt{b^2-a^2\sin^2 q_3}}-1\right)^2+\left(c+a\cos q_3-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\sqrt{b^2-a^2\sin^2 q_3}\right)^2+\rho^2\right]\right\}-m\left[a^2\sin q_3\cos q_3\left(\frac{a\cos q_3}{\sqrt{b^2-a^2\sin^2 q_3}}-1\right)^2+\right.$$
$$+\frac{a^3\sin^3 q_3(a^2-b^2)}{\sqrt{(b^2-a^2\sin^2 q_3)^3}}\left(\frac{a\cos q_3}{\sqrt{b^2-a^2\sin^2 q_3}}-1\right)+a\sin q_3\left(c+\cos q_3-\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{b^2-a^2\sin^2 q_3}\right)\left(\frac{a\cos q_3}{\sqrt{b^2-a^2\sin^2 q_3}}-1\right)\right]\dot{q}_3^2+p\sin q_3\left(c+a\cos q_3-\right.$$
$$\left.-\sqrt{b^2-a^2\sin^2 q_3}\right)-a\sin q_3\cos q_3\left(\frac{a\cos q_3}{\sqrt{b^2-a^2\sin^2 q_3}}-1\right)p=0. \quad (2.27)$$

Таково точное дифференциальное уравнение движения маятника в паллографе Шлика. В случае малых колебаний маятника уравнение (2.27) значительно упрощается и легко интегрируется.

Решим теперь ту же задачу методом уравнений с избыточными координатами (2.20). Этих уравнений будет одно:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}-E_3(L)=0, \quad (2.28)$$

причем здесь q_1 и q_2 считаются зависимыми координатами, которые связаны с основной координатой q_3 уравнениями (2.24), а символ E_3 означает выражение

$$E_3(L)=\frac{\partial L}{\partial q_3}+B_{31}\frac{\partial L}{\partial q_1}+B_{32}\frac{\partial L}{\partial q_2}.$$

Дифференцируя уравнения (2.24) по времени и затем, разрешая полученные уравнения относительно зависимых скоростей $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$, будем иметь:

$$\dot{q}_1=q_1\,\dot{q}_3\operatorname{tg}(q_2+q_3), \qquad \dot{q}_2=\frac{q_1}{b\cos(q_2+q_3)}\dot{q}_3; \quad (2.29)$$

откуда

$$B_{31}=q_1\operatorname{tg}(q_2+q_3), \quad B_{32}=\frac{q_1}{b\cos(q_2+q_3)}. \quad (2.30)$$

Кинетический потенциал L определяется прежней формулой (2.23). Но мы должны выразить теперь эту функцию только через те скорости, которые соответствуют независимым координатам, т. е. в данном случае — через $\dot{q}_3$; поэтому исключим $\dot{q}_1$ пользуясь равенством (2.29), тогда получим окончательное выражение кинетического потенциала:

$$L=\frac{m}{2}\left[q_1^2\operatorname{tg}^2(q_2+q_3)+(c+q_1)^2+\rho^2\right]\dot{q}_3^2-p\left[a-(c+q_1)\cos q_3\right].$$

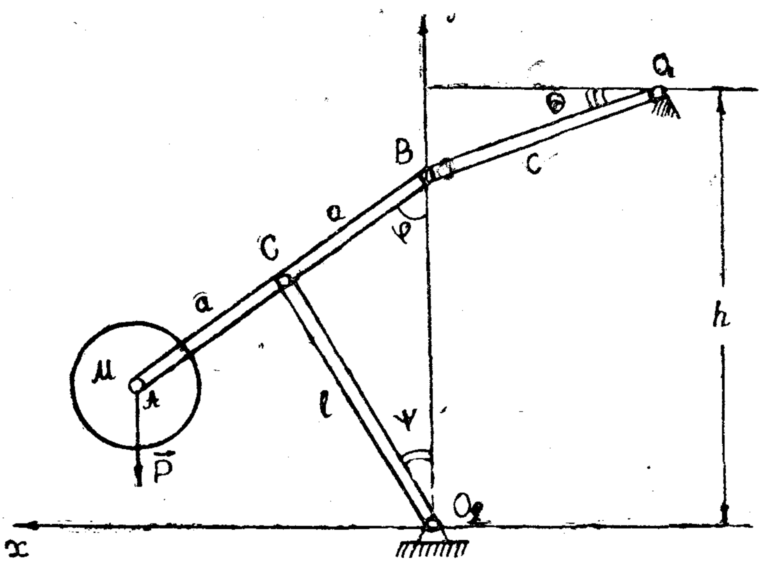
Уравнение движения (2.28) в данном случае запишется так:

$$\frac{d}{dt}\left\{m\dot{q}_3\left[q_1^2\operatorname{tg}^2(q_2+q_3)+(c+q_1)^2+\rho^2\right]\right\}-mq_1\operatorname{tg}(q_2+$$
$$+q_3)\left[\frac{2q_1}{\cos^2(q_2+q_3)}+\frac{q_1^2}{b\cos^3(q_2+q_3)}+c\right]\dot{q}_3^2+$$
$$+p(c+q_1)\sin q_3)-pq_1\cos q_3\operatorname{tg}(q_2+q_3)=0. \quad (2.31)$$

Присоединяя к этому уравнению уравнения связей (2.24), получаем полную систему трех уравнений с тремя неизвестными функциями q_1, q_2, q_3. Ясно, что уравнение движения нашего маятника в форме (2.27) можно получить из уравнения (2.31), исключив из него величины q_1 и q_2 при помощи уравнений (2.24).

2. Для второго примера рассмотрим *колебания сложного маятника*, дающего возможность получить колебания сколь угодно малой частоты. Этот маятник состоит из массивного тела M веса P, имеющего форму цилиндра, прикрепленного к концу стержня AB, соединенного шарнирно в точках B и C с коромыслами BO_1 и CO_2; оси O_1 и O_2 — неподвижны.

Обозначим массу цилиндра через m, его радиус инерции относительно оси A через — ρ; пусть $AC = CB = a$, $BO_1 = c$, $CO_2 = l$. В равновесном положении маятника стержень AB и коромысло CO_2 вертикальны, а коромысло BO_1 горизонтально, поэтому $a + l = h$.



черт 2

Составим дифференциальное уравнение колебания маятника, пренебрегая массами стержней AB, BO_1 и CO_2.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы; за обобщенную координату возьмем угол $\varphi = q_3$, образованный стержнем AB с вертикалью. Составим сначала уравнение движения маятника в форме Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0, \qquad L = T - V. \tag{2.32}$$

Нужно вычислить живую силу T и потенциальную энергию V системы, выразив их через переменные q_3 и $\dot{q}_3$. Для этого введем вспомогательные углы $\theta = q_1$ и $\psi = q_2$, образованные коромыслами BO_1 и

CO_2 соответственно с горизонталью и вертикалью. Эти избыточные координаты q_1 и q_2 связаны с основной координатой q_3 уравнениями:

$$f_1 = c\cos q_1 + a\sin q_3 - l\sin q_2 - c = 0, \qquad (2.33)$$
$$f_2 = c\sin q_1 + a\cos q_3 - l\cos q_2 - h = 0.$$

Выберем координатные оси так, как указано на чертеже. Обозначая декартовы координаты центра тяжести цилиндра A через x и y, для величин T и V будем иметь:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \rho^2\dot{q}_3^2), \quad V = mgy. \qquad (2.34)$$

Далее находим:

$$x = l\sin q_2 + a\sin q_3, \qquad y = l\cos q_2 - a\cos q_3,$$

откуда

$$\dot{x} = l\dot{q}_2\cos q_2 + a\dot{q}_3\cos q_3, \qquad \dot{y} = -l\dot{q}_2\sin q_2 + a\dot{q}_3\sin q_3.$$

Подставляя найденные значения для $\dot{x}$, $\dot{y}$, y в формулы (2.34), получим:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m [l^2\dot{q}_2^2 + 2al\,\dot{q}_2\dot{q}_3\cos(q_2+q_3) + (a^2 +$$
$$+ \rho^2)\,\dot{q}_3^2] - P(l\cos q_2 - a\cos q_3) \qquad (2.35)$$

Мы должны L представить как функцию только переменных q_3 и $\dot{q}_3$. Для этого продифференцируем по времени уравнения связей (2.33), получим:

$$-c\dot{q}_1\sin q_1 + a\dot{q}_3\cos q_3 - l\dot{q}_2\cos q_2 = 0,$$
$$c\dot{q}_1\cos q_1 - a\dot{q}_3\sin q_3 - l\dot{q}_2\sin q_2 = 0. \qquad (2.36)$$

Таким образом, мы получили систему четырех уравнений (2.33) и (2.36) для выражения величин q_1, q_2, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ через q_3 и $\dot{q}_3$. Подставляя затем найденные значения для q_2 и $\dot{q}_2$ в выражение (2.35), мы получим требуемое выражение для функции L. После этого возможно составить дифференциальное уравнение движения маятника в форме (2.32) (мы его здесь не выписываем, т.к. оно очень сложно). Мы видим, что в рассматриваемом примере метод уравнений Лагранжа второго рода приводит к большим трудностям (практически мало пригоден). Такого рода примеров можно привести сколько угодно (например, в задаче о двойном маятнике Фуко, при исследовании сложных механизмов с подвижными осями и т. д.).

Составим теперь уравнение движения маятника, рассматривая его как систему с избыточными координатами. Уравнений движения в форме (2.20) будет одно:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} - E_3(L) = 0, \quad L = T - V, \qquad (2.37)$$

где

$$E_3(L) = \frac{\partial L}{\partial q_3} + B_{31}\frac{\partial L}{\partial q_1} + B_{32}\frac{\partial L}{\partial q_2}, \qquad (2.38)$$

причем избыточные координаты q_1 и q_2 связаны с основной координатой q_3 уравнениями (2.33). Кинетический потенциал L, определяемый формулой (2.35), мы должны выразить теперь только через те скорости, которые соответствуют независимым координатам, т. е. выразить через $\dot q_3$ (сами же координаты могут содержаться в L).

Решая уравнения (2.36) относительно $\dot q_1$ и $\dot q_2$ получим:

$$\dot q_1=\frac{a\sin(q_2+q_3)}{c\cos(q_1-q_2)}\dot q_3,\qquad \dot q_2=\frac{a\cos(q_1+q_3)}{l\cos(q_1-q_2)}\dot q_3, \tag{2.39}$$

и, следовательно,

$$B_{31}=\frac{a\sin(q_2+q_3)}{c\cos(q_1-q_2)},\qquad B_{32}=\frac{a\cos(q_1+q_3)}{l\cos(q_1-q_2)}. \tag{2.40}$$

Для кинетического потенциала L получим следующее выражение:

$$L=\frac{m}{2}\frac{a^2}{\cos^2(q_1-q_2)}[\cos^2(q_1+q_3)+2\cos(q_2+q_3)\cos(q_1+$$
$$+q_3)\cos(q_1-q_2)]\,\dot q_3^2+\frac{1}{2}m(a^2+\rho^2)\dot q_3^2-P(l\cos q_2-a\cos q_3). \tag{2.41}$$

Имея функцию L в форме (2.41), теперь нетрудно составить уравнение движения (2.37). В развернутом виде это уравнение запишется так:

$$\frac{d}{dt}\left\{ma^2\left[\frac{\cos^2(q_1+q_3)}{\cos^2(q_1-q_2)}+2\frac{\cos(q_2+q_3)\cos(q_1+q_3)}{\cos(q_1-q_2)}+1\right]+\right.$$
$$\left.+m\rho^2\right\}\dot q_3+\frac{ma^2}{\cos^2(q_1-q_2)}\left[\frac{1}{2}\sin 2(q_1+q_3)+\sin(q_1+q_2+\right.$$
$$\left.+q_3)\cos(q_1-q_2)\right]\dot q_3^2+\frac{ma^2}{c}\frac{\sin^2(q_2+q_3)}{\cos^4(q_1-q_2)}[\cos(q_1+q_3)+\cos(q_2+$$
$$+q_3)\cos(q_1-q_2)]\,\dot q_3^2+\frac{ma^3}{l}\frac{\cos(q_1+q_3)}{\cos^4(q_1-q_2)}\sin(2q_1-q_2+q_3)\,\dot q_3^2+$$
$$+Pa\sin q_3-Pa\frac{\sin q_2\cos(q_1+q_2)}{\cos(q_1-q_2)}=0. \tag{2.42}$$

К этому уравнению должны быть присоединены уравнения связей (2.33). Таково точное дифференциальное уравнение движения сложного маятника. Если отклонения маятника от вертикали достаточно малы, то уравнение (2.42) сильно упрощается и легко интегрируется (см. Николаи Е. Л., Теоретическая механика, ч. III, 1939 г., § 18).

Далее, для сравнения метода уравнений (2.20) с методом лагранжевых уравнений первого рода, составим дифференциальные уравнения движения нашего сложного маятника с неопределенными множителями.

Если рассматривать маятник как систему с избыточными координатами q_1, q_2, q_3, связанными между собою уравнениями (2.33), то на основании теории множителей, принимая при этом во внимание формулу (2.35) для кинетического потенциала, мы получим уравнения движения в виде:

$$\frac{d}{dt}m[l\dot q_2+a\dot q_3\cos(q_2+q_3)]+ma\dot q_2\dot q_3\sin(q_2+q_3)=P\sin q_2-$$
$$-\lambda_1\cos q_2-\lambda_2\sin q_2,$$
$$\frac{d}{dt}m[al\dot q_2\cos(q_2+q_3)+(a^2+\rho^2)\dot q_3]-mal\dot q_2\dot q_3\sin(q_2+q_3)=$$
$$=-Pa\sin q_3+\lambda_1 a\cos q_3-\lambda_2 a\sin q_3,$$
$$0=-\lambda_1\sin q_1+\lambda_2\cos q_1. \tag{2.43}$$

Присоединив к этим уравнениям уравнения связей (2.33), будем иметь полную систему пяти уравнений для определения пяти неизвестных q_1, q_2, q_3, λ_1, λ_2. Ясно, что если из уравнений (2.43) исключить множители λ_1, λ_2, то получим некоторое уравнение в известном смысле эквивалентное уравнению движения (2.42).

Во многих задачах технической и теоретической динамики введение избыточных координат вызывается самой сущностью задачи. При решении такого рода задач метод уравнений (2.20) имеет явные преимущества по сравнению с классическим методом неопределенных множителей, так как приводит сразу к уравнениям, свободным от неопределенных множителей и не требует исключения избыточных координат.

§ 9. Связанные механические системы с циклическими координатами. Согласно § 7 движение консервативной голономной системы с к степенями свободы, геометрическая конфигурация которой задается n избыточными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, определяется дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - E_j(L) = 0, \quad (j = m+1, \ldots, n) \ (n - m = \kappa) \qquad (2.20)$$

где $L\ (t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_{m+1}, \ \dot{q}_{m+2}, \ldots, \ \dot{q}_n)$ — кинетический потенциал, а символы $E_j(L)$ — операторы вида

$$E_j(L) = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{\rho=1}^{m} B_{j\rho}\frac{\partial L}{\partial q_\rho}, \quad (j = m+1, \ldots, n) \qquad (2.21)$$

в которых $B_{j\rho}\ (t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n)$ суть коэффициенты уравнений голономных связей системы, заданных m непроинтегрированными уравнениями

$$\dot{q}_\rho = \sum_{j=m+1}^{n+1} B_{j\rho}\dot{q}_j, \ (\dot{q}_{n+1} = \dot{t} = 1), \ (\rho = 1, 2, \ldots, m). \quad (2.16)$$

В конечной форме уравнения этих связей следующие:

$$f_\rho\ (t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2.17)$$

Введем понятие циклических координат для связанной голономной механической системы, т. е. системы положение которой определяется избыточными координатами.

Координаты q_σ ($\sigma = m+1, m+2, \ldots, m+s$) назовем циклическими, если они удовлетворяют условиям: $1^\circ \ \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0$, т. е. когда координаты q_σ не входят явно в функцию L, но эта функция содержит явно соответствующие скорости $\dot{q}_\sigma$, $2^\circ B_{\sigma\rho} = 0$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m$), т. е. когда координаты q_σ не содержатся явно в уравнениях конечных связей (2.17).

Заметим сразу же, что если условия 1° и 2° имеют место, то все операторы $E_\sigma(L)$, соответствующие циклическим координатам q_σ будут равны нулю, но обратное может и не иметь места.

Таким образом для циклических координат q_σ ($\sigma = m+1, \ldots, m+s$) будем иметь:

$$E_\sigma(L) = 0, \quad (\sigma = m+1, \ldots, m+s) \qquad (2.44)$$

и поэтому уравнения движения (2.20) для этих координат примут вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = m+1, \ldots, m+s).$$

Интегрируя эти уравнения, находим s первых интегралов уравнений движения:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = c_j, \quad (j = m+1, \ldots, m+s) \tag{2.45}$$

где c_j суть произвольные постоянные; эти интегралы будем называть циклическими интегралами. Используя эти s интегралов, можно понизить порядок системы (2.20).

Для этой цели введем функцию Рауса

$$R = L - \sum_{\sigma=m+1}^{m+s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma. \tag{2.46}$$

При помощи s уравнений (2.45) можно выразить соответствующие циклическим координатам производные $\dot{q}_{m+1}$, $\dot{q}_{m+2}, \ldots$, $\dot{q}_{m+s}$ и, следовательно, R как функцию переменных:

$$t,\ q_1, \ldots, q_m,\ q_{m+s+1}, \ldots, q_n,\ \dot{q}_{m+s+1}, \ldots, \dot{q}_n,\ c_{m+1}, \ldots c_{m+s}.$$

Варьируя равенство (2.46), получим:

$$\sum_{\rho=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial q_\rho}\delta q_\rho + \sum_{j=m+s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=m+s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j + \sum_{\sigma=m+1}^{m+s} \frac{\partial R}{\partial c_\sigma}\delta c_\sigma =$$
$$= \sum_{\rho=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_\rho}\delta q_\rho + \sum_{j=m+s+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{\sigma=m+1}^{m+s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta \dot{q}_\sigma + \sum_{j=m+s+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j -$$
$$- \sum_{\sigma=m+1}^{m+s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta \dot{q}_\sigma - \sum_{\sigma=m+1}^{m+s} \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\dot{q}_\sigma. \tag{2.47}$$

Но при наличии s циклических координат q_σ, уравнения связей (2.16) и (2.17), будут иметь вид:

$$f_\rho(t;\ q_1, \ldots, q_m,\ q_{m+s+1}, \ldots, q_n) = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.17'}$$

$$\dot{q}_\rho = \sum_{j=m+s+1}^{n+1} B_{j\rho}\dot{q}_j, \quad (\rho = 1, \ldots, m), \tag{2.16'}$$

а вариации δq будут связаны между собою соотношениями:

$$\delta q_\rho = \sum_{j=m+s+1}^{n} B_{j\rho}\delta q_j, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.18'}$$

Исключая из равенства (2.47) зависимые вариации δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_m$ при помощи (2.18'), получим:

$$\sum_{j=m+s+1}^{n} E_j(R)\delta q_j + \sum_{j=m+s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j + \sum_{\sigma=m+1}^{m+s} \frac{\partial R}{\partial c_\sigma}\delta c_\sigma =$$
$$= \sum_{j=m+s+1}^{n} E_j(L)\delta q_j + \sum_{j=m+s+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j - \sum_{\sigma=m+1}^{m+s} \dot{q}_\sigma \delta c_\sigma.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых вариациях, имеем соотношения:

$$E_j(L)=E_j(R),\quad \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial R}{\partial \dot q_j},\quad (j=m+s+1,\dots, n) \tag{2.48}$$

$$\dot q_\sigma=-\frac{\partial R}{\partial c_\sigma},\quad (\sigma=m+1,\quad m+2,\dots,\quad m+s). \tag{2.49}$$

Согласно полученным соотношениям уравнения (2.20) для нециклических координат принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_j}-E_j(R)=0,\quad (j=m+s+1,\dots\ n) \tag{2.50}$$

где

$$E_j(R)=\frac{\partial R}{\partial q_j}+\sum_{\rho=1}^{m}B_{j\rho}\frac{\partial R}{\partial q_\rho},$$

т. е. получили $n-m-s$ уравнений того же типа (2.20), в которых теперь роль кинетического потенциала L играет функция Рауса R. Присоединив к уравнениям (2.50) уравнения связей (2.17′), получим полную систему $n-s$ уравнений для определения неизвестных q_1, $q_2,\dots, q_m, q_{m+s+1},\dots, q_n$. После того как проинтегрирована последняя система уравнений для нециклических координат, значения циклических координат q_σ можно будет найти из уравнений:

$$q_\sigma=-\int\frac{\partial R}{\partial c_\sigma}\,dt,\quad (\sigma=m+1,\ m+2,\dots,\ m+s). \tag{2.51}$$

Таким образом связанная динамическая задача с $\kappa=n-m$ степенями свободы и с s циклическими координатами может быть сведена к связанной динамической задаче с $n-m-s$ степенями свободы.

Замечание. Введенное выше понятие циклической координаты можно распространить и на независимую переменную $t=q_{n+1}$.

Действительно, пусть координата $q_{n+1}=t$ удовлетворяет условиям: $1°\ \frac{\partial L}{\partial q_{n+1}}=0,\quad 2°\ B_{n+1,\rho}=0\quad (\rho=1,\ 2,\dots,\ m)$.

Это значит, что функция L и уравнения связей (2.16) и (2.17) не зависят явно от времени, т. е. система склерономна.

Следовательно, в этом случае оператор

$$E_{n+1}(L)=\frac{\partial L}{\partial q_{n+1}}+\sum_{\rho=1}^{m}B_{n+1,\rho}\frac{\partial L}{\partial q_\rho}=0. \tag{2.52}$$

Покажем, что в случае склерономной системы уравнения (2.20) дают обобщенный интеграл энергии.

Имеем:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\ddot q_j+\sum_{j=m+1}^{n}E_j(L)\,\dot q_j=\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\ddot q_j+$$

$$+\sum_{j=m+1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)\dot q_j=\frac{d}{dt}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\dot q_j,$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\dot q_j-L\right]=0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = const. \tag{2.53}$$

Заметим еще, что если функция Рауса R и уравнения связей (2.17′) явно от t не зависят, то система уравнений (2.50) имеет интеграл вида

$$\sum_{j=m+s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - R = \text{const}.$$

и тогда пользуясь методом, аналогичным методу Уиттекера (Уиттекер, Аналитическая динамика, 1937, стр. 78—81), можно уменьшить число этих уравнений еще на единицу, сведя задачу в конечном счете к решению системы уравнений, аналогичной системе (2.20), но с числом уравнений $m-n-s-1$.

§ 10. Канонические уравнения движения системы в избыточных координатах. Покажем, что систему уравнений (2.20), в которых переменные q_1; $q_2,\ldots,$ q_n связаны интегрируемыми уравнениями (2.16), можно преобразовать в такую систему уравнений, которые можно будет назвать каноническими.

Введем новые переменные p_j, определяемые равенствами:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad (j = m+1,\ldots, n). \tag{2.54}$$

При помощи этой системы уравнений мы можем рассматривать величины одного из двух рядов $\dot{q}_{m+1}$, $\dot{q}_{m+2},\ldots,$ $\dot{q}_n$ и p_{m+1}, $p_{m+2},\ldots,$ p_n как функции величин другого ряда. Эта система линейна относительно скоростей $\dot{q}_j$ и всегда может быть разрешена относительно этих скоростей. Таким путем мы можем перейти к новым переменным: q_1, $q_2,\ldots,$ q_n, p_{m+1}, $p_{m+2},\ldots,$ p_n.

Уравнения (2.20) перепишутся так:

$$\dot{p}_j = E_j(L), \quad (j = m+1,\ldots, n). \tag{2.55}$$

Имея в виду уравнения (2.54), (2.55) и (2.18), вычислим вариацию L $(q_1, q_2,\ldots, q_n; \dot{q}_{m+1},\ldots, \dot{q}_n; t)$:

$$\delta L = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{j=m+1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta\dot{q}_j + E_j(L)\, \delta q_j \right] =$$

$$= \sum_{j=m+1}^{n} (p_j \delta\dot{q}_j + \dot{p}_j \delta q_j) = \delta \sum_{j=m+1}^{n} p_j \dot{q}_j + \sum_{j=m+1}^{n} (\dot{p}_j \delta q_j - \dot{q}_j \delta p_j),$$

или

$$\delta \Big[\sum_{j=m+1}^{n} p_j \dot{q}_j - L \Big] = \sum_{j=m+1}^{n} (\dot{q}_j \delta p_j - \dot{p}_j \delta q_j).$$

Если ввести теперь функцию Гамильтона

$$H(t;\, q_1,\ldots, q_n;\, p_{m+1},\ldots, p_n) = \sum_{j=m+1}^{n} p_j \dot{q}_j - L, \tag{2.56}$$

то будем иметь:

$$\delta H = \sum_{j=m+1}^{n} (\dot{q}_j \delta p_j - \dot{p}_j \delta q_j). \tag{2.57}$$

с другой стороны, варьируя функцию H и исключая зависимые вариации $\delta q_1\ \delta q_2,\dots,\ \delta q_m$ при помощи соотношений (2.18), найдем:

$$\delta H = \sum_{j=m+1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j + E_j(H)\,\delta q_j\right], \tag{2.58}$$

где введено обозначение

$$E_j(H) = \frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{\rho=1}^{m} B_{j\rho}\frac{\partial H}{\partial q_\rho}, \quad (j = m+1,\dots, n).$$

Сравнивая равенства (2.57) и (2.58), имея ввиду независимость вариаций δq_j и δp_j будем иметь уравнения движения в форме:

$$\dot q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot p_j = -E_j(H), \quad (j = m+1,\dots, n). \tag{2.59}$$

Уравнения эти можно назвать каноническими уравнениями движения системы в избыточных координатах[1]. К этим уравнениям должны быть присоединены уравнения связей (2.16) или (2.17). По существу уравнения (2.59) представляют собою обобщения канонических уравнений Гамильтона на случай голономных систем с избыточными координатами. Ясно, что если из уравнений (2.59) исключить „лишние“ коор· $q_1, q_2,\dots, q_m$ при помощи уравнений (2.17), то они обратятся в обычные уравнения Гамильтона в независимых координатах.

Уравнения (2.59) можно еще вывести вариационным путем, разыскивая *extremum* действия по Остроградскому—Гамильтону.

Действительно, из принципа Остроградского-Гамильтона следует, что для действительного движения голономной системы

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=m+1}^{n}(p_j\dot q_j - H)\,dt = 0; \tag{2.60}$$

или, развертывая вариацию и исключая зависимые вариации δq_1, $\delta q_2,\dots, \delta q_m$ при помощи уравнений (2.18),

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=m+1}^{n}\left(p_j\delta\dot q_j + \dot q_j\delta p_j - E_j(H)\,\delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j\right)dt = 0.$$

Первый член левой части равен

$$\int_{t_0}^{t_1} p_j\delta\dot q_j\,dt = \Big[p_j\,\delta q_j\Big]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\dot p_j\,\delta q_j\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\dot p_j\,\delta q_j dt,$$

так как все δq_j на концах интервала $(t_0,\ t_1)$ равны нулям. Следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=m+1}^{n}\left[\left(\dot q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\delta p_j - (\dot p_j + E_j(H)\delta q_j\right]dt = 0;$$

отсюда приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях δp_j и δq_j мы и получим уравнения (2.59).

Таким образом, выражение принципа Остроградского-Гамильтона (2.60) эквивалентно канонической системе уравнений (2.59).

---

[1] Уравнения типа (2,59) могут быть получены как частный случай из канонических уравнений движения для неголономных систем (4.19) (см. § 28, гл. IV).

Если функция H и уравнения связей (2.17) не зависят явно от времени, т. е. $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ и $B_{n+1,\rho}=0$ $(\rho=1,2,\ldots, m)$, то в этом случае система (2.59) допускает интеграл энергии

$$H(q_1, q_2\ldots, q_n; p_{m+1},\ldots, p_n)=h, \tag{2.61}$$

где h — некоторая постоянная.

§ 11. Теорема Пуассона для голономных систем с избыточными координатами. Покажем теперь, что теорема Пуассона о свойствах интегралов канонических уравнений Гамильтона[1] может быть обобщена на случай систем с избыточными координатами, т. е. зная два интеграла канонических уравнений движении (2.59) таких систем, возможно получить третий и, таким образом, в некоторых случаях получить полную систему независимых между собою интегралов, а следовательно, и определить движение системы. Во избежание длинных выкладок мы ограничимся рассмотрением лишь случая, когда уравнения связей (2.17), а следовательно, и коэффициенты $B_{j\rho}$ уравнений (2.16) не зависят явно от времени.

Введем для двух функций f_1 и f_2 от $q_1, q_2,\ldots, q_n, p_{m+1},\ldots, p_n, t$ следующее выражение, обозначая его фигурной скобкой,

$$\left\{f_1, f_2\right\}=\sum_{j=m+1}^{n}\left[E_j(f_1)\frac{\partial f_2}{\partial p_j}-\frac{\partial f_1}{\partial p_j}E_j(f_2)\right], \tag{2.62}$$

причем под символом $E_j\,(f)$ подразумевается оператор

$$E_j(f)=\frac{\partial f}{\partial q_j}+\sum_{\rho=1}^{m}B_{j\rho}\frac{\partial f}{\partial q_\rho},$$

где $B_{j\rho}$ суть коэффициенты уравнений (2.16). Выражение (2.62), которое можно назвать скобками Пуассона в избыточных координатах, обладает следующими очевидными свойствами:

$$\begin{gathered}\{f_1, f_2\}=-\{f_2, f_1\},\ \{f_1, -f_2\}=-\{f_1, f_2\},\\ \frac{\partial}{\partial t}\left\{f_1, f_2\right\}=\left\{\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right\}+\left\{f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right\}.\end{gathered} \tag{2.63}$$

Кроме того, скобки (2.62) удовлетворяют обобщенному тождеству Пуассона-Якоби, а именно:

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\}+\{f_2, \{f_3, f_1\}\}+\{f_3, \{f_1, f_2\}\}=0. \tag{2.64}$$

Доказать это тождество можно непосредственным вычислением входящих в него двойных фигурных скобок, пользуясь следующими свойствами операторов $E_j(F)$:

$$\begin{gathered}E_j\left(\frac{\partial F}{\partial p_\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial p_\rho}E_j(F),\quad E_j\,[E_\rho\,(F)]=E_\rho\,[E_j\,(F)]+\\ +\sum_{\sigma=1}^{m}\Omega_{\rho\sigma j}\frac{\partial F}{\partial q_\sigma},\\ (\rho, j=m+1,\ m+2,\ldots,\ n)\end{gathered} \tag{2.65}$$

[1] Якоби назвал эту теорему одной из замечательнейших в интегральном исчислении и считал ее наиболее глубоким открытием Пуассона (К. Г. Якоби. Лекции по динамике, 1936 г., лекция 34-я).

причем здесь все величины

$$\Omega_{\rho\sigma j} \equiv E_j(B_{\rho\sigma}) - E_\rho(B_{j\sigma}) \equiv \frac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_j} - \frac{\partial B_{j\sigma}}{\partial q_\rho} + \sum_{\mu=1}^{m}\Big(B_{j\mu}\frac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_\mu} - B_{\rho\mu}\frac{\partial B_{j\sigma}}{\partial q_\mu}\Big) = 0 \qquad (2.66)$$

при всяких ρ, σ, j так как связи (2.16) представляют собою интегрируемые уравнения.

Но вычисления, связанные с доказательством этого тождества, несмотря на свою простоту, довольно громоздки и поэтому мы их здесь не приводим.[1]

Положим теперь, что мы имеем некоторый первый интеграл $\varphi(t; q_1,\ldots, q_n; p_{m+1},\ldots, p_n) = c$ канонических ураннений (2.59), при наличии интегрируемых связей (2.16). Тогда легко убедиться, что функция φ должна удовлетворять тождественно условию:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \{\varphi, H\} \equiv 0. \qquad (2.67)$$

Действительно, беря полную производную от φ по времени t и заменяя q_i $(i=1, 2,\ldots, n)$, p_j $(j=m+1,\ldots, n)$ их выражениями из уравнений (2.59) и (2.16), будем иметь:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} + \sum_{j=m+1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{m}B_{j\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}E_j(H) \equiv 0.$$

Отсюда, вводя оператор $E_j(\varphi)$, мы и получим тождество (2.67).

Положим, что мы нашли два интеграла системы (2.59):

$$\varphi(t; q_1,\ldots, q_n; p_{m+1},\ldots, p_n) = const,$$
$$\psi(t; q_1,\ldots, q_n; p_{m+1}, \ldots, p_n) = const;$$

в таком случае равенство

$$\{\varphi, \psi\} = const \qquad (2.67')$$

выражает, вообще говоря, некоторый третий интеграл этой системы.

Для доказательства этой теоремы заметим, что если функции φ и ψ — интегралы системы (2.59), то имеем, на основании тождества (2.67),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \{\varphi, H\} \equiv 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} + \{\psi, H\} \equiv 0. \qquad (2.68)$$

Далее берем тождество Пуассона-Якоби

$$\{H, \{\varphi, \psi\}\} + \{\varphi, \{\psi, H\}\} + \{\psi, \{H, \varphi\}\} \equiv 0. \qquad (2.69)$$

С другой стороны, из (2.68) и (2.63) вытекают равенства:

$$\{\varphi, \{\psi, H\}\} = -\left\{\varphi, \frac{\partial\psi}{dt}\right\}, \quad \{\psi, \{H, \varphi\}\} = -\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \psi\right\}.$$

Следовательно, тождество (2.69) можно переписать так:

$$\{\{\varphi, \psi\}, H\} + \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \psi\right\} + \left\{\varphi, \frac{\partial\psi}{dt}\right\} \equiv 0,$$

[1] Доказательство этого тождества приводится в кандидатской диссертации моей ученицы П. Ш. Шахайдаровой „Об одном новом способе решения некоторых связанных вариационных задач" (Труды института математики и механики, АН УзССР, вып. 7, 1949).

или, согласно формуле (2.63):

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\varphi,\ \psi\}+\{\{\varphi,\ \psi\},\ H\}=0.$$

Но, на основании (2.67), последнее тождество и показывает, что $\{\varphi, \psi\}=const$ есть тоже интеграл системы (2.59).

Таким образом к каноническим уравнениям в избыточных координатах применим метод интегрирования, основанный на последовательном применении теоремы Пуассона. В частности, легко проверить, что в случае склерономных систем[1] функция H удовлетворяет тождеству (2.67). Следовательно, в этом случае система (2.59) допускает интеграл энергии $H=c$.

§ 12. О полном интеграле уравнения в частных производных первого порядка с избыточными переменными.

Пусть дано уравнение:

$$q=V(q_1,\dots,\ q_m,\ q_{m+1},\dots,\ q_n,\ q_{n+1},\ a_{m+1},\ a_{m+2},\dots,\ a_n,\ a_{n+1}), \tag{2.70}$$

правая часть которого, кроме $n+1$ переменных q_i зависит еще от $n-m+1$ произвольных постоянных a_ν. В случае, когда V есть многозначная функция, то под (2.70) будем понимать одну из ее ветвей.

Пусть, далее, переменные q_i этого уравнения связаны зависимостями вида:

$$f_\alpha(q_1,\ q_2,\dots,\ q_{n+1})=0,\quad (\alpha=1,\ 2,\dots\ m). \tag{2.71}$$

или им равносильными интегрируемыми дифференциальными уравнениями:

$$dq_\sigma=\sum_{\nu=m+1}^{n+1}B_{\nu\sigma}\,dq_\nu\quad (\sigma=1,\ 2,\dots,\ m). \tag{2.72}$$

полученными дифференцированием уравнений (2-71) и разрешением относительно зависимых dq_σ $(\sigma=1,\ 2,\dots,\ m)$. Здесь величины $B_{\nu\sigma}$ — некоторые функции от q_i, вследствие интегрируемости уравнений (2.72) удовлетворяют условиям:

$$\Omega_{\nu\sigma\rho}=E_\rho(B_{\nu\sigma})-E_\nu(B_{\rho\sigma})=0,\quad \begin{matrix}(\nu,\ \rho=m+1,\dots,\ n+1),\\ (\sigma=1,\ 2,\dots,\ m).\end{matrix}$$

Рассматривая $q=V$ как сложную функцию $q_{m+1},\ q_{m+2},\dots,\ q_{n+1}$ в которую эти аргументы входят явно и через посредство зависимых переменных $q_1,\ q_2,\dots,\ q_m$, определяемых уравнениями (2.71), найдем ее полные производные по этим аргументам. Дифференцируя (2.70) по q_ν $(\nu=m+1\dots,\ n+1)$ и имея в виду, что вследствии уравнений (2.72), $\dfrac{\partial q_\sigma}{\partial q_\nu}=\dfrac{dq_\sigma}{dq_\nu}=B_{\nu\sigma}\ (\sigma=\overline{1,\ m})$,

будем иметь:

$$p_\nu=\frac{\partial V}{\partial q_\nu}+\sum_{\sigma=1}^{m}B_{\nu\sigma}\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}=E_\nu(V),\quad (\nu=m+1,\dots,\ n+1). \tag{2.73}$$

Уравнения (2.70) и (2.73), число которых $n-m+2$ зависят от $n-m+1$ величин $a_{m+1},\ a_{m+2},\dots,\ a_{n+1}$. Значит эти величины можно из них исключить. При таком исключении может получиться одно из

[1] Для простоты склерономной системой дифференциальных уравнений мы будем называть такую систему, которая не содержит явно независимой переменной t.

двух: или после исключения $a_{m+1},\dots, a_{n+1}$ получится только одна зависимость

$$F(q_1, q_2,\dots, q_{n+1}, q, p_{m+1},\dots, p_{n+1})=0, \tag{2.74}$$

связывающая остальные переменные q_i, q, p_ν или таких зависимостей получится несколько.

В первом случае в результате исключения получится дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных (2.74), у которого переменные q_i связаны m конечными уравнениями (2.71) и для которого величина q, определяемая равенством (2.70), является решением, зависящим от $n-m+1$ произвольных постоянных. Это решение уравнения (2.74), при наличии зависимостей (2.71), мы будем называть его полным интегралом; само же уравнение (2.74) будем называть уравнением в частных производных с избыточными переменными.

Во втором случае уравнение (2.70) нужно откинуть, т. к. функция q не обладает свойствами, при которых она могла бы определить полный интеграл некоторого уравнения с избыточными переменными.

Если из $n-m+2$ уравнений (2.70) и (2.73) можно выбрать $n-m+1$ таким образом, что из них можно найти постоянные a_{m+1}, $a_{m+2},\dots, a_{n+1}$, то q есть полный интеграл уравнения (2.74). Уравнение (2.74) получается подстановкой на место $a_{m+1},\dots, a_{n+1}$ найденных их значений в неиспользованное уравнение из системы (2.70), (2.73).

Отметим еще некоторые частные случаи. Если уравнение (2.74) может быть решено относительно p_{n+1} и представлено в виде

$$p_{n+1}=f(q_1, q_2,\dots, q_{n+1}, q, p_{m+1}, \dots, p_n), \tag{2.75}$$

то уравнение (2.70) и первые $n-m$ уравнений (2.73) разрешимы относительно a_{m+1}, $a_{m+2},\dots, a_{n+1}$.

В противном случае, из этих уравнений можно было бы величины $a_{m+1},\dots,a_{n+1}$ исключить и получить уравнение не зависящее от p_{n+1}, тогда как, вследствие единственности результата исключения, полученное уравнение должно быть равносильно (2.75) и, следовательно, должно содержать p_{n+1}.

Так же, если уравнение (2.74) содержит явно q, то уравнения (2.73) разрешимы относительно $a_{m+1},\dots, a_{n+1}$; иначе их можно было бы исключить и получить уравнение, не зависящее от q.

Из разрешимости уравнений (2.73) относительно постоянных $a_{m+1},\dots, a_{n+1}$ следует, что якобиан их тождественно не равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial\,[E_{m+1}(V), E_{m+2}(V),\dots, E_{n+1}(V)]}{\partial\,(a_{m+1}, a_{m+2},\dots, a_{n+1})}=\left\| \frac{\partial}{\partial a_\rho} E_\nu(V)\right\| \neq 0. \tag{2.76}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial a_\rho} E_\nu(V)=E_\nu\left(\frac{\partial V}{\partial a_\rho}\right),$$

заключаем, что якобиан

$$\left\| E_\nu\left(\frac{\partial V}{\partial a_\rho}\right)\right\| \neq 0. \tag{2.77}$$

Отсюда можно ожидать, что система уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial a_\rho}=b_\rho\,,\ (\rho=m+1,\ m+2,\dots, n+1)$$

допускает решение относительно переменных $q_{m+1}, q_{m+2},\dots, q_{n+1}$.

Заметим еще, что когда уравнение (2.74) не содержит явно q, т.е. уравнение в частных производных имеет вид:

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}; p_{m+1}, \ldots, p_{n+1}) = 0, \qquad (2.78)$$

то исключение постоянных $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n+1}$ должно быть выполнимым при помощи одних уравнений (2.73).

В этом случае одна из произвольных постоянных будет аддитивной, т. е. будет входить в полный интеграл в качестве слагаемого; следовательно, полный интеграл уравнения (2.78) будет иметь вид:

$$q = V(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}; a_{m+1}, \ldots, a_n) + a_{n+1}. \qquad (2.79)$$

Приведем простой пример. Пусть имеем уравнение в частных производных

$$q = p_2 q_2 + p_3 q_3 + \frac{2q_1^2 q_2 + q_1(q_1 + q_3)\cos(q_1 + q_3)}{[q_2 + \cos(q_1 + q_3)]\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} +$$

$$+ \frac{q_2^2 + q_3^2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \qquad (2.80)$$

которого переменные q_1, q_2, q_3 связаны уравнением вида

$$f = q_1 q_2 + \sin(q_1 + q_3) = 0$$

или ему равносильным дифференциальным уравнением

$$dq_1 = -\frac{q_1}{q_2 + \cos(q_1 + q_3)} dq_2 - \frac{\cos(q_1 + q_3)}{q_2 + \cos(q_1 + q_3)} dq_3.$$

Входящие в уравнение (2.80) количества p_2 и p_3 выражаются так:

$$p_2 = \frac{\partial q}{\partial q_2} + B_{21}\frac{\partial q}{\partial q_1}, \quad p_3 = \frac{\partial q}{\partial q_3} + B_{31}\frac{\partial q}{\partial q_1},$$

где

$$B_{21} = -\frac{q_1}{q_2 + \cos(q_1 + q_3)}, \quad B_{31} = -\frac{\cos(q_1 + q_3)}{q_2 + \cos(q_1 + q_3)}.$$

Тогда функция q, определяемая формулой:

$$q = a_2 q_2 + a_3 q_3 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$$

где a_2, a_3 — суть произвольные постоянные, является одним из полных интегралов для уравнения (2.80); в чем можно было бы убедиться непосредственной проверкой.

§ 13. Теорема Гамильтона-Якоби для голономных систем с избыточными координатами. Покажем теперь, что теорема Гамильтона-Якоби может быть обобщена в том случае, когда для составления уравнений движения голономной системы вводятся избыточные координаты и не используются неопределенные множители[1].

Другими словами, покажем, что для канонических уравнений (2.59) можно построить некоторое уравнение в частных производных, зная полный интеграл которого, возможно получить решение этих уравнений.

---

[1] Относительно обобщения теоремы Гамильтона-Якоби на голономные системы, когда уравнения движения содержат множители связей см. Г. К. Суслов, Теоретическая механика, стр. 462—474, Гостехиздат, 1946.

Пусть S означает неизвестную функцию уравнения вида:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial S}{\partial q_\sigma}+H(t;\,q_1,\,q_2,\dots,\,q_n;\,P_{m+1},\dots,\,P_n)=0, \quad (2.81)$$

где

$$P_\nu=\frac{\partial S}{\partial q_\nu}+\sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma}\frac{\partial S}{\partial q_\sigma}\equiv E_\nu(S), \quad (\nu=m+1,\dots,\,n) \qquad (2.82)$$

а $B_{\nu\sigma}$ и $B_{n+1,\sigma}$ суть коэффициенты интегрируемых уравнений (2.16). Тогда можно доказать следующую теорему: *Если известен полный интеграл уравнения (2.81), т. е. известна функция*

$$S(q_1,\,q_2,\dots,\,q_n;\,t;\,a_{m+1},\,a_{m+2},\dots,\,a_n)+a_{n+1},$$

содержащая $n-m+1$ произвольных постоянных a_i, удовлетворяющая уравнению (2.81), то общее решение системы канонических уравнений (2.59), при наличии связей (2.16), получится из конечных уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_\nu}=b_\nu, \quad E_\nu(S)=P_\nu, \quad (\nu=m+1,\dots,\,n) \qquad (2.83)$$

где b_ν — произвольные постоянные.

Доказательство можно провести аналогично тому, как доказывал свою теорему сам Якоби, но с учётом свойств избыточных координат.

Действительно, допустим, что известен полный интеграл S уравнения (2.81); покажем тогда, что переменные q_ν и P_ν ($\nu=m+1,\dots,n$), найденные из уравнений (2.83), будут удовлетворять уравнениям (2.59) и (2.16); для этой цели достаточно убедиться в том, что, продифференцировав каждое из равенств (2.83) по времени и подставив вместо $\dot q_i$ ($i=1,\,2,\dots,\,n$) и $\dot P_\nu$ ($\nu=m+1,\dots,\,n$) их выражения из (2.59) и из (2.16), мы получим тождественные соотношения.

Дифференцируя первые $n-m$ уравнений (2.83) по времени получим:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_\nu\,\partial t}+\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial a_\nu\,\partial q_\mu}\dot q_\mu=0, \quad (\nu=m+1,\dots,\,n).$$

Заменяя в полученных равенствах $\dot q_\mu$ их выражениями из уравнений (2.59) и (2.16), будем иметь:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_\nu\,\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial^2 S}{\partial a_\nu\,\partial q_\sigma}+\sum_{\rho=m+1}^{n}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial a_\nu\,\partial q_\rho}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\sigma=1}^{m} B_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 S}{\partial a_\nu\,\partial q_\sigma}\right)\frac{\partial H}{\partial P_\rho}=0.$$

Покажем, что полученное уравнение обращается в тождество, если переменные P_ρ входящие в функцию H, заменить их значениями из уравнений (2.83). Выполняя эту замену, найдем:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_\nu\,\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial^2 S}{\partial a_\nu\,\partial q_\sigma}+\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\,[E_\rho(S)]}\,\frac{\partial\,[E_\rho(S)]}{\partial a_\nu}=0. \qquad (2.84)$$

Но левая часть этого равенства есть частная производная по a_ν от левой части уравнения (2.81), в котором неизвестная функция заменена через полный интеграл S, а потому тождественно равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial a_\nu}\left\{\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial S}{\partial q_\sigma}+H\left[t; q_1,\ldots, q_n; E_{m+1}(S),\ldots, E_n(S)\right]\right\}\equiv 0;$$

следовательно, равенство (2.84) есть тождество.

Аналогичные рассуждения применим для доказательства того же положения относительно второй группы уравнений (2.83). Дифференцируя по времени уравнения второй группы (2.83) и затем, заменяя в полученных равенствах $\dot{q}_\mu$ и $\dot{P}_\nu$ их выражениями из уравнений (2.59) и (2.16), вводя при этом для краткости оператор E_ν, получим:

$$E_{n+1}(E_\nu(S))+\sum_{\rho=m+1}^{n} E_\rho\left[E_\nu(S)\right]\frac{\partial H}{\partial P_\rho}+E_\nu(H)=0, \tag{2.85}$$

$$(\nu=m+1,\ldots, n)$$

где E_{n+1} означает оператор вида

$$E_{n+1}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial}{\partial q_\sigma}, \quad (q_{n+1}=t).$$

Но, вследствие полной интегрируемости уравнений связей (2.16), имеют место соотношения (§ 10, формула (2.65)):

$$E_\rho\left[E_\nu(S)\right]=E_\nu\left[E_\rho(S)\right], \quad (\nu=m+1,\ldots, n)\ (\rho=m+1,\ldots, n+1).$$

Следовательно, мы можем переписать равенства (2.85) так:

$$E_\nu\left[E_{n+1}(S)\right]+\sum_{\rho=m+1}^{n} E_\nu\left[E_\rho(S)\right]\frac{\partial H}{\partial P_\rho}+E_\nu(H)=0.$$

Покажем, что полученное равенство обращается в тождество, если переменные P_ρ входящие в функцию H, заменить их значениями из уравнений (2.83). Выполняя эту замену, получим:

$$E_\nu\left[E_{n+1}(S)\right]+E_\nu(H)+\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\left[E_\rho(S)\right]}E_\nu\left[E_\rho(S)\right]=0. \tag{2.86}$$

Левая часть равенства (2.86) есть операция E_ν от левой части уравнения (2.81), в котором неизвестная функция заменена через полный интеграл S, т. е,

$$E_\nu\left\{E_{n+1}(S)+H(t; q_1,\ldots, q_n; E_{m+1}(S),\ldots, E_n(S))\right\}$$

а потому тождественно равна нулю; следовательно, равенство (2.86) есть тождество. Таким образом, теорема полностью доказана.

Уравнения (2.83), число которых $2(n-m)$, содержат $2(n-m)$ произвольных постоянных a_ν, b_ν, что соответствует порядку системы канонических уравнений (2.59). Легко видеть, что уравнения (2.83) представляют собою полную систему интегралов уравнений (2.59). Действительно, система (2.83) может быть решена относительно постоянных a_ν, b_ν. Последние $n-m$ из этих постоянных выражены явно через первые $n-m$ и $q_1, q_2,\ldots, q_n$, t первыми уравнениями системы (2.83); что касается первых $n-m$ из этих постоянных, то их можно найти из последних уравнений (2.83), так как якобиан

$$\left\|\frac{\partial}{\partial a_\rho}E_\nu(S)\right\|\neq 0.$$

Таким образом, добавив к уравнениям (2.83) уравнения связей (2.17), мы получим систему $2n-m$ уравнений для определения всех q_i $(i=1, 2,..., n)$ и p_ν $(\nu=m+1,..., n)$ в функции времени t и определения всех $2(n-m)$ произвольных постоянных a_ν, b_ν (воспользовавшись, конечно, начальными данными).

Итак, мы видим, что решение связанной динамической задачи с $n-m$ степенями свободы, положение которой определяется n избыточными координатами, приводится к нахождению полного интеграла одного уравнения в частных производных первого порядка с $n-m+1$ независимыми переменными.

Если связи (2.17) явно не зависят от времени и, следовательно, коэффициенты $B_{n+1,\sigma}=0$ $(\sigma=1,..., m)$, то обобщенное уравнение Гамильтона-Якоби (2.83) переходит в следующее:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left[t;\ q_1,\ q_2,...,\ q_n;\ E_{m+1}(S),...,\ E_n(S)\right]=0. \tag{2.87}$$

Ясно, что если $S(t;\ q_1,\ q_2,...,\ q_n;\ a_{m+1},...,\ a_n)+a_{n+1}$ есть полный интеграл этого уравнения, то уравнения (2.83) будут интегралами канонической системы (2.59).

Если, кроме того, функция H явно от времени не зависит, то полагая

$$S=-ht+W(q_1,\ q_2,...,\ q_n),$$

где h — постоянная, получаем для определения функции W следующее уравнение:

$$H[q_1,\ q_2,...,\ q_n;\ E_{m+1}(W),...,\ E_n(W)]=h, \tag{2.88}$$

не содержащее переменной t. Допустим, что полный интеграл этого уравнения найден:

$$W(q_1,\ q_2,...,\ q_n;\ h,\ a_{m+1},...,\ a_{n-1})+a_n.$$

Тогда система (2.83) интегралов канонических уравнений (2.59) представится в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial h}=t-t_0,\quad \frac{\partial W}{\partial a_\rho}=b_\rho,\quad E_\nu(W)=p_\nu,\quad \begin{matrix}(\rho=m+1,...,\ n-1),\\ (\nu=m+1,...,\ n).\end{matrix} \tag{2.89}$$

К уравнениям (2.89) должны быть присоединены уравнения связей.

§ 14. Об интегрируемости уравнения Гамильтона-Якоби в избыточных координатах. Как известно, наиболее общие условия интегрируемости в квадратурах уравнения Гамильтона-Якоби, составляемого в независимых координатах для голономных систем, были предложены Т. Леви-Чивитой [1].

Можно показать, что для уравнения Гамильтона-Якоби (2.88), составленного в избыточных координатах, имеют место условия интегрируемости, аналогичные условиям Т. Леви-Чивита.

С этой целью выясним, какой вид должны иметь коэффициенты $B_{\nu\sigma}$ уравнений (2.16), чтобы уравнение (2.88) интегрировалось разделением переменных. Положим, что это уравнение допускает полный интеграл вида

$$W=\sum_{i=1}^{n} W_i(q_i,\ h,\ a_{m+1},\ a_{m+2},...,\ a_{n-1})+a_n,$$

[1] Леви-Чивита. Об интегрировании уравнения Гамильтона-Якоби разделением переменных, Mathematische Annalen, 59 (1904), стр. 383.

где h, a_{m+1}, $a_{m+2}, \ldots, a_n$ — постоянные, а W_i зависит только от одной координаты q_i. Тогда импульсы будут выражаться так:

$$p_\nu = E_\nu(W) = \frac{\partial W_\nu}{\partial q_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma} \frac{\partial W_\sigma}{\partial q_\sigma}, \quad (\nu = m+1, \ldots, n), \tag{2.90}$$

где $B_{\nu\sigma}$ суть некоторые функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Откуда получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_\nu}{\partial q_\rho} = \sum\limits_{\sigma=1}^{m} \dfrac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial q_\rho} \dfrac{dW_\sigma}{dq_\sigma}, \text{ для } \rho \neq \nu, \quad (\rho, \nu = m+1, \ldots, n) \\ \dfrac{\partial p_\nu}{\partial q_\nu} = \dfrac{d^2 W_\nu}{dq_\nu^2} + \sum\limits_{\sigma=1}^{m} \dfrac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial q_\nu} \dfrac{dW_\sigma}{dq_\sigma}, \quad (\nu = m+1, \ldots, n). \end{cases} \tag{2.91}$$

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} = \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial q_\mu} \frac{dW_\sigma}{dq_\sigma} + B_{\nu\mu} \frac{d^2 W_\mu}{dq_\mu^2}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \quad (\nu = m+1, \ldots, n). \tag{2.92}$$

Далее, так как интеграл энергии

$$H(q_1\ q_2, \ldots, q_n;\ p_{m+1}, \ldots, p_n) = h$$

при замене в нем величины p_ν из (2.90) обращается в тождество, то дифференцируя это тождество, будем иметь

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial q_\rho} + \frac{\partial H}{\partial q_\rho} = 0, \quad (\rho = m+1, \ldots, n) \tag{2.93}$$

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} + \frac{\partial H}{\partial q_\mu} = 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.94}$$

При помощи уравнений (2.91) и (2.92) можно исключить из (2.93) и (2.94) все величины $\dfrac{\partial p_\nu}{\partial q_\rho}$ и $\dfrac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu}$. Тогда мы получим n уравнений, содержащих $n+m$ величин

$$\frac{dW_\sigma}{dq_\sigma}, \quad \frac{d^2 W_i}{dq_i^2}, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, m)\ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.95}$$

подлежащих исключению. Отсюда, мы видим, что при произвольных $B_{\nu\sigma}$ получить полное обобщение критерия интегрируемости Леви-Чивита для рассматриваемого случая, вообще говоря, нельзя, так как может нехватить уравнений для исключения всех величин (2.95).

Однако, если на коэффициенты $B_{\nu\sigma}$ уравнений (2.16), при помощи которых вводятся избыточные координаты, наложить некоторые ограничения, то для уравнения Гамильтона-Якоби (2.88) возможно получить условия интегрируемости, из которых условия интегрируемости Леви-Чивита получаются как частный случай.

Положим, например, что каждый из коэффициентов $B_{\nu\sigma}$ является функцией только одной переменной q_ν, т. е.

$$B_{\nu\sigma} = B_{\nu\sigma}(q_\nu), \ (\sigma = 1, 2, \ldots, m), \quad (\nu = m+1, \ldots, n).$$

В этом случае, формулы (2.91) и (2.92) принимают более простой вид:

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\rho} = 0, \text{ для } \rho \neq \nu, \ \frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} = B_{\nu\sigma} \frac{d^2 W_\mu}{dq_\mu^2}, \quad \begin{matrix} (\rho, \nu = m+1, n) \\ (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{matrix} \tag{2.96}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 p_\nu}{\partial q_\nu \partial q_\rho}=0, \qquad \frac{\partial^2 p_\nu}{\partial q_\mu \partial q_\sigma}=0 \text{ для } \rho \neq \nu \text{ и } \mu \neq \sigma. \tag{2.97}$$

Вместо (2.93) и (2.94) можем написать:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\rho}\frac{\partial p_\rho}{\partial q_\rho}+\frac{\partial H}{\partial q_\rho}=0, \quad \sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{d^2 W_\mu}{dq_\mu^2}+$$

$$+\frac{\partial H}{\partial q_\mu}=0, \qquad \begin{array}{l}(\rho=m+1,\dots,n),\\ (\mu=1,2\dots,\ m);\end{array}$$

отсюда

$$\frac{\partial p_\rho}{\partial q_\rho}=-\frac{\dfrac{\partial H}{\partial q_\rho}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_\rho}}, \quad \frac{d^2 W_\mu}{dq_\mu^2}=-\frac{\dfrac{\partial H}{\partial q_\mu}}{\sum\limits_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu}\dfrac{\partial H}{\partial p_\nu}}, \quad \begin{array}{l}(\mu=1,\ 2,\dots,\ m),\\ (\rho=m+1,\dots,n).\end{array} \tag{2.98}$$

Дифференцируя теперь эти равенства, первое по q_λ, отличное от q_ρ, а второе по q_σ $(\sigma=1,\ 2,\dots,\ m)$, отличное от q_μ, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\rho}\frac{\partial}{\partial q_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\rho}\right)-\frac{\partial H}{\partial q_\rho}\frac{\partial}{\partial q_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\rho}\right)=0, \quad (\rho\neq\lambda), \quad (\rho,\lambda=m+1,\dots,n)$$

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\right)-\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\right)=0,$$

$$(\sigma\neq\mu), \quad (\sigma,\mu=1,\dots,\ m).$$

Раскрывая в этих равенствах производные

$$\frac{\partial}{\partial q_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\rho}\right), \quad \frac{\partial}{\partial q_\lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\rho}\right), \quad \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\right), \quad \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\right),$$

пользуясь при этом формулами (2.96) и (2.98), мы получим $\dfrac{(n-m)(n-m-1)+m(m-1)}{2}$ необходимых и достаточных условий для разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби (2.88), в виде:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_\rho \partial q_\lambda}\frac{\partial H}{\partial p_\rho}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial^2 H}{\partial q_\rho \partial p_\lambda}\frac{\partial H}{\partial p_\rho}\frac{\partial H}{\partial q_\lambda}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial q_\lambda}\frac{\partial H}{\partial q_\rho}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda}+$$

$$+\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial p_\lambda}\frac{\partial H}{\partial q_\rho}\frac{\partial H}{\partial q_\lambda}=0 \tag{2.99}$$

$$\lambda\neq\rho, \quad (\lambda,\ \rho=m+1,\ \ m+2,\dots,\ n),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_\sigma \partial q_\mu}\sum_{\nu,\lambda=m+1}^{n} B_{\nu\mu}B_{\lambda\sigma}\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\sum_{\nu,\lambda=m+1}^{n} B_{\nu\mu}B_{\lambda\sigma}\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial^2 H}{\partial q_\mu \partial p_\lambda}-$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\sum_{\nu,\lambda=m+1}^{n} B_{\nu\mu}B_{\lambda\sigma}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda}\frac{\partial^2 H}{\partial p_\nu \partial q_\sigma}+$$

$$+\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\sum_{\nu,\lambda=m+1}^{n} B_{\nu\mu}B_{\lambda\sigma}\frac{\partial^2 H}{\partial p_\nu \partial p_\lambda}=0 \tag{2.100}$$

$$\mu\neq\sigma, \quad (\mu,\sigma=1,\ 2,\dots,\ m).$$

В частном случае, когда положение механической системы определяется независимыми координатами $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$ и, следовательно, функция H зависит только от переменных $q_{m+1}, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_n$, уравнение (2.88) делается обычным уравнением Гамильтона-Якоби:

$$H(q_{m+1}, \ldots, q_n, \; p_{m+1}, \ldots, p_n) = h. \tag{2.101}$$

В этом случае, уравнения (2.100) выпадают и мы получаем только $\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$ необходимых и достаточных условий для разделения переменных в уравнении (2.101), а именно получаем соотношения (2.99), которые были предложены впервые Т. Леви-Чивитой.

§ 15. Приложение теории последнего множителя к уравнениям динамики в избыточных координатах. В задачах интегрирования уравнений динамики, теория последнего множителя Якоби находит себе одно из главнейших применений. Однако, для того, чтобы эта теория могла быть приложена с пользою, нужно знать наперед, до окончания интеграции, хотя одно значение множителя данной системы уравнений. Теория последнего множителя состоит, как известно, в следующем[1]: пусть требуется проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dt}{X}, \tag{2.102}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ суть некоторые функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$. Предположим теперь, что для системы (2.102) известны $n-1$ интегралов

$$f_\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = c_\rho, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2.103}$$

При помощи этих интегралов можно выразить величины $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ через x_n, t и окончательная интеграция системы (2.102) сведется к интеграции такого дифференциального уравнения

$$\frac{dx_n}{X_n^1} = \frac{dt}{X^1}, \tag{2.104}$$

где штрихи означают, что в функциях X_n и X величины $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ заменены их выражениями через x_n и t. Тогда, как известно, интегралом уравнения (2.104) будет равенство

$$\int \frac{M^1}{\Delta^1}(X^1 dx_n - X_n^1 dt) = const,$$

где M^1 означает одно из решений уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(MX_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(MX_2) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}(MX_n) + \frac{\partial}{\partial t}(MX) = 0, \tag{2.105}$$

а Δ^1 есть якобиан

$$\Delta = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}.$$

Функция M и называется последним множителем системы дифференциальных уравнений (2.102). Уравнение (2.105) для последнего множителя возможно переписать так:

$$\frac{d}{dt} \ln M + \frac{S}{X} = 0. \tag{2.105^1}$$

[1] Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, (1937), §§ 119—121.

где положено

$$S=\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}+\frac{\partial X}{\partial t}. \tag{2.106}$$

Если рассматриваемая система дифференциальных уравнений есть каноническая система Гамильтона, то, как легко убедиться, последним множителем этой системы будем $M=1$.

Возникает вопрос о нахождении последнего множителя для канонической системы уравнений динамики в избыточных координатах (2.59). Для этого перепишем эти уравнения в виде:

$$\frac{dq_{m+1}}{\frac{\partial H}{\partial p_{m+1}}}=\ldots=\frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}=\frac{dp_{m+1}}{-E_{m+1}(H)}=\ldots=\frac{dp_n}{-E_n(H)}=\frac{dt}{1}, \tag{2.107}$$

при этом, согласно предыдущему, координаты $q_i\,(i=1,2,\ldots\, n)$ связаны между собою m уравнениями вида

$$f_\alpha\,(t;\ q_1,\ q_2,\ldots,\ q_n)=0,\quad (\alpha=1,2,\ldots,\ m) \tag{2.17}$$

или равносильными им уравнениями в дифференциальной форме

$$\dot q_\mu=\sum_{\nu=m+1}^{n+1}B_{\nu\mu}\,\dot q_\nu,\quad (q_{n+1}=t),\quad (\mu=1,2,\ldots,\ m). \tag{2.16}$$

Для определения последнего множителя M системы уравнений (2.107) воспользуемся уравнением (2.105[1]). В данном случае, это уравнение принимает вид:

$$\frac{d\ln M}{dt}+S=0,\quad S=\sum_{\nu=m+1}^{n}\left[\frac{d}{dq_\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\right)-\frac{\partial}{\partial p_\nu}\Big(E_\nu(H)\Big)\right], \tag{2,108}$$

где $\frac{d}{dq_\nu}$ означает полную производную по $q_\nu\,(\nu=m+1,\ldots,\ n)$, причем „лишние" координаты $q_1,\ q_2,\ldots,\ q_m$ рассматриваются как функции от q_ν, определяемые из системы (2.16).

Тогда

$$\frac{d}{dq_\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\right)=\frac{\partial}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\nu}+\sum_{\sigma=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\frac{\partial q_\sigma}{\partial q_\nu}\right).$$

Но, вследствие интегрируемости связей (2.16),

$$\frac{\partial q_\sigma}{\partial q_\nu}=\frac{\partial \dot q_\sigma}{\partial \dot q_\nu}=B_{\nu\sigma},\quad (\sigma=1,\ 2,\ldots,\ m),$$

а поэтому

$$\frac{d}{dq_\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\right)=\frac{\partial}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\nu}+\sum_{\sigma=1}^{m}B_{\nu\sigma}\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\right)=\frac{\partial}{\partial p_\nu}\Big[E_\nu(H)\Big].$$

Следовательно,

$$S=0,$$

а $M=1$ есть решение уравнения (2.108), определяющего последний множитель. Таким образом, единица есть последний множитель канонических уравнений (2.59).

Отсюда мы видим, что канонические уравнения в избыточных координатах (2.59) представляют обширное поле для применения теории множителя.

Чтобы интегрирование могло считаться законченным, надо иметь $2(n-m)$ интегралов, так как порядок системы (2.59) равен $2(n-m)$; но вследствие наличия множителя 1, достаточно найти $2(n-m)-1$ независимых интегралов; последнее же интегрирование сводится к квадратуре.

§ 16. Канонические преобразования уравнений движения в избыточных координатах. Покажем, что теорема Якоби о преобразовании данной динамической системы в другую динамическую систему может быть обобщена на случай, когда для составления уравнений движения голономной механической системы вводятся избыточные координаты. Иначе, покажем, что уравнения (2.59) обладают тем свойством, что они не изменяют своего вида при некоторых преобразованиях переменных p_ν, q_i.

Пусть $F(t;\ q_1, q_2,\ldots, q_n;\ Q_1, Q_2,\ldots, Q_n)$ есть произвольная функция от $q_1, q_2,\ldots, q_n, t$ и n новых переменных $Q_1, Q_2,\ldots, Q_n$. Пусть каждая группа переменных q_i, t и Q_i, t подчинена m дифференциальным интегрируемым связям вида

$$\dot{q}_\sigma = \sum_{\nu=m+1}^{n+1} B_{\nu\sigma}\,\dot{q}_\nu,\ \dot{Q}_\sigma = \sum_{\nu=m+1}^{n+1} A_{\nu\sigma}\,\dot{Q}_\nu.\ (\dot{q}_{n+1} = \dot{Q}_{n+1} = \dot{t} = 1),$$
$$(\sigma = \overline{1,m}) \qquad (2.109)$$

где $B_{\nu\sigma}$ суть данные функции q_i, t, а $A_{\nu\sigma}$ — от Q_i, t. В конечной форме уравнения этих связей следующие:

$$f_\alpha(q_1, q_2,\ldots, q_n, t) = 0,\quad \varphi_\alpha(Q_1\ Q_2,\ldots, Q_n, t) = 0,\ (\alpha = \overline{1,m}). \qquad (2.110)$$

Введем вместо переменных $q_i (i = 1, 2,\ldots, n)$ и $p_\nu(\nu = m+1,\ldots, n)$ новые переменные $Q_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ и $P_\nu(\nu = m+1, \ldots, n)$ при помощи уравнений:

$$p_\nu = E_\nu^q(F) \equiv \frac{\partial F}{\partial q_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma}\frac{\partial F}{\partial q_\sigma},$$

$$P_\nu = -E_\nu^Q(F) \equiv -\frac{\partial F}{\partial Q_\nu} - \sum_{\sigma=1}^{m} A_{\nu\sigma}\frac{\partial F}{\partial Q_\sigma},\quad (\nu = m+1,\ldots, n) \qquad (2.111)$$

где $B_{\nu\sigma}$ и $A_{\nu\sigma}$ суть коэффициенты уравнений связей (2.109). Из уравнений (2.111) и (2.110) мы можем определить, например, старые переменные в функции новых и времени.

В § 10 мы видели, что каноническая форма уравнений (2.59) непосредственно вытекает из выражения принципа Остроградского-Гамильтона (2.60), поэтому для сохранения канонической формы уравнений после преобразования (2.111) и (2.109) необходимо, чтобы принцип Остроградского-Гамильтона в новых переменных Q_i, P_ν имел то же самое выражение, т. е. чтобы уравнение (2.60), после преобразования (2.111), при наличии связей (2.109), принимало вид

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\nu=m+1}^{n} P_\nu\,\dot{Q}_\nu - R\right)dt = 0, \qquad (2.112)$$

где роль функции Гамильтона H выполняет некоторая функция R. Далее полагая

$$R = H + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial F}{\partial q_\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{m} A_{n+1,\sigma}\frac{\partial F}{\partial Q_\sigma} \qquad (2.113)$$

и составляя полный дифференциал функции F, получим:

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i - (H - R)\, dt - \sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1, \sigma} \frac{\partial F}{\partial q_\sigma} dt -$$

$$- \sum_{\sigma=1}^{m} A_{n+1, \sigma} \frac{\partial F}{\partial Q_\sigma} dt.$$

Заменяя в этом равенстве зависимые дифференциалы dq_σ и dQ_σ ($\sigma = 1, 2, \ldots, m$) их выражениями, найденными из уравнений (2.109) будем иметь:

$$dF = \sum_{\nu = m+1}^{n} E_\nu^q (F) dq_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{n} E_\nu^Q (F)\, dQ_\nu - (H - R)\, dt$$

или, принимая во внимание формулы (2.111),

$$dF = \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu\, dq_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{n} P_\nu\, dQ_\nu - (H-R)\, dt. \qquad (2.114)$$

Мы видим, что правая часть этого равенства есть полный дифференциал. Интегрируя его в пределах от t_0 до t_1, а затем вычисляя вариацию от обеих частей, имея при этом ввиду уравнение (2.60), получим:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{\nu=m+1}^{n} P_\nu \dot{Q}_\nu - R \right) dt + \delta\, [F]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

или

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{\nu=m+1}^{n} P_\nu \dot{Q}_\nu - R \right) dt = 0,$$

т. е. получаем выражение принципа Остроградского-Гамильтона (2.112), так как на концах интервала интегрирования (t_0, t_1) функция F имеет постоянные значения, вариации которых обращаются в нуль.

Но выражение (2.112), как мы видели в § 10, при наличии второй группы уравнений (2.109), эквивалентно $2(n - m)$ уравнениям вида

$$\dot{Q}_\nu = \frac{\partial R}{\partial P_\nu}, \quad \dot{P}_\nu = - E_\nu^Q (R), \quad (\nu = m + 1, \ldots, n). \qquad (2.115)$$

К этим уравнениям должны быть присоединены уравнения связей, т. е. вторая группа уравнений (2.109) или (2.110).

Таким образом, мы получаем следующее предложение: *Если переменные q_i, p_ν преобразованы в новые переменные Q_i, P_ν причем старые и новые переменные связаны уравнениями (2.111) и, кроме того, имеют место соотношения (2.109), то дифференциальные уравнения для новых переменных также будут иметь каноническую форму (2.115), при этом новая функция Гамильтона R определяется формулой (2.113).*

Это преобразование, как видно из формул (2.111) и (2.113), зависит от выбора произвольной функции $F(t;\ q_i;\ Q_i)$, а также от выбора систем избыточных координат q_i и Q_i $(i = \overline{1,n})$, определяемых дифференциальными интегрируемыми уравнениями (2.109).

В частном случае, когда положение механической системы в новых переменных определяется независимыми координатами Q_{m+1}, Q_{m+2}, …

Q_n и, следовательно, функция R зависит только от переменных Q_{m+1}, $Q_{m+2},\dots, Q_n$, P_{m+1}, $P_{m+2},\dots, P_n$, t, а все коэффициенты $A_{\nu\sigma}=0$ ($\nu = \overline{m+1,n+1}$; $\sigma=\overline{1,m}$), уравнения (2.115) делаются обычными уравнениями Гамильтона:

$$\dot{Q}_\nu = \frac{\partial R}{\partial P_\nu}, \quad \dot{P}_\nu = -\frac{\partial R}{\partial Q_\nu}, \quad (\nu = m+1,\dots n), \tag{2.116}$$

В этом случае формулы (2.111) и (2.113), принимающие вид

$$p_\nu = \frac{\partial F}{\partial q_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma}\frac{\partial F}{\partial q_\sigma} = E_\nu^q(F), \quad P_\nu = -\frac{\partial F}{\partial Q_\nu},$$

$$(\nu = \overline{m+1,n}) \tag{2.111^1}$$

$$R = H + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial F}{\partial q_\sigma},$$

$$F = F(t;\ q_1,\dots, q_n;\ Q_{m+1},\dots, Q_n) \tag{2.113^1}$$

определяют преобразование переменных $q_1, q_2,\dots, q_n, p_{m+1},\dots, p_n$ в переменные Q_{m+1}, Q_{m+2}, Q_n P_{m+1}, $P_{m+2},\dots, P_n$, при котором каноническая система уравнений (2.59) и (2.16) в избыточных координатах переходит в каноническую систему уравнений (2.116) в независимых координатах.

Когда же, наоборот, положение механической системы в старых переменных определяется независимыми координатами $q_{m+1}, q_{m+2},\dots, q_n$, так что все величины $B_{\nu\sigma}=0$ ($\nu = m+1,\dots, n+1$; $\sigma=1,\dots, m$), а функция H зависит только от переменных $q_{m+2}, q_{m+2},\dots, q_n$, p_{m+1}, p_n, t, то уравнения (2.59) обращаются в обычные уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu}, \quad (\nu = m+1,\dots, n). \tag{2.117}$$

Тогда формулы (2.111) и (2.113), которые в данном частном случае принимают вид:

$$p_\nu = \frac{\partial F}{\partial q_\nu}, \quad P_\nu = -E_\nu^Q(F) = -\frac{\partial F}{\partial Q_\nu} - \sum_{\sigma=1}^{m} A_{\nu\sigma}\frac{\partial F}{\partial Q_\sigma},$$

$$(\sigma = \overline{m+1,n}) \tag{2.111^{11}}$$

$$R = H + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{m} A_{n+1,\sigma}\frac{\partial F}{\partial Q_\sigma},$$

$$F = F(t;\ q_{m+1},\dots, q_n;\ Q_1,\dots, Q_n), \tag{2.113^{11}}$$

определяют преобразование старых переменных q_ν, p_ν ($\nu = \overline{m+1,n}$) в новые переменные Q_i ($i = \overline{1,n}$) и P_ν ($\nu = \overline{m+1,n}$), при котором канонические уравнения в независимых координатах (2.117) переходят в канонические уравнения в избыточных координатах (2.115) (при наличии второй группы уравнений (2.109)).

Заметим еще, что произволом выбора функции F и коэффициентов $A_{\nu\sigma}$ уравнений (2.109) можно воспользоваться, например, чтобы дать другое доказательство обобщенной теоремы Гамильтона-Якоби (которая нами была доказана в § 13 прямым путем).

В самом деле, выберем функцию F и коэффициенты $A_{\nu\sigma}$ так, чтобы равенство (2.113) имело возможно более простой вид; положим, например, $R=0$ и $A_{\nu\sigma}=0$ $(\nu=\overline{m+1, n+1};\quad \sigma=\overline{1, m})$.

Из предположения $A_{\nu\sigma}=0$ следует, как мы видели, что положение механической системы в новых переменных определяется независимыми координатами $Q_{m+1}, Q_{m+2}, \ldots, Q_n$.

Но если мы предположили $R=0$ и $A_{\nu\sigma}=0$, то величина F, рассматриваемая как функция $t, q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_{m+1}, Q_{m+2}, \ldots, Q_n$ удовлетворяет условию: и $R=0$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}+H(t;\ q_1,\ q_2,\ldots,\ q_n;\ p_{m+1},\ldots,\ p_n)=0,$$

т. е. когда F, рассматриваемая как функция переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$, t, которые связаны между собой первой группой m уравнений (2.109), удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}+H\left[t;\ q_1,\ q_2,\ldots,\ q_n;\ E_{m+1}^{q}(F),\ldots,\ E_n^{q}(F)\right]=0. \quad (2.18)$$

Следовательно функция F является одним из полных интегралов для уравнения в частных производных (2.118).

Допустим, что известен полный интеграл этого уравнения с избыточными переменными, т. е. известно решение, содержащее $n-m$ произвольных постоянных наряду с аддитивной постоянной. Пусть эти постоянные будут $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$, так, что полный интеграл имеет вид:

$$F(t;\ q_1,\ q_2,\ldots,\ q_n;\ a_{m+1},\ a_{m+2},\ldots,\ a_n).$$

Преобразуем переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$ первоначальной системы (с избыточными координатами) в новые переменные $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n$ при помощи преобразования, определяемого формулами (2.111). Эти формулы в принятых обозначениях новых переменных и в силу $A_{\nu\sigma}=0$, принимают вид:

$$p_\nu=E_\nu^{q}(F)=\frac{\partial F}{\partial q_\nu}+\sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma}\frac{\partial F}{\partial q_\sigma},\qquad b_\nu=-\frac{\partial F}{\partial a_\nu},\qquad (\nu=\overline{m+1, n})\ (2.119)$$

где $B_{\nu\sigma}$ — коэффициенты уравнений (2.109) или (2.16).

Так как функция F удовлетворяет уравнению (2.118), то функция R преобразованной системы будет равна нулю и, следовательно, новыми каноническими уравнениями движения системы будут:

$$\dot a_\nu=0,\qquad \dot b_\nu=0,\qquad (\nu=m+1,\ldots,\ n) \qquad (2.120)$$

так что $a_{m+1}, \ldots, a_n, b_{m+1}, \ldots, b_n$ в течение всего движения сохраняют постоянные значения.

Отсюда следует, что если F есть полный интеграл обобщенного уравнения Гамильтона-Якоби (2.118), содержащий $n-m$ произвольных постоянных $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$, то уравнения (2.119) дают полное решение связанной динамической задачи с $n-m$ степенями свободы, положение которой определяется n избыточными координатами. Действительно, присоединяя к уравнениям (2.119) уравнения связей (2.17) или первую группу уравнений (2.110), мы получим полную систему $2n-m$ уравнений для определения всех q_i, p_ν в функции от t и $2(n-m)$ произвольных постоянных a_ν, b_ν. Следовательно, получаем теорему, доказанную выше в § 13.

§ 17. Действие по Остроградскому-Гамильтону для несвободного движения в избыточных координатах. Пусть положение голономной консервативной системы с $n-m$ степенями свободы определяется n избыточными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, связанных m уравнениями вида

$$f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.17}$$

или им равносильными дифференциальными интегрируемыми уравнениями вида:

$$\dot{q}_\sigma = \sum_{\rho=m+1}^{n+1} B_{\rho\sigma} \dot{q}_\rho, \ (\dot{q}_{n+1} = \dot{t} = 1), \ (\sigma = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.16}$$

Зависимые скорости $\dot{q}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, m)$ являются линейными функциями скоростей $\dot{q}_\rho$ $(\rho = m+1, \ldots, n)$. Поэтому кинетический потенциал L будет квадратичной функцией переменных $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_n$:

$$L = L(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n).$$

Функция, определенная равенством

$$v\left(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \overset{\circ}{q}_{m+1}, \overset{\circ}{q}_{m+2}, \ldots, \overset{\circ}{q}_n\right) = \int_{t_0}^{t} L\,dt = \int_{t_0}^{t}\left(\sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot{q}_\nu - H\right)dt, \tag{2.121}$$

где интегрирование происходит по истинной траектории механической системы, обладает рядом замечательных свойств. Функцию v будем называть действием по Остроградскому-Гамильтону в избыточных координатах.

Из определения функции v имеем:

$$\delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \overset{\circ}{q}_\nu}\delta \overset{\circ}{q}_\nu = \int_{t_0}^{t}\left[\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(p_\nu\,\delta\dot{q}_\nu + \dot{q}_\nu\,\delta p_\nu - \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\delta p_\nu\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right]dt.$$

Применяя к членам $p_\nu\,\delta\dot{q}_\nu$ интегрирование по частям, и исключая затем при помощи уравнений (2.18) зависимые вариации $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m$, получим:

$$\delta v = \sum_{\nu=m+1}^{n} E_\nu(v)\,\delta q_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial v}{\partial \overset{\circ}{q}_\nu}\delta\overset{\circ}{q}_\nu = \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu\,\delta q_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{n}\overset{\circ}{p}_\nu\,\delta\overset{\circ}{q}_\nu + \int_{t_0}^{t}\sum_{\nu=m+1}^{n}\left\{\left(\dot{q}_\nu - \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\right)\delta p_\nu - [\dot{p}_\nu + E_\nu(H)]\,\delta q_\nu\right\}dt. \tag{2.122}$$

Значек нуль обозначает, что значение соответственной переменной отнесено к начальному моменту времени t_0, а δ — вариацию, соответствующую переходу от какой-нибудь точки одной траектории к одновременной точке смежной траектории.

В равенстве (2.121), определяющем действие по Остроградскому-Гамильтону, интегрирование происходит по действительной траектории системы, поэтому в соотношении (2.122) интеграл пропадает согласно каноническим уравнениям движения (2.59):

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} E_\nu(v)\,\delta q_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \overset{\circ}{q}_\nu}\,\delta \overset{\circ}{q}_\nu = \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu\,\delta q_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{n} \overset{\circ}{p}_\nu\,\delta \overset{\circ}{q}_\nu .$$

Приравнивая множители при одинаковых вариациях δq_ν и $\delta \overset{\circ}{q}_\nu$ получим соотношения:

$$E_\nu(v) = p_\nu, \quad \frac{\partial v}{\partial \overset{\circ}{q}_\nu} = -p_\nu^0, \quad (\nu = m+1,\ m+2, \dots, n). \tag{2.123}$$

Если функция v известна, то уравнения (2.123) решают динамическую задачу. Вторая группа этих уравнений, вместе с уравнениями (2.17), определяет в неявном виде закон движения; действительно, с их помощью мы можем найти все координаты $q_i\,(i = 1, 2, \dots, n)$ как функции времени t и $2(n-m)$ произвольных постоянных $\overset{\circ}{q}_\nu$, $\overset{\circ}{p}_\nu$ $(\nu = m+1, m+2, \dots, n)$. Выведем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функции v. Из выражения (2.121) для v, находим;

$$\frac{dv}{dt} = L. \tag{2.124}$$

С другой стороны, если принять во внимание равенства (2.16) и (2.123), то можно написать:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial v}{\partial q_\sigma} + \sum_{\nu=m+1}^{n} E_\nu(v)\,\dot q_\nu = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial v}{\partial q_\sigma} + \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot q_\nu .$$

Следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial v}{\partial q_\sigma} + \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot q_\nu - L = 0.$$

Если ввести в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H(t;\ q_1, q_2, \dots, q_n;\ p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) = \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot q_\nu - L,$$

то из последнего равенства следует, согласно соотношениям (2.123) искомое уравнение в частных производных для функции v:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{n+1,\sigma}\frac{\partial v}{\partial q_\sigma} + H[t;\ q_1, q_2, \dots, q_n;\ E_{m+1}(v), \dots, E_n(v)] = 0, \tag{1.125}$$

а это не что иное, как ранее рассмотренное в §§ 13, 14, 16 обобщенное уравнение Гамильтона-Якоби. Следовательно, действие v по Остроградскому-Гамильтону в избыточных координатах является одним из полных интегралов для уравнения в частных производных (2.125).

§ 18. **Относительный интегральный инвариант.** Покажем, что соотношение[1]

$$\delta v = \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \, \delta q_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{n} \overset{\circ}{p}_\nu \, \delta \overset{\circ}{q}_\nu, \qquad (2.126)$$

установленное в § 17 для действия по Остроградскому-Гамильтону v, позволяет построить относительный интегральный инвариант для системы канонических уравнений (2.59). Действительно, рассмотрим некоторый замкнутый путь C_0 возможных перемещений ($\delta \overset{\circ}{q}_{m+1}$, $\delta \overset{\circ}{q}_{m+2}, \ldots, \delta \overset{\circ}{q}_n$) в момент t_0. Пусть C есть положение этого пути в момент времени t. Тогда интегрирование уравнения (2.126) при однозначной функции v непосредственно дает:

$$\int_C \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \, \delta q_\nu = \int_{C_0} \sum_{\nu=m+1}^{n} \overset{\circ}{p}_\nu \, \delta \overset{\circ}{q}_\nu .$$

Это уравнение показывает, что величина

$$\int \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \, \delta q_\nu \qquad (2.127)$$

есть относительный интегральный инвариант для всякой системы дифференциальных уравнений типа (2.59), при наличии конечных связей (2.17).

Кроме того, соотношение (2.126) позволяет получить канонические уравнения движения системы. Действительно, пусть момент времени t бесконечно близок к начальному моменту t_0, т. е. $t = t_0 + dt$ и, следовательно,

$$v = \left(\sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot{q}_\nu - H \right) dt, \quad \delta q_\nu^\circ = \delta q_\nu - \frac{d\delta q_\nu}{dt} dt, \quad p_\nu^\circ = p_\nu - \frac{dp_\nu}{dt} dt.$$

Тогда соотношение (2.126) с точностью до величин второго порядка относительно dt дает равенство:

$$\delta \left(\sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot{q}_\nu - H \right) dt = \sum_{\nu=m+1}^{n} \left(\dot{p}_\nu \delta q_\nu + p_\nu \frac{d}{dt} \delta q_\nu \right) dt,$$

или, сокращая на dt и пользуясь свойством $\delta \dot{q}_\nu = \frac{d}{dt} \delta q_\nu$,

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} \left(\dot{q}_\nu - \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \right) \delta p_\nu - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{\nu=m+1}^{n} \dot{p}_\nu \, \delta q_\nu .$$

Исключая отсюда зависимые вариации $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m$ при помощи уравнений (2.18), получим равенство:

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} \left(\dot{q}_\nu - \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \right) \delta p_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{n} [\dot{p}_\nu + E_\nu(H)] \, \delta q_\nu = 0,$$

из которого вследствие произвольности величин δq_ν и δp_ν непосредственно получаются канонические уравнения движения (2.59).

Следует отметить, что установленными в данной главе уравнениями движения системы в избыточных координатах и доказанными теоремами, относящимися к их интегрированию, можно пользоваться же только в том случае, когда между переменными существуют за-

[1] Н. Г. Четаев. Об уравнениях Пуанкаре. Прикладная математика и механика, т. 5, 1941, стр. 259—261. Уиттекер. Аналитическая динамика, 1937, §§ 99, 115.

висимости типа (2.17), но и тогда, когда известны некоторые вторые интегралы уравнений движения и желательно, пользуясь этими интегралами, уменьшить число независимых переменных[1].

Ясно, что доказанные здесь теоремы имеют также место тогда, когда для определения положения системы пользуются декартовыми координатами.

§ 19. Теорема Пуассона для уравнений динамики, содержащих неопределенные множители. Пусть связи, наложенные на голономную консервативную систему, положение которой определяется n избыточными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, заданы m конечными уравнениями вида

$$f_\mu (q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.128}$$

или им равносильными непроинтегрированными уравнениями вида

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu} \dot{q}_\nu, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.129}$$

где $B_{\nu\mu}$ — известные функции $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Так как уравнения (2.129) интегрируемы, то функции $B_{\nu\mu}$ тождественно удовлетворяют соотношениям:

$$E_\rho (B_{\nu\mu}) - E_\nu (B_{\rho\mu}) = 0, \quad (\rho, \nu = m+1, \ldots, n),$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.130}$$

Тогда уравнениями движения системы будут уравнения (2.59) § 10, т. е.

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = -E_\nu (H), \quad (\nu = m+1, \ldots, n) \tag{2.59}$$

где

$$H(t; q_1, q_2, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot{q}_\nu - L(t; q_1, q_2, \ldots, q_n,$$
$$\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n), \quad p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}.$$

С другой стороны, если пользоваться методом лагранжевых множителей, то уравнения движения рассматриваемой механической системы, содержащие неопределенные множители λ могут быть записаны в виде:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial u_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \dot{u}_\mu = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\mu} + \lambda_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$
$$\dot{u}_\rho = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\rho} - \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu B_{\rho\mu}, \quad (\rho = m+1, m+2, \ldots, n), \tag{2.131}$$

где

$$H_0(t; q_1, q_2, \ldots, q_n; u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \dot{q}_i - L_0(t; q_1, q_2, \ldots, q_n,$$
$$\ldots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n), \quad u_i = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i}.$$

---

[1] См. о доказательстве этого утверждения ниже, в конце § 26 гл III.

Уравнения (2.131) рассматриваются совместно с уравнениями связей (2.129), которые можно переписать так:

$$\frac{\partial H_0}{\partial u_\mu}=\sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu}\frac{\partial H_0}{\partial u_\nu}, \quad (\mu=1, 2,\dots, m). \tag{2.129'}$$

В силу этих уравнений n импульсов $u_1, u_2,\dots, u_n$ связаны между собой m условиями; следовательно, независимых из них будет только $n-m$.

Прежде чем приступить к доказательству для уравнений (2.131) теоремы, аналогичной теореме Пуассона для обычных уравнений Гамильтона, предварительно установим некоторые соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

Если из уравнений (2.131) исключить множители λ_μ, то после простых преобразований, вводя независимые импульсы p_ν, возможно получить уравнения движения системы в форме (2·59). Действительно, выполняя это исключение, получим:

$$\dot q_i=\frac{\partial H_0}{\partial u_i}, \quad \dot u_\rho+\sum_{\mu=1}^{n} B_{\rho\mu}\,\dot u_\mu=-E_\rho(H_0), \quad (i=1, 2,\dots, n), \tag{2.132}$$

$$(\rho=m+1,\dots,n).$$

Необходимо заметить, что уравнения (2.132), как полученные без использования соотношений (2.130), применимы как к голономным, так и к неголономным системам.

Далее, имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_\rho}=\frac{\partial L_0}{\partial \dot q_\rho}+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial L_0}{\partial \dot q_\mu}B_{\rho\mu}, \quad (\rho=m+1,\dots, n)$$

и, следовательно,

$$p_\rho=u_\rho+\sum_{\mu=1}^{m} B_{\rho\mu}u_\mu, \quad (\rho=m+1,\dots, n). \tag{2.133}$$

Рассматривая теперь функцию Гамильтона H_0 как результат исключения $p_{m+1}, p_{m+2},\dots, p_n$ из выражения H через посредство уравнений (2.133), получим:

$$\frac{\partial H_0}{\partial u_\rho}=\frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial u_\mu}=\sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad (\rho=m+1,\dots, n),$$

$$(\mu=1,\dots, m) \tag{2.134}$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial q_i}=\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_\rho}\frac{\partial p_\rho}{\partial q_i}=\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_{\rho=m+1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_\rho}u_\mu,$$

$$(i=1,\dots, n). \tag{2.135}$$

На основании этих формул, имеем

$$E_\rho(H_0)=E_\rho(H)+\sum_{\nu=m+1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}E_\rho(B_{\nu\mu})\frac{\partial H}{\partial p_\nu}u_\mu,$$

$$(\rho=m+1,\dots, n) \tag{2.136}$$

и замечая, что

$$\dot u_\rho+\sum_{\mu=1}^{m} B_{\rho\mu}\,\dot u_\mu=\dot p_\rho-\sum_{\nu=m+1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}E_\nu(B_{\rho\mu})\frac{\partial H}{\partial p_\nu}u_\mu, \quad (\rho=m+1,\dots, n)$$

мы приведем уравнения (2.132) к виду:

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad (\rho = m+1, \ldots, n), \quad \dot{q}_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} =$$

$$= \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu} \dot{q}_\rho, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.137}$$

$$\dot{p}_\rho = -E_\rho(H) + \sum_{\nu=m+1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \left[E_\nu(B_{\rho\mu}) - E_\rho(B_{\nu\mu})\right] \frac{\partial H}{\partial p_\nu} u_\mu,$$

$$(\rho = m+1, \ldots, n).$$

Эти уравнения принимают вид уравнений (2.59), лишь в том случае, если функции $B_{\rho\mu}$ удовлетворяют соотношениям (2.130), т. е. когда уравнения (2.129) интегрируемы, согласно предположению.

Интересно заметить, что система уравнений (2.132) должна рассматриваться совместно с уравнениями связей (2.129′). Если же эту систему заменить системой (2.137), то уравнения (2.129′) можно откинуть в случае голономных систем, т. е. когда выполняются условия (2.130).

Заметим еще, что соотношения (2.129′) вытекают как следствие из формул (2.134). Этим результатом далее мы воспользуемся для доказательства интересующей нас теоремы Пуассона для уравнений (2.131).

Пусть φ есть произвольная функция от t, $q_1, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_n$, причем переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n$ связаны уравнениями (2.129).

Если обозначить через φ_0 результат исключения величин $p_{m+1}, \ldots, p_n$ из φ через посредство уравнений (2.133), то аналогичными рассуждениями, вместо формул (2.134), (2.129¹) и (2.136) для функции Гамильтона H, мы получим для функций φ и φ_0 соотношения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_\rho} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_\rho}, \quad (\rho = m+1, \ldots, n), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_\mu} = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu} \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_\rho},$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.138}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_\mu} = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\rho}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$E_\rho(\varphi) = E_\rho(\varphi_0) - \sum_{\nu=m+1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} E_\rho(B_{\nu\mu}) \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_\nu} u_\mu,$$

$$(\rho = m+1, \ldots, n). \tag{2.139}$$

В § 11 мы видели, что для уравнений (2.59) существует обобщенная теорема Пуассона о том, что если имеется два первых интеграла

$$\varphi(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ p_{m+1}, \ldots, p_n) = \text{const},$$

$$\psi(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ p_{m+1}, \ldots, p_n) = \text{const}$$

системы уравнений (2.59), то равенство

$$\{\varphi, \psi\} \equiv \sum_{\rho=m+1}^{n} \left[E_\rho(\varphi) \frac{\partial \psi}{\partial p_\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\rho} E_\rho(\psi)\right] = \text{const} \tag{2.140}$$

будет представлять собою, вообще говоря, некоторый новый интеграл этой системы.

Чтобы получить эту теорему для уравнений (2.131), содержащих множители связей, достаточно, очевидно, ввести в равенство (2.140), при момощи уравнений (2.138) и (2.139), вместо функций φ и ψ функции φ_0 и ψ_0.

Выполняя эту замену, получим:

$$\sum_{\rho=m+1}^{n}\left[E_\rho(\varphi_0)\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}E_\rho(\psi_0)\right]+\sum_{\rho,\nu=m+1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}E_\rho(B_{\nu\mu})\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\nu}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\nu}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}\right)u_\mu=\mathrm{const}$$

или

$$\sum_{\rho=m+1}^{n}\left[E_\rho(\varphi_0)\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}E_\rho(\psi_0)\right]+\sum_{\rho,\nu=m+1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}[E_\rho(B_{\nu\mu})-$$

$$-E_\nu(B_{\rho\mu})]\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\nu}u_\mu=\mathrm{const}$$

или, принимая во внимание соотношения (2.130),

$$\sum_{\rho=m+1}^{n}\left[E_\rho(\varphi_0)\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}E_\rho(\psi_0)\right]=\mathrm{const}$$

или

$$\sum_{\rho=m+1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\rho}+\sum_{\mu=1}^{m}B_{\rho\mu}\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\mu}\right)\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial q_\rho}+\sum_{\mu=1}^{m}B_{\rho\mu}\frac{\partial\psi_0}{\partial q_\mu}\right)\right]=\mathrm{const}$$

или

$$\sum_{\rho=m+1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial q_\rho}\right)+\sum_{\mu=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\mu}\sum_{\rho=m+1}^{m}B_{\rho\mu}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\psi_0}{\partial q_\mu}\sum_{\rho=m+1}^{n}B_{\rho\mu}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}\right)=\mathrm{const}.$$

Но согласно формулам (2.138)

$$\sum_{\rho=m+1}^{n}B_{\rho\mu}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}=\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\mu},\quad \sum_{\rho=m+1}^{n}B_{\rho\mu}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\mu},\quad (\mu=1,\ 2,\ \dots,\ m)$$

и последнее уравнение перепишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_i}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\frac{\partial\psi_0}{\partial q_i}\right)\equiv(\varphi_0,\ \psi_0)=\mathrm{const}, \tag{2.141}$$

т. е. получили обычную скобку Пуассона в канонических переменных q_i, u_i $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ от функций φ_0 и ψ_0, которая во все время движения системы остается постоянной.

Итак, если $\varphi_0\ (t;\ q_i\ ;\ u_i\ )=\mathrm{const}$ *и* $\psi_0\ (t;\ q_i\ ;\ u_i\ )=\mathrm{const}$ ***суть два интеграла канонических уравнений динамики, содержащих множители связей, то скобка Пуассона***

$$(\varphi_0,\ \psi_0)=\mathrm{const}$$

выражает, вообще говоря, некоторый новый интеграл этих канонических уравнений.

Таким образом к гамильтоновым уравнениям с множителями связей (2.131) применим метод интеграции, основанный на последовательном применении теоремы Пуассона.

Выше было дано обобщение теоремы Пуассона для уравне (2.131) косвенным путем, исходя из ранее доказанной аналогич теоремы для уравнений (2.59). Однако, соотношения

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\mu} - \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho} = 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial u_\mu} - \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho} = 0,$$

$$(\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \qquad (2.1$$

существующие для функций φ_0 (t; q_i ; u_i) и ψ_0 (t; q_i ; u_i), получ ные из произвольных функций φ (t; q_i ; p_ν) и ψ (t; q_i;p_ν) при личии уравнений (2.129) и зависимостей (2.133), позволяют доказ для уравнений (2.131) теорему Пуассона прямым путем. Дейст тельно, положим, что нам известны два интеграла системы урав ний (2.131):

$$\varphi_0\ (t;\ q_i\ ;\ u_i\ ) = c_1, \quad \psi_0\ (t;\ q_i\ ;\ u_l\ ) = c_2. \qquad (2.1$$

Докажем, что соотношение

$$(\varphi_0,\ \psi_0) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial u_i} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial q_i}\right) = \mathrm{const}$$

выражает собою некоторый третий интеграл рассматриваемой систе дифференциальных уравнений.

Для доказательства этой теоремы составим производную по вр мени выражения (φ_0, ψ_0) и удостоверимся, что она равна нулю; име

$$\frac{d}{dt}(\varphi_0,\ \psi_0) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial u_i} + \frac{\partial\psi_0}{\partial u_i}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial q_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\psi_0}{\partial q_i}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\right). \qquad (2.14$$

Но так как φ_0 и ψ_0 являются интегралами системы уравнений (2.131 то $\frac{d\varphi_0}{dt}$ и $\frac{d\psi_0}{dt}$, если принять во внимание эти уравнения, тождествен равны нулю, и тогда мы имеем

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial u_i} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial q_i}\right) + \sum_{\mu=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\mu} - \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}\right)\lambda_\mu \equiv 0,$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial u_i} - \frac{\partial\psi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial H}{\partial q_i^0}\right) + \sum_{\mu=1}^{u}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\mu} - \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}\right)\lambda_\mu \equiv 0,$$

или, имея ввиду соотношения (2.142),

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial u_i} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial q_i}\right) \equiv 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial u_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\psi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial q_i}\right) \equiv 0. \qquad (2.145$$

Дифференцируя эти два уравнения по q_j и u_j получим

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial q_i\,\partial q_j}\,\frac{\partial H_0}{\partial u_i} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\,\partial q_j} - \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial u_i\,\partial q_j}\,\frac{\partial H_0}{\partial q_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\,\partial q_j}\right) = 0, \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t\partial u_j}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial q_i\,\partial u_j}\,\frac{\partial H_0}{\partial u_i}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\,\partial u_j}-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial u_i\,\partial u_j}\,\frac{\partial H_0}{\partial q_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\,\partial u_j}\right)=0 \qquad (2.146)$$

и два аналогичных уравнения для функции ψ_0.

Кроме того, вычисляя величины $\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_j}$ и $\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_j}$, принимая при этом во внимание уравнения (2.131) и соотношения (2.142), мы получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_j}=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial q_j\,\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial q_j\,\partial q_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial u_i}-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial q_j\,\partial u_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial q_i}\right)+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_j}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\nu}\,\lambda_\mu,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_j}=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial u_j\,\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial u_j\,\partial q_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial u_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial u_j\,\partial u_i}\,\frac{\partial H_0}{\partial q_i}\right),\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (2.147)$$

На основании этих соотношений мы можем переписать уравнения (2.146) так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\,\partial q_j}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\,\partial q_j}\right)+\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_j}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\nu}\,\lambda_\mu,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_j}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\,\partial u_j}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\,\partial u_j}\right),\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n); \qquad (2.148)$$

точно так же и для функции ψ_0 мы будем иметь

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi_0}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial\psi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\,\partial q_j}+\frac{\partial\psi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\,\partial q_j}\right)+\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_j}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\nu}\,\lambda_\mu,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_j}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial\psi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\,\partial u_j}+\frac{\partial\psi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\,\partial u_j}\right),\quad (j=1,\ 2,\ldots,n). \qquad (2.149)$$

Подставляя в уравнение (2.144) вместо $\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi_0}{\partial q_i}$ и $\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_i}$ их выражения из (2.148) и (2.149), получим

$$\frac{d}{dt}(\varphi_0,\ \psi_0)=\sum_{j,i=1}^{n}\left(-\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_j}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\,\partial u_j}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_j}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\,\partial u_j}-\right.$$

$$-\frac{\partial\psi_0}{\partial u_j}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\,\partial q_j}+\frac{\partial\psi_0}{\partial u_j}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\,\partial q_j}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_j}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\,\partial q_j}-$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_j}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\,\partial q_j}+\frac{\partial\psi_0}{\partial q_j}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 H}{\partial u_i\,\partial u_j}-\frac{\partial\psi_0}{\partial q_j}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\,\partial u_j}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial u_j}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\nu}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_j}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\nu}\right)\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_j}\,\lambda_\mu,$$

или, замечая, что все члены содержащие вторые производные функции H_0 попарно друг друга уничтожают,

$$\frac{d}{dt}(\varphi_0, \psi_0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n} \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial u_j}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\nu} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_j}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\nu}\right)\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_j}\lambda_\mu,$$

или, разбивая сумму по j на две суммы,

$$\frac{d}{dt}(\varphi_0, \psi_0) = \sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n} \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\sigma}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\nu} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\sigma}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\nu}\right)\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\sigma}\lambda_\mu +$$

$$+ \sum_{\rho=m+1}^{m} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n} \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\nu} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\nu}\right)\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\rho}\lambda_\mu.$$

Заменяя в правой части полученного равенства $\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\sigma}$ и $\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\sigma}$ $(\sigma = \overline{1,m})$ их выражениями из соотношений (2.142), получим:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_0, \psi_0) = \sum_{\rho=m+1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n} \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\nu} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial u_\nu}\right) E_\rho(B_{\nu\mu})\lambda_\mu =$$

$$= \sum_{\rho=m+1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial\psi_0}{\partial u_\rho}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_\nu}\left[E_\rho(B_{\nu\mu}) - E_\nu(B_{\rho\mu})\right]\lambda_\mu. \qquad (2.150)$$

Отсюда в силу условий (2.130), выражающих интегрируемость уравнений (2.129), мы получим

$$\frac{d}{dt}(\varphi_0, \psi_0) = 0$$

и, следовательно, $(\varphi_0, \psi_0) = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Если связи (2.129), наложенные на механическую систему, мы предположим неголономными, т. е. уравнения связей неинтегрируемы, то для таких систем, как это видно из уравнения (2.150), приведенная здесь теорема Пуассона не имеет места.

Рассмотрим частный случай, когда функция H_0 не зависит явно от времени. Пусть $\varphi_0(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ u_1, \ldots, u_n) = a$ есть известный первый интеграл системы (2.131) и, следовательно, имеет место тождество

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + (\varphi_0, H_0) \equiv 0.$$

Тогда имеем, беря частную производную по t от этого тождества,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial t},\ H_0\right) \equiv 0 \qquad (2.151)$$

соотношение которое показывает, что $\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} = \text{const}$ есть также интеграл системы уравнений (2.131). Ясно, что аналогичное предложение имеет также место и для канонической системы (2.59) (конечно, при условии, что функция H не зависит явно от t).

ГЛАВА III

ОБ ИНТЕГРАЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГОЛОНОМНЫХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

§ 20. **Введение.** Вопрос об определении движения голономной неконсервативной механической системы может быть решен двояким путем: или интегрированием уравнений движения в избыточных координатах, а именно уравнений Лагранжа первого рода и уравнений без неопределенных множителей, или интегрированием уравнений типа Лагранжа второго рода в независимых координатах. Однако, теория этих уравнений для неконсервативных механических систем, даже голономных, почти не разработана: их интеграция, изучение интегралов и т. д. Между тем как вполне очевидна та польза, которую могла бы принести подобная теория для решения задач динамики неконсервативных систем, тем более, что неконсервативные системы часто встречаются в приложениях.

Исследованы лишь отдельные вопросы, относящиеся к интегрированию уравнений движения неконсервативных систем. Сюда относится, например, разработанная К. Якоби теория последнего множителя (К. Якоби. Лекции по динамике, ОНТИ, 1936). Бертран решил вопрос об определении сил, действующих на голономную неконсервативную систему, если известен один из ее интегралов (Уиттекер. Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937, § 151). Укажем еще на статью Б. В. Булгакова (О преобразовании уравнений неконсервативных систем. ДАН СССР, т. XLIV, № 3, 1944), в которой он рассматривает вопрос о преобразовании уравнений движения голономных неконсервативных систем и приложении полученных результатов к вычислению возмущений. Назвав еще статью В. М. Татевского (О некоторых формах уравнений динамики и их приложениях. ЖЭТФ, т. 17, вып. 6, 1947), в которой даются уравнения движения неконсервативных систем в пространстве импульсов и исследуются неголономные системы, мы можем сказать, что перечислили почти весь материал, имеющийся по данному вопросу.

В данной главе мы рассматриваем некоторые вопросы теории движения голономных неконсервативных систем, относящиеся к интегрированию их уравнений движения. В частности, расширяя исходную систему уравнений движения, путем введения избыточных переменных, мы устанавливаем для голономных неконсервативных систем теорему, аналогичную классической теореме Пуассона для голономных консервативных систем.

§ 21. **Распространение метода Рауса на голономные неконсервативные механические системы.** Как известно, циклической координатой голономной консервативной системы называется координата, входящая в кинетический потенциал $L\,(t;\ q;\ \dot{q})$ только своей производной; явно, следовательно, эта координата в Δ не содержится. Раус (Routh) показал, что в таком случае число уравнений движения голономной консервативной системы можно уменьшить на число циклических координат (см., например, Уиттекер, Аналитическая динамика, § 38, 1937).

Покажем, что метод Рауса (приведения уравнений движения к меньшему числу) в несколько измененном виде имеет место также и для голономных неконсервативных систем.

Пусть T — кинетическая энергия системы, а $Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_n\delta q_n$ работа приложенных к ней активных сил при произвольно выбираемом перемещении $(\delta q_1, \ldots, \delta q_n)$, где T, Q_1, Q_2, ..., Q_n суть известные функции от t, q_1, q_2, ..., q_n, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_n$. Тогда уравнения движения системы могут быть записаны в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\,, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.1}$$

Может случиться, что некоторые обобщенные координаты, например, q_1, q_2, ..., q_m $(m \leqslant n)$, не входят явно в функцию T, но эта функция содержит соответствующие скорости $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_m$, и, кроме того, соответствующие этим координатам обобщенные силы Q_1, Q_2, ..., Q_m являются или только функциями от времени t или величинами постоянными; остальные обобщенные силы Q_{m+1}, Q_{m+2}, ..., Q_n тоже не зависят явно от координат q_1, q_2, ..., q_m, но могут зависеть от их производных $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_m$. Такого рода координаты голономной системы мы условимся называть *циклическими*.

Уравнения движения (3.1) для циклических координат дают:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} = Q_\mu\,, \quad (\mu = 1,\ \ldots,\ m).$$

Другими словами, для циклических координат существуют первые интегралы:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} = \int Q_\mu\,dt + c_\mu\,, \quad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{3.2}$$

где через c_μ обозначены постоянные интегрирования; эти интегралы мы будем называть *циклическими интегралами.*

Используя эти m интегралов, можно понизить порядок системы (3.1). Выразив из уравнений (3.2) производные циклических координат $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_m$ в функции остальных нециклических координат q_{m+1}, q_{m+2}, ..., q_n, их производных $\dot{q}_{m+1}$, ..., $\dot{q}_n$ и произвольных постоянных c_1, c_2, ..., c_m, подставим найденные выражения вместо $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_m$ в кинетическую энергию T и обобщенные силы Q_i $(i = m+1, \ldots, n)$. Называя результат подстановки через T^* и Q_i^*, имеем:

$$T\,(t;\ q_{m+1}, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = T^*\,(t;\ q_{m+1}, \ldots, q_n;\ \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n;\ c_1, \ldots, c_m), \tag{3.3}$$

$$Q_i\,(t;\ q_{m+1}, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = Q_i^*\,(t;\ q_{m+1}, \ldots, q_n;\ \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n;\ c_1, \ldots, c_m).$$

Для преобразования оставшихся $n-m$ уравнений (3.1) нам необходимо составить выражения:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=m+1, \quad m+2, \ ..., \ n). \tag{3.4}$$

Обращаясь к тождеству (3.3) и имея в виду, что циклические скорости $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_m$ являются функциями от нециклических координат и их производных, будем иметь:

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial q_i}, \quad (i=m+1, \ ..., \ n)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=m+1, \ ..., \ n)$$

или, принимая во внимание интегралы (3.2),

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{m}\left(\int Q_\mu\, dt+c_\mu\right)\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial q_i}, \quad (i=m+1, \ ..., \ n)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}+\sum_{\mu=1}^{m}\left(\int Q_\mu\, dt+c_\mu\right)\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=m+1, \ ..., \ n).$$

Откуда, имея в виду что выражения в скобках не зависят от величин q_i, $\dot{q}_i$ $(i=m+1, \ ..., \ n)$, будем иметь:

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{\mu=1}^{m}\left(\int Q_\mu\, dt+c_\mu\right)\dot{q}_\mu, \quad (i=m+1, \ ..., \ n)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sum_{\mu=1}^{m}\left(\int Q_\mu\, dt+c_\mu\right)\dot{q}_\mu, \quad (i=m+1, \ ..., \ n)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left[T^*-\sum_{\mu=1}^{m}\left(\int Q_\mu\, dt+c_\mu\right)\dot{q}_\mu\right]=\frac{\partial R}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[T^*-\sum_{\mu=1}^{m}\left(\int Q_\mu\, dt+c_\mu\right)\dot{q}_\mu\right]=\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=m+1, \ ..., \ n), \tag{3.5}$$

если ввести новую функцию R при помощи равенства

$$R=T^*-\sum_{\mu=1}^{m}\left(\int Q_\mu\, dt+c_\mu\right)\dot{q}_\mu. \tag{3.6}$$

Согласно полученным соотношениям (3.5) и (3.3) уравнения движения (3.1) для нециклических координат приобретают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial R}{\partial q_i}=Q_i^*, \quad (i=m+1, \ ..., \ n). \tag{3.7}$$

Таким образом, мы получили $n-m$ уравнений того же лагранжева типа (3.1), в которых только теперь роль кинетической энергии T выполняет функция R; эти уравнения содержат только нециклические координаты, их производные и постоянные c_μ, так как величины $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_m$ явно входящие в функцию R, считаются выраженными через t, $\dot{q}_{m+1}$, ..., $\dot{q}_n$, q_{m+1}, ..., q_n, c_1, ..., c_m при помощи уравнений (3.2).

Эту новую систему уравнений Лагранжа можно отнести к некоторой новой динамической задаче с $n-m$ степенями свободы. Новыми координатами будут служить величины $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$, а новой кинетической энергией функция R. Если после решения новой динамической задачи координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$ будут определены как функции времени, то остальные переменные, а именно: $q_1, q_2, \ldots, q_m$ можно отыскать из уравнений:

$$q_\mu = -\int \frac{\partial R}{\partial c_\mu}\, dt, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.8}$$

ибо, как легко видеть из (3.6), имеют место соотношения

$$\dot{q}_\mu = -\frac{\partial R}{\partial c_\mu}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.9}$$

Таким образом, *динамическая задача о движении голономной неконсервативной системы с n степенями свободы и с m циклическими координатами может быть сведена к динамической задаче с $n-m$ степенями свободы.*

Легко видеть, что преобразования Рауса представляют собою частный случай преобразований, предложенных нами. Преобразования Рауса, очевидно, мы получим, полагая все обобщенные силы Q_1, $Q_2, \ldots, Q_m$, соответствующие циклическим координатам $q_1, q_2, \ldots, q_m$, равными нулям, а также налагая соответствующие ограничения на $Q_{m+1}, \ldots, Q_n$. Отсюда мы видим, что установленные в этом § преобразования значительно расширяют круг задач, к которым применим метод, аналогичный методу Рауса.

В виде простого примера рассмотрим систему с двумя степенями свободы, определяемую координатами q_1 и q_2; пусть кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2,$$

а обобщенные силы

$$Q_1 = -\frac{c}{1+t}, \quad Q_2 = -2eq_2\dot{q}_2,$$

где a, b, c, e — данные постоянные величины. Координата q_1 является, очевидно, циклической, т. к. она не содержится явно ни T, ни в Q_2, а Q_1 зависит только от времени.

Циклический интеграл получим в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \int Q_1 dt + c_1 = -c\ln(1+t) + c_1 = \frac{\dot{q}_1}{a+bq_2^2},$$

откуда

$$\dot{q}_1 = c_1(a+bq_2^2) - c\,(a+bq_2^2)\ln(1+t)$$

где c_1 есть постоянная, определяемая начальными условиями. Для кинетической энергии R приведенной системы получаем:

$$R = T - \left(\int Q_1\, dt + c_1\right)\dot{q}_1 = \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2^2} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + c\dot{q}_1^2\ln(1+t) - c_1\dot{q}_1.$$

Исключая циклическую скорость $\dot{q}_1$, получим:

$$R=\frac{1}{2}\left[c_1-c\ln(1+t)\right]^2(a+bq_2^2)+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-\left[c_1-c\ln(1+t)\right]^2(a+bq_2^2),$$

или

$$R=\frac{1}{2}\dot{q}_2^2-\frac{1}{2}\left[c_1-c\ln(1+t)\right]^2(a+bq_2^2).$$

Следовательно, задача приводится к интегрированию одного уравнения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial R}{\partial q_2}=Q_2,\quad (Q_2=Q_2^*)$$

или

$$\ddot{q}_2+b\left[c_1-c\ln(1+t)\right]^2q_2+2eq_2\dot{q}_2=0.$$

Если после интегрирования этого уравнения координата q_2 будет определена как функция времени, то циклическая координата q_1 найдется из уравнения:

$$q_1=-\int\frac{\partial R}{\partial c_1}dt=\int\left[c_1-c\ln(1+t)\right]\ (a+bq_2^2)\,dt.$$

§ 22. Приведение системы дифференциальных уравнений к форме Лагранжа. 1. *Вспомогательные переменные.* Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\ddot{q}_k=f_k(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_n),\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\tag{3.10}$$

В форме (3.10) можно записать, например, дифференциальные уравнения движения любой голономной неконсервативной механической системы. Действительно, в уравнения динамики в форме Лагранжа (3.1) обобщенные ускорения $\ddot{q}_k$ входят линейно; решая эти уравнения относительно $\ddot{q}_k$ можно записать их в виде (3.10)[1].

Покажем, что систему уравнений (3.10), при помощи введения дополнительных искомых функций, возможно заменить в известном смысле ей эквивалентной лагранжевой системой с кинетическим потенциалом.

Введем вспомогательные (избыточные) переменные $q_{n+1},\ q_{n+2},\ \ldots,\ q_{2n}$ и положим

$$L=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\dot{q}_{n+i}+\sum_{i=1}^{n}f_i\,q_{n+i},$$

где $\dot{q}_{n+i}=\dfrac{dq_{n+i}}{dt}$. Тогда мы можем переписать систему (3. 10) так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n+i}}-\frac{\partial L}{\partial q_{n+i}}=0,\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\tag{3.11}$$

вместе с уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\tag{3.12}$$

служащими для определения вспомогательных переменных q_{n+i}.

[1] Е. Т. Уиттекер. Аналитическая динамика, ОНТИ 1937, § 28; см. также Н. Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики, II ч. стр. 57—59, 1939.

Совокупность уравнений (3.11) и (3.12) образует лагранжеву систему $2n$ уравнений с кинетическим потенциалом

$$L(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{2n};\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_{2n}).$$

2. *Циклические координаты.* Предположим теперь, что некоторые переменные, например, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k \leqslant n)$ являются циклическими, т. е. не входят явно в функцию L, но эта функция содержит явно соответствующие производные $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$. Тогда уравнения (3.12), соответствующие k циклическим переменным, примут вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = c_i\ , \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k) \tag{3.13}$$

где c_i — произвольные постоянные; последние уравнения дают k интегралов нашей расширенной системы (3.11) и (3.12).

Используя эти k интегралов, можно понизить порядок расширенной системы.

Для этой цели введем функцию Рауса

$$R = L - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i. \tag{3.14}$$

При помощи k уравнений (3.13) можно выразить соответствующие циклическим координатам производные $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ и, следовательно, R как функцию переменных:

$$q_{k+1},\ q_{k+2},\ \ldots,\ q_{2n},\ \dot{q}_{k+1},\ \dot{q}_{k+2},\ \ldots,\ \dot{q}_{2n},\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k.$$

Варьируя равенство (3.14), будем иметь:

$$\sum_{j=k+1}^{2n} \frac{\partial R}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=k+1}^{2n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j + \sum_{\sigma=1}^{k} \frac{\partial R}{\partial c_\sigma}\delta c_\sigma = \sum_{j=k+1}^{2n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j +$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta \dot{q}_\sigma + \sum_{j=k+1}^{2n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j - \sum_{\sigma=1}^{k} \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\dot{q}_\sigma - \sum_{\sigma=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta \dot{q}_\sigma.$$

Сокращая в правой части полученного равенства второй и последний член и приравнивая в обеих частях множители при одинаковых вариациях, имея при этом еще ввиду, что $\delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) = \delta c_\sigma$, получим соотношения:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}, \quad (j = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ 2n) \tag{3.15}$$

$$\dot{q}_\sigma = -\frac{\partial R}{\partial c_\sigma}, \quad (\sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{3.16}$$

Оставшиеся уравнения системы (3.11) и (3.12) перепишутся после этого следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0, \quad (j = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ 2n), \tag{3.17}$$

т. е. мы получили новую систему $2n-k$ уравнений Лагранжа, в которой теперь роль кинетического потенциала L выполняет функция Рауса R; эти уравнения содержат только нециклические координаты, их производные и произвольные постоянные c_σ.

Если после решения системы (3.17) переменные $q_{k+1}, \ldots, q_{2n}$ будут определены как функции t, то остальные переменные $q_1, q_2, \ldots, q_k$ можно найти из уравнений:

$$q_\sigma = -\int \frac{\partial R}{\partial c_\sigma} dt + b_\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.18}$$

где b_σ — произвольные постоянные.

Заметим еще, что если R явно от t не зависит, то система уравнений (3.17) имеет первый интеграл вида

$$\sum_{\rho=k+1}^{2n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\rho} \dot{q}_\rho - R = c,$$

и тогда по известному методу Уиттекера можно уменьшить число этих уравнений еще на единицу, сведя задачу в конечном счете к решению системы уравнений, аналогичной лагранжевой, но с числом уравнений $2n-k-1$.

3. Частный случай. Наиболее важным случаем будет тот, при котором каждая из функций f_k зависит только от t и производных $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и, следовательно, уравнения (3.10) имеют вид

$$\ddot{q}_k = f_k(t;\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n), \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.19}$$

Такой случай иногда встречается при исследовании движения диссипативных систем (например, если на систему действуют внешние силы сопротивления, зависящие лишь только от скоростей). Поэтому разыскание общего метода, одинаково применимого для всех задач с такого рода силами, представляет известный интерес (см., например, Уиттекер, Аналитическая динамика, 1937, § 92).

Рассматриваемый случай характерен тем, что $\Delta = \Delta(t; q_{n+1}, \ldots, q_{2n}; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{2n})$, т. е. все основные переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — циклические. Отсюда мы видим, что полный процесс интегрирования системы уравнений (3.19) приводится к задаче интегрирования вспомогательной системы n лагранжевых уравнений вида:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial R}{\partial q_\rho} = 0, \quad (\rho = n+1, n+2, \ldots, 2n) \tag{3.20}$$

и к вычислению n квадратур

$$q_i = -\int \frac{\partial R}{\partial c_i} dt + b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.21}$$

$$R = L - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i. \tag{3.22}$$

В функции R производные циклических переменных $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ заменены указанным выше способом, и потому

$$R = R(t;\ q_{n+1}, \ldots, q_{2n};\ \dot{q}_{n+1}, \ldots, \dot{q}_{2n};\ c_1, \ldots, c_n).$$

Таким образом, *если известно частное решение* $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$ *вспомогательной системы (3.20), то вводя определяемые ими*

5—2328

значения величин $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$ в уравнения (3.21) мы получим общее решение первоначальной системы уравнений (3.19).

Что касается уравнений типа (3.20) или союзных им уравнений Гамильтона, то теория этих уравнений, как известно, разработана во многих деталях.

Ясно, что метод, которым мы здесь пользовались, без каких либо существенных изменений можно применить к исследованию движения неконсервативных механических систем (голономных или неголономных), теория интегрирования уравнений движения которых, как известно, разработана еще недостаточно полно.

§ 23. О методах интегрирования системы дифференциальных уравнений с циклическими переменными, аналогичных методу Гамильтона-Якоби. 1. Установленному в n° 3 § 22 предложению можно дать иную формулировку, если вспомогательную систему уравнений (3.20) заменить союзными им уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_{n+i}=\frac{\partial H}{\partial u_i},\quad \dot{u}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_{n+i}},\quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{3.23}$$

где

$$\begin{aligned} H(t;\, q_{n+1},\, q_{n+2},\, \ldots,\, q_{2n},\, u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n;\, c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_n) &= \\ =\sum_{i=1}^{n} u_i\,\dot{q}_{n+i}-R,& \\ u_i=\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{n+i}}, & \end{aligned} \tag{3.24}$$

и построить соответствующее гамильтоново уравнение в частных производных

$$\frac{\partial v}{\partial t}+H\left(t;\, q_{n+1},\, \ldots,\, q_{2n};\, \frac{\partial v}{\partial q_{n+1}},\, \ldots,\, \frac{\partial v}{\partial q_{2n}};\, c_1,\, \ldots,\, c_n\right)=0. \tag{3.25}$$

Действительно, допустим, что известен полный интеграл этого уравнения, т. е. решение, содержащее n произвольных постоянных наряду с аддитивной постоянной. Пусть эти постоянные будут $a_1, a_2, \ldots, a_n$ так, что полный интеграл имеет вид:

$$v(t;\, q_{n+1},\, q_{n+2},\, \ldots,\, q_{2n};\, c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_n;\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)+a_{n+1}.$$

Тогда, в силу классической теоремы Гамильтона-Якоби, мы получим общее решение (3.23), полагая

$$\frac{\partial v}{\partial a_i}=b_i,\quad \frac{\partial v}{\partial q_{n+i}}=u_i\,,\quad (b_i=\mathrm{const}),\quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n). \tag{3.26}$$

Дифференцируя теперь полный интеграл v по времени t, принимая при этом во внимание равенства (3.26), (3.25) и (3.24) получим:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial q_{n+i}}\dot{q}_{n+i}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}u_i\,\dot{q}_{n+i}=\sum_{i=1}^{n}u_i\,\dot{q}_{n+i}-H=R. \tag{3.27}$$

Подставляя в уравнения (3.21) вместо R его выражение (3.27) и упрощая, мы получим общее решение первоначальной системы уравнений (3.19) в виде:

$$q_i=-\frac{\partial v}{\partial c_i},\quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n). \tag{3.28}$$

Для исключения из уравнений (3.28) вспомогательных (избыточных) переменных $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$, можно воспользоваться первой группой уравнений (3.26), взяв для этого, например, частное решение вида

$$\frac{\partial v}{\partial a_i}=0, \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Резюмируя, мы можем полученный результат высказать следующим образом: *если v есть известный полный интеграл уравнения (3.25), содержащий n произвольных постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$, наряду с произвольными постоянными $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то уравнения:*

$$q_i=-\frac{\partial v}{\partial c_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial a_i}=0, \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3.29}$$

дают общее решение системы дифференциальных уравнений с циклическими переменными (3.19); так как уравнения (3.29) дают возможность выразить $q_1, q_2, \ldots, q_n$ через аргумент t и $2n$ произвольных постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Таким образом, интегрирование системы n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с циклическими переменными приводится к нахождению полного интеграла одного уравнения в частных производных первого порядка с $n+1$ независимыми переменными.

2. Приведем другой метод интегрирования системы уравнений (3.19), аналогичный методу Гамильтона-Якоби.

С этой целью введем вспомогательные (избыточные) переменные $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$ и положим

$$H=-\sum_{i=1}^{n} f_i\, q_{n+i}, \quad \dot{q}_i=p_i, \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{3.30}$$

Тогда мы можем переписать систему (3.19) так:

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_{n+i}}, \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3.31}$$

в связи с уравнениями

$$\dot{q}_{n+i}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3.32}$$

служащими для определения избыточных переменных (координат) q_{n+i}.

Совокупность уравнений (3.31) и (3.32) образует гамильтонову систему $2n$ уравнений с характеристической функцией $H(t;\ p_1, p_2, \ldots, p_n;\ q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{2n})$.

Отсюда мы видим, что если $w(t;\ q_{n+1}, \ldots, q_{2n};\ a_1, a_2, \ldots, a_n)+a_{n+1}$ есть полный интеграл гамильтонова уравнения в частных производных

$$\frac{\partial w}{\partial t}+H\left(t;\ q_{n+1}, \ldots, q_{2n};\ \frac{\partial w}{\partial q_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial q_{2n}}\right)=0, \tag{3.33}$$

то уравнения:

$$\frac{\partial w}{\partial a_i}=b_i, \quad \frac{\partial w}{\partial q_{n+i}}=p_i, \quad (b_i=\mathrm{const})), \ (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3.34}$$

дают общее решение расширенной системы уравнений (3.31) и (3. так как уравнения (3.34) позволяют выразить $p_1, p_2, \ldots, p_n$, q_{n+1}, $q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$ через t и $2n$ произвольных постоянных $a_1, a_2, \ldots,$ $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Зная полный интеграл w, легко из уравнений (3.34) определ переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n$; имеем:

$$q_i = \int p_i\, dt = \int \frac{\partial w}{\partial q_{n+i}}\, dt, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.$$

Произвольных постоянных к интегралам прибавлять нет над ности, так как мы уже ввели достаточное количество постоянных.

Таким образом, следуя этому методу, *полный процесс интег рования системы уравнений (3.19) приводится к отысканию п ного интеграла уравнения в частных производных (3.33), сост лению уравнений (3.34) и к вычислению n квадратур (3.35).*

3. Можно указать еще один способ интегрирования системы ур нений (3.19), аналогичный способу Гамильтона-Якоби.

Вводя по способу Лиувилля[1] вспомогательные переменные q_{n+1}, $q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$ и полагая

$$H = \sum_{i=1}^{n} f_i\, q_{n+i}, \quad \dot{q}_i = p_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.$$

мы можем переписать систему (3.19) так:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_{n+i}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.$$

вместе с уравнениями

$$\dot{q}_{n+i} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.3$$

служащими для определения вспомогательных импульсов q_{n+i}. О сюда, ясно, что если

$$S(t;\, p_1, p_2, \ldots, p_n;\, a_1, a_2, \ldots, a_n) + a_{n+1}$$

есть полный интеграл уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t;\, p_1, p_2, \ldots, p_n;\, \frac{\partial S}{\partial p_1}, \frac{\partial S}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial p_n}\right) = 0, \qquad (3.3$$

то уравнения:

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = b_i, \quad \frac{\partial S}{\partial p_i} = q_{n+i}, \quad (b_i = \text{const}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.4$$

дают общее решение расширенной системы уравнений (3.37) и (3.38 В данном случае первая группа уравнений (3.40), т. е. уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.41$$

дают одновременно и общее решение первоначальной системы (3.19 так как они позволяют выразить величины $p_1, p_2, \ldots, p_n$ через аргу мент t и $2n$ произвольных постоянных a_i, b_i в виде

$$p_i = p_i\left(t;\, a_1, a_2, \ldots, a_n;\, b_1, b_2, \ldots, b_n\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, n$$

[1] П. Аппель. Руководство теоретической (рациональной) механики, т. II, 1911 стр. 510.

и, следовательно, определить координаты $q_1, q_2, \ldots q_n$ из уравнений:

$$q_i = \int p_i \, dt, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.42}$$

Итак, мы видим, *что задача интегрирования системы уравнений (3.19) приводится к нахождению полного интеграла уравнения (3.39), составлению по найденному полному интегралу уравнений (3.41) и к вычислению n квадратур (3.42).*

Не останавливаясь подробно на вопросе о том, какой из установленных выше трех способов интегрирования проще и удобнее применять при решении той или иной конкретной системы уравнений типа (3.19), заметим лишь только, что уравнение (3.39) значительно отличается от уравнений (3.33) и (3.25). Например, мы видим, что в уравнении (3.39) величины p_i служат координатами, а избыточные переменные q_{n+i} — импульсами, тогда как в уравнении (3.33) наоборот, избыточные переменные q_{n+i} играют роль координат, а величины p_i — импульсов. Вследствие этого уравнение (3.39) есть линейное уравнение в частных производных первого порядка. Что касается уравнения (3.33), то в это уравнение частные производные неизвестной функции могут входить как угодно.

§ 24. Обобщение теоремы Пуассона на случай голономных неконсервативных систем. Цель данного параграфа заключается в том, чтобы путем введения дополнительных неизвестных функций дать обобщение классической теоремы Пуассона на случай голономных неконсервативных систем и указать ту пользу, какая может быть извлечена из этой теоремы для интегрирования дифференциальных уравнений механики.

1. Уравнения Гамильтона для голономных неконсервативных систем, как известно, имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i' \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.43}$$

где H и Q_i суть данные функции обобщенных координат q_i, импульсов p_i и времени t.

Введем вспомогательные (избыточные) переменные $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ и положим

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} s_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} - Q_i \right) u_i . \tag{3.44}$$

Тогда мы можем переписать систему (3.43) так:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial K}{\partial s_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial K}{\partial u_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.45}$$

вместе с уравнениями

$$\dot{u}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \dot{s}_i = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.46}$$

служащими для определения вспомогательных координат $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и импульсов $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Совокупность уравнений (3.45) и (3.46) образует систему $4n$ канонических уравнений с гамильтоновой функцией

$$K(t; q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; u_1, u_2, \ldots, u_n; s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

В развернутом виде уравнения (3.46) запишутся так:

$$\dot{u}_i = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial p_i} s_\rho + \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_\rho \partial p_i} - \frac{\partial Q_\rho}{\partial p_i} \right) u_\rho , \tag{3.46^1}$$

$$\dot{s}_i = - \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial q_i} s_\rho - \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_\rho \partial q_i} - \frac{\partial Q_\rho}{\partial q_i} \right) u_\rho ,$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

2. Чтобы доказать для уравнений (3.43) теорему, аналогичную классической теореме Пуассона, предварительно установим одно замечательное свойство, которым обладают уравнения дополнительной системы (3.46). Это свойство можно формулировать в виде следующего предложения:

Лемма. Если $f(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_n\ ;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n) = \text{const}$ — *интеграл системы уравнений (3.43), то система уравнений (3.46¹) удовлетворяется значениями*

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad s_i = - \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.47}$$

Действительно, если $f(t;\ q_i;\ p_i) = \text{const}$ есть интеграл системы уравнений (3.43), то функция f удовлетворяет тождественно условию

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} Q_i \equiv 0,$$

или, пользуясь скобками Пуассона,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,\ H) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} Q_i \equiv 0 . \tag{3.48}$$

В справедливости леммы можно убедиться непосредственной подстановкой значений переменных u_i, s_i из уравнений (3.47) в уравнения (3.46¹). Выполняя эту замену (предварительно перенеся все члены в левую часть), имея при этом ввиду уравнения (3.43), получим тождества:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_\rho \partial p_i} - \frac{\partial Q_\rho}{\partial p_i} \right) \frac{\partial f}{\partial p_\rho} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\rho} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} - \frac{\partial f}{\partial p_\rho} \frac{\partial H}{\partial q_\rho} \right) + \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\rho} Q_\rho \right] = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{df}{dt} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(- \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) - \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_\rho} + \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_\rho \partial q_i} - \frac{\partial Q_\rho}{\partial q_i} \right) \frac{\partial f}{\partial p_\rho} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} \left[- \frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\rho} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} - \frac{\partial f}{\partial p_\rho} \frac{\partial H}{\partial q_\rho} \right) - \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\rho} Q_\rho \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(- \frac{df}{dt} \right) = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, всякому интегралу первоначальной системы уравнений (3.43) соответствует частное решение (3.47) дополнительной системы (3.46).

3. Положим теперь, что нам известны два первых интеграла рас-

ширенной системы уравнений (3.45) и (3.46), например, интегралы вида:

$$f(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ \ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n) = \mathrm{const}, \tag{3.49}$$

$$\varphi(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \ p_1,\ \ldots,\ p_n;\ \ u_1,\ \ldots,\ u_n;\ \ s_1,\ \ldots,\ s_n) = \\ = \mathrm{const}. \tag{3.50}$$

Ясно, что здесь $f = \mathrm{const}$ является одновременно и интегралом первоначальной системы уравнений (3.43). Тогда, в силу классической теоремы Пуассона, равенство

$$\psi = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi}{\partial s_i} - \frac{\partial f}{\partial s_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right) = \mathrm{const}$$

или, замечая что $\frac{\partial f}{\partial s_i} = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$, равенство

$$\psi = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi}{\partial s_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right) = \mathrm{const} \tag{3.51}$$

будет тоже интегралом этой расширенной системы (3.45) и (3.46). В частности, может случиться, что вспомогательные переменные u_i, s_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ не входят явно в функцию ψ, но эта функция содержит явно основные переменные t, q_i, p_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Тогда, очевидно, в этом случае уравнение (3.51) определит некоторый интеграл первоначальной системы уравнений (3.43).

Рассмотрим общий случай, когда уравнение (3.51) содержит переменные u_i, s_i. Тогда, имея в виду, что $f = \mathrm{const}$ есть интеграл системы уравнений (3.43) и, следовательно, имеют место равенства (3.47), мы можем при помощи этих равенств исключить из уравнения (3.51) все избыточные переменные u_i, s_i. В результате равенство (3.51) будет содержать только переменные q_i, p_i, t и будет выражать, вообще говоря, некоторый интеграл первоначальной системы уравнений (3.43).

Резюмируя мы можем полученный результат высказать следующим образом:

Теорема. Если известен один первый интеграл $f(t;\ q_i;\ p_i) = \mathrm{const}$ *уравнений движения (3.43) и известен некоторый первый интеграл* $\varphi\ (t;\ q_i;\ p_i;\ u_i;\ s_i) = \mathrm{const}$ *расширенной системы (3.45) и (3.46), то, вводя определяемые равенствами (3. 47) значения величин* $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n$ *в уравнение (3.51), мы получим, вообще говоря, новый интеграл первоначальной системы уравнений (3.43).*

Установленное обобщение теоремы Пуассона дает возможность, зная один интеграл расширенной системы (3.45) и (3.46) и один интеграл уравнений (3.43), найти второй интеграл системы (3.43); комбинируя этот новый интеграл с прежним интегралом расширенной системы, мы получили бы третий интеграл уравнений движения голономной неконсервативной системы, и так далее.

Заметим еще, что обобщенной теореме Пуассона можно дать несколько иную формулировку, которая непосредственно вытекает из соотношений (3.47), существующих для всякого интеграла $f = \mathrm{const}$ уравнений (3.43). Действительно, имеет место следующее предложение:

Пусть известен некоторый первый интеграл

$$\varphi(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ p_1,\ \ldots,\ p_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_n;\ s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_n)=\text{const} \qquad (3.50)$$

расширенной системы уравнений (3.45) и (3.46). Если в этом интеграле заменить вспомогательные переменные u_i *и* s_i *их значениями из равенств (3.47), в которых* $f=\text{const}$ *есть первый интеграл уравнений движения (3.43), то равенство (3.50) будет выражать вообще некоторый новый интеграл первоначальной системы уравнений (3.43).*

Это предложение, представляющее собою иную формулировку обобщенной теоремы Пуассона, тоже дает возможность, зная один интеграл расширенной системы (3.45) и (3.46) и один интеграл уравнений (3.43), найти второй интеграл уравнений (3.43) и таким образом получить полную систему независимых интегралов уравнений движения голономной неконсервативной системы.

4. Рассмотрим частный случай склерономной системы, т. е. когда уравнения движения (3.43) и, следовательно, функция K не зависят от времени t. Этот случай характерен тем, что расширенная система (3.45) и (3.46) всегда допускает первый интеграл вида

$$K=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}s_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}-Q_i\right)u_i=\text{const}. \qquad (3.52)$$

Предположим, что известен также интеграл системы (3.43):

$$f(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ \ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)=\text{const}.$$

Тогда, на основании установленной выше теоремы (в первой или во второй формулировке, безразлично), равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_i}Q_i=C=\text{const}$$

или, пользуясь скобками Пуассона, равенство

$$(f,\ H)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_i}Q_i=C \qquad (3.53)$$

будет также интегралом системы уравнений (3.43). Этому интегралу на основании тождества (3.48), можно придать вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\text{const}. \qquad (3.54)$$

Таким образом, *если* $f(t;\ q_i;\ p_i)=\text{const}$ *есть интеграл неконсервативной склерономной системы (3.43), то* $\frac{\partial f}{\partial t}=C$ *будет также интегралом этой системы, а следовательно, интегралами будут и* $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=C_1$, $\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}=C_2$, *и т. д. Если же функция* f *явно от* t *не зависит, то* $\frac{\partial f}{\partial t}=0$ *и тогда равенство (3.54) уже не будет интегралом системы (3.43).*

Допустим теперь, что уравнения (3.43) явно не содержат координаты q_i, т. е. координата q_i является циклической (циклическая координата здесь трактуется не в смысле § 21). В этом случае расширенная система (3.45) и (3.46) допускает интеграл вида $s_i = \text{const}$. Предположим, что известен также интеграл системы (3.43):

$$f(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n) = \text{const}.$$

Тогда, на основании установленной выше теоремы, равенство

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = C = \text{const} \tag{3.55}$$

будет также интегралом первоначальной системы (3.43). Итак, *если q_i есть циклическая координата и $f(t;\ q_i;\ p_i) = \text{const}$ есть интеграл уравнений движения (3.43), то $\frac{\partial f}{\partial q_i} = C$, $\frac{\partial^2 f}{\partial q_i^2} = C_1$ и т. д. будут также интегралами этой системы. Если же функция f явно от q_i не зависит, то $\frac{\partial f}{\partial q_i} = 0$, и тогда выражение (3.55) уже не будет интегралом системы (3.43).*

5. Закончим этот параграф, дав простой пример применения рассмотренного здесь метода в том случае, когда неконсервативная система склерономна. *Пример.* Рассмотрим движение свободной точки (единичной массы) в среде, сопротивление которой пропорционально скорости, притягиваемой началом O пропорционально расстоянию. Тогда, если обозначить через q_1, q_2, q_3 прямоугольные координаты точки, а через p_1, p_2, p_3 импульсы, то будем иметь

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \frac{1}{2}\mu^2\left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right),$$

$$Q_1 = -2bp_1, \quad Q_2 = -2bp_2, \quad Q_3 = -2bp_3,$$

где b и μ данные постоянные величины.

Уравнения движения в форме Гамильтона запишутся так;

$$\begin{aligned} &\dot q_1 = p_1, \quad \dot q_2 = p_2, \quad \dot q_3 = p_3, \\ &\dot p_1 = -\mu^2 q_1 - 2bp_1, \quad \dot p_2 = -\mu^2 q_2 - 2bp_2, \\ &\dot p_3 = -\mu^2 q_3 - 2bp_3. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Легко убедиться, что уравнения движения допускают первый интеграл

$$\begin{aligned} &f = e^{bt}(\mu^1 q_1 \sin\mu^1 t + bq_1 \cos\mu' t + p_1 \cos\mu^1 t) = c_2, \\ &(\mu^{12} = \mu^2 - b^2,\ \mu > b). \end{aligned} \tag{3.57}$$

Применяя к этому интегралу формулу (3.53) или (3.54), мы получим новый интеграл

$$e^{bt}(\mu^2 q_1 \cos\mu^1 t - \mu^1 p_1 \sin\mu^1 t + bp_1 \cos\mu^1 t) = c_2. \tag{3.58}$$

Продолжая применение формулы (3.54) к интегралу (3.58), найдем еще интегралы, но они являются следствием предыдущих.

Возвращаясь снова к уравнениям (3.56), можно убедиться, что они допускают первые интегралы

$$
\begin{aligned}
&e^{bt}(\mu^1 q_2 \sin\mu^1 t + b q_2 \cos\mu^1 t + p_2 \cos\mu^1 t) = c_3,\\
&e^{bt}(\mu^1 q_3 \sin\mu^1 t + b q_3 \cos\mu^1 t + p_3 \cos\mu^1 t) = c_4.
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

Прилагая к этим интегралам формулу (3.54), мы получим два новых интеграла

$$
\begin{aligned}
&e^{bt}(\mu^2 q_2 \cos\mu^1 t - \mu^1 p_2 \sin\mu^1 t + b p_2 \cos\mu^1 t) = c_5,\\
&e^{bt}(\mu^2 q_3 \cos\mu^1 t - \mu^1 p_3 \sin\mu^1 t + b p_3 \cos\mu^1 t) = c_6.
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

Шесть интегралов (3.57), (3.58), (3.59) и (3.60) позволяют определить неизвестные q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 в функции t и шести произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_6$. Это, очевидно, и будут те самые интегралы, которые можно получить непосредственным интегрированием уравнений движения (3.56).

Вычисления, проделанные для ряда простейших голономных неконсервативных механических систем, подтверждают данные выводы и целесообразность применения обобщенной теоремы Пуассона.

§ 25. Теорема о свойствах интегралов лагранжевых уравнений для неконсервативных систем, аналогичная классической теореме Пуассона. В § 24 были рассмотрены уравнения движения голономных неконсервативных систем вида

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.43}$$

где

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot q_i - T, \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.61}$$

и дано обобщение классической теоремы Пуассона на случай этих систем.

Естественно возникает вопрос о том, не существует ли аналогии этой теоремы и как она будет формулироваться в случае уравнений Лагранжа второго рода вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.62}$$

Покажем, что теорему такого рода для уравнений (3.62) возможно установить, не разрешая этих уравнений относительно вторых производных $\ddot q$.

1. Для этой цели найдем сначала то тождественное соотношение, которому должен удовлетворять каждый первый интеграл $\varphi(t; q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n) = \text{const}$ системы уравнений (3.62).

Так как в силу уравнений (3.61) мы можем рассматривать величины $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n$ как функции обобщенных импульсов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (и наоборот), то функция φ_0 должна удовлетворять тождественно условию:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q_i}\dot q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_i}\dot p_i \equiv 0, \tag{3.63}$$

где $\varphi_0(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$ обозначает функцию, полученную из φ исключением скоростей $\dot q_1,\ \dot q_2,\ \ldots,\ \dot q_n$ при помощи уравнений (3.61). Но согласно уравнениям (3.61) и (3.62) можем написать:

$$\dot p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.63^1}$$

Подставляя найденное выражение для $\dot p_i$ в тождество (3.63), преобразуем его в следующее:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\dot q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_0}{\partial p_i}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i\right) \equiv 0. \tag{3.64}$$

Вводя опять вспомогательные (избыточные) переменные $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ и полагая

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\dot u_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i\right)u_i, \qquad \dot u_i = \frac{du_i}{dt}, \tag{3.65}$$

мы можем переписать систему (3.62) так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot u_i} - \frac{\partial R}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.66}$$

в связи с уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.67}$$

служащими для определения избыточных переменных $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$. Совокупность уравнений (3.66) и (3.67) образует систему $2n$ лагранжевых уравнений с кинетическим потенциалом $R(t;\ q_i;\ \dot q_i;\ u_i;\ \dot u_i)$. В раскрытом виде уравнения (3.67) запишутся так:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_j \partial \dot q_i}\dot u_j + \frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial \dot q_i}u_j + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot q_i}u_j\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_j \partial q_i}\dot u_j + \frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial q_i}u_j + \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}u_j\right) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.67^1}$$

2. Дополнительная система лагранжевых уравнений (3.67) обладает одним замечательным свойством, которое можно высказать в виде следующего предложения: *Лемма. Если* $\varphi(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ \dot q_1,\ \dot q_2,\ \ldots,\ \dot q_n) = \text{const}$ *есть интеграл системы уравнений (3.62), то система (3.67*[1]*) удовлетворяется значениями*

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial \dot q_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.68}$$

$\frac{\partial q_j}{\partial p_i}$ из Канон

Доказательство. Вводя в уравнения (3.68) функцию φ_0 вместо функции φ, мы можем эти уравнения переписать так:

$$u_i = \frac{\partial\varphi_0}{\partial p_i} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.68$'$}$$

Дифференцируя уравнения (3.68′) по времени, заменяя $\dot p_i$ их значениями из уравнений (3.63[1]), принимая во внимание тождество (3.64), получим после простых преобразований равенства:

$$\dot{u}_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q_j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} - \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_j} \right) u_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.69}$$

где

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial q_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} u_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.69^1}$$

Подставляя найденные выражения для u_i, $\dot{u}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ из (3.68[1]) и (3.69) в уравнения (3.67[1]), принимая при этом во внимание соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial p_j} = \begin{cases} 1 \text{ при } \rho = i, \\ 0 \text{ при } \rho \neq i, \end{cases} \tag{3.70}$$

преобразуем их в следующие:

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial q_i}\right) + \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q_\rho} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial p_j} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} + \sum_{\rho,k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_\rho} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial q_\rho} + \frac{\partial Q_\rho}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_j} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.71}$$

Выполняя теперь в равенствах (3.71) дифференцирование по t, а затем имея в виду, что в силу уравнений (3.43), скорости $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ нужно рассматривать как функции времени t, координат q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и импульсов p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получим тождества:

$$-\frac{\partial}{\partial q_i} \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_j} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j \right) \right\} = -\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d\varphi_0}{dt} \right) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что и доказывает наше предложение.

Таким образом, всякому первому интегралу лагранжевой системы уравнений (3.62) соответствует решение (3.68) дополнительной системы (3.67).

3. Из установленной леммы непосредственно вытекает теорема, аналогичная классической теореме Пуассона.

Теорема. Положим, что известен некоторый первый интеграл

$$f(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n;\ u_1, \ldots, u_n;\ \dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_n) = \text{const} \tag{3.72}$$

расширенной системы уравнений (3.66) и (3.67). Если в этом интеграле заменить избыточные переменные u_i, $\dot{u}_i$ их значениями из равенств (3.68) и (3.69), в которых $\varphi(t;\ q_i;\ \dot{q}_i) = \text{const}$ есть интеграл уравнений (3.62), то равенство (3.72) будет выражать вообще некоторый новый интеграл уравнений (3.62).

Таким образом, доказанная теорема дает способ, посредством которого можно по одному известному интегралу расширенной системы (3.66) и (3.67) и одному известному интегралу системы (3.62), найти второй интеграл системы (3.62); комбинируя этот новый интеграл с прежним интегралом расширенной системы, мы получили бы третий интеграл уравнений (3.62) и так далее.

Следовательно, к лагранжевым уравнениям для неконсервативных систем применим метод интеграции, аналогичный методу Пуассона.

4. Частные случаи. 1) Если уравнения (3.62) не содержат явно времени t, а функция $\varphi(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \text{const}$ есть интеграл этих уравнений, то их интегралом будет также и $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \text{const}$.

Действительно, в этом случае расширенная система (3.66) и (3.67) всегда допускает первый интеграл вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_i}\,\dot{u}_i\right) - R = \text{const}$$

или, заменяя функцию R ее выражением (3.65),

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\,\dot{u}_j + \frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}\,u_j + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}\,u_j\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j\right) u_j = \text{const}. \tag{3.73}$$

Если в равенстве (3.73) заменить $\dot{u}_i$, u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ их значениями из (3.69) и (3.68), то равенство (3.73) будет выражать вообще новый интеграл системы (3.62). Этому новому интегралу, на основании тождества (3.64) и соотношений (3.70), можно придать вид

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \text{const}. \tag{3.74}$$

С другой стороны, имеет место равенство

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\rho \partial t}\,u_\rho, \tag{3.75}$$

или, так как по предположению T не зависят явно от t,

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

которое вместе с (3.74) показывает, что $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const}$ есть тоже интеграл уравнений движения (3.62).

Таким образом, *если $\varphi(t;\ q_i;\ \dot{q}_i) = \text{const}$ есть интеграл динамической системы (3.62), не зависящей явно от времени, то интегралами этой системы будут также и равенства:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c_1, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_2, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = c_3 \ldots \tag{3.74^1}$$

Если же функция φ явно от времени не зависит, то $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, и тогда равенства (3.74¹) уже не будут интегралами системы (3.62).

2) Если уравнения (3.62) не содержат явно координат $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k < n)$, а функция $\varphi(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \text{const}$ есть интеграл этих уравнений, то их интегралами будут также и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho} = c_\rho = \text{const} \quad (\rho = 1, \ldots, k). \tag{3.76}$$

Действительно, в этом случае расширенная система (3.66) и (3.67) дает k первых интегралов

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\rho} = c_\rho = \text{const} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, k),$$

или, в развернутом виде,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_\rho} \dot{u}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial \dot{q}_\rho} + \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_\rho} \right) u_i = c_\rho$$

$$(\rho = 1, 2, \ldots, k). \tag{3.77}$$

Если в этих интегралах заменить величины u_i, $\dot{u}_i$ их значениями из равенств (3.68) и (3.69), то равенства (3.77), будут выражать вообще k новых интегралов системы уравнений (3.62). Этим новым интегралам, на основании тождества (3.64) и соотношений (3.70), можно придать вид

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial q_\rho} = c_\rho \quad (\rho = 1, 2, \ldots, k),$$

которые вместе с равенствами $\frac{\partial \varphi_0}{\partial q_\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_\rho}$ $(\rho = 1, 2, \ldots, k)$ вытекающими из (3.69[1]), показывают, что $\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_\rho} = \text{const}$ суть тоже интегралы системы (3.62).

Итак, *если* $q_1, q_2, \ldots, q_k$ — *циклические координаты расширенной системы (3.66) и (3.67), а* $\varphi(t;\ q_i;\ \dot{q}_i) = \text{const}$ *есть интеграл системы уравнений (3.62), то интегралами этой системы будут также равенства:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho} = C_\rho, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\rho \partial q_\nu} = C_{\rho\nu}, \ \ldots, \ (\rho, \nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Если же функция φ *явно от координат* q_ρ $(\rho = \overline{1,k})$ *не зависит, то* $\frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho} = 0$, *и тогда выражения (3.76) уже не будут интегралами системы (3.62).*

§ 26. Уравнения движения для голономных неконсервативных систем с линейными интегралами. Следует отметить, что метод, которым мы пользовались в данной главе, зависит существенно от приведения неконсервативных механических систем к консервативным при помощи введения дополнительных дифференциальных связей, обусловленных вспомогательными переменными.

Действительно, дополнительную систему уравнений (3.67) (или (3.46)) мы можем рассматривать как n дополнительных дифференциальных связей, которые нужно наложить на неконсервативную систему, чтобы она после наложения этих связей могла рассматриваться как консервативная. Тем самым, как мы уже видели, получается возможность непосредственного распространения на неконсервативные системы, теорий, аналогичных теориям Пуассона, Гамильтона-Якоби и др.

Кроме того, как мы видели в § 21, если движение голономной неконсервативной системы с n степенями свободы и с m циклическими координатами, определяется лагранжевыми уравнениями (3.1), то число этих уравнений может быть понижено на m единиц, при этом $n-m$ преобразованных уравнений (3.7) получаются того же лагранжева типа, в которых теперь роль кинетической энергии T выполняет функция R, определяемая формулой (3.6).

Указанное выше приведение лагранжевых уравнений к меньшему числу основано, как мы видели, на использовании циклических интегралов (3.2) линейных относительно обобщенных скоростей. Это является частным случаем значительно более общего предложения, которое мы докажем ниже.

Пусть движение голономной неконсервативной системы с n степенями свободы определяется дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i, \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.78}$$

где T, Q_1, ..., Q_n — известные функции от t, q_1, q_2,..., q_n, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$,... $\dot{q}_n$.

Допустим, что уравнения (3.78) имеют m первых интегралов, линейных относительно скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_n$, и предположим, что движение системы происходит согласно с этими интегралами. Эти интегралы всегда могут быть представлены в виде (разрешенном относительно зависимых скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_m$):

$$\dot{q}_\mu=\sum_{\nu=m+1}^{n+1} B_{\nu\mu}\,\dot{q}_\nu \quad (\dot{q}_{n+1}=\dot{t}=1), \quad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{3.79}$$

где $B_{\nu\mu}$ — известные функции координат q_1, q_2, ..., q_n, времени t и произвольных постоянных c_1, c_2, ..., c_m.

Интегралы (3.79), так же как и циклические интегралы, могут быть использованы для приведения системы к системе с меньшим числом степеней свободы.

При помощи интегралов (3.79) зависимые скорости $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_m$ и их производные $\ddot{q}_1$, $\ddot{q}_2$, ..., $\ddot{q}_m$ могут быть исключены из уравнений (3.78) и движение рассматриваемой системы определится интегрированием системы, состоящей из $n-m$ уравнений второго порядка и m уравнений (3.79) первого порядка. Эти уравнения второго порядка могут быть получены следующим образом.

После исключения из функций T и Qi зависимых скоростей $\dot{q}_\mu$ ($\mu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m$), имеем:

$$\begin{gathered}T(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_n)=T^*(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_{m+1}\ldots\ \dot{q}_n;\\ c_1,\ \ldots,\ c_m),\end{gathered} \tag{3.80}$$

$$\begin{gathered}Q_i(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_n)=Q_i^*(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_{m+1},\ \ldots,\ \dot{q}_n,\\ c_1,\ \ldots,\ c_m), \quad (i=\overline{1,n})\end{gathered}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\nu}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}+\sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} \quad (\nu=m+1,\ \ldots,\ n) \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_i}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\,\dot{q}_\rho \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.82}$$

Подставляя найденные из (3.81) и (3.82) выражения для $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}$ $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ в уравнения движения (3.78), преобразуем их в следующие:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\nu} - \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\frac{dB_{\nu\mu}}{dt} + \\ + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_\nu}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\dot{q}_\rho = Q^*_\nu \tag{3.83}$$

$$(\nu = m+1, \ldots, n)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\mu} + \sum_{s=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial B_{\rho s}}{\partial q_\mu}\dot{q}_\rho = Q^*_\mu$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.84}$$

причем

$$\frac{dB_{\nu\mu}}{dt} = \sum_{\rho=m+1}^{n+1}\left(\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\rho} + \sum_{s=1}^{m} B_{\rho s}\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_s}\right)\dot{q}_\rho \equiv \sum_{\rho=m+1}^{n+1} E_\rho(B_{\nu\mu})\,\dot{q}_\rho.$$

Если теперь из уравнений (3.83) исключим величины $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}$ ($\mu = \overline{1,m}$) при помощи уравнений (3.84), то получим, после простых преобразований, $n - m$ искомых уравнений движения в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\nu} - E_\nu(T^*) = \overline{Q}^*_\nu + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\right)\Big[E_\rho\left(B_{\nu\mu}\right) - \\ - E_\nu\left(B_{\rho\mu}\right)\Big]\dot{q}_\rho, \tag{3.85}$$

$$(\nu = m+1, \ldots, n)$$

где $E_\nu(T^*) = \frac{\partial T^*}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}\frac{\partial T^*}{\partial q_\mu}$,

$$E_\rho(B_{\nu\mu}) - E_\nu(B_{\rho\mu}) \equiv \Omega_{\nu\mu\rho} \equiv \frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_\nu} + \sum_{s=1}^{m}\left(B_{\rho s}\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_s} - B_{\nu s}\frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_s}\right),$$

$$\overline{Q}^*_\nu = Q^*_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu} Q^*_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(\nu, \rho = m+1, \ldots, n+1). \tag{3.86}$$

Здесь через $\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\right)$ обозначен импульс $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}$, выраженный при помощи интегралов (3.79) только через независимые обобщенные скорости $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_n$. Уравнения (3.79) и (3.85) заменяют уравнения (3.78), причем последние должны тождественно удовлетворяться на основании (3.79) и (3.85), в противном случае уравнения (3.79) не были бы интегралами движения.

Впервые уравнения движения, аналогичные уравнениям (3.85) были получены П. В. Воронцом для случая консервативных систем (П. В. Воронец. Об уравнениях движения для неголономных систем. Матем. сборник т. 22, 1901; его же. Преобразование уравнений динамики с помощью линейных интегралов движения. Киев, 1906).

Таким образом, динамическая задача о движении голономной неконсервативной системы с n степенями свободы, при наличии m линейных интегралов движения, может быть сведена к динамической задаче о движении некоторой новой неконсервативной системы с $n-m$ степенями свободы, при этом движение новой системы определяется уравнениями типа Воронца (3.85).

Вернемся к частному случаю рассмотренному в § 21. Предположим, что m координат $q_1, q_2, ..., q_m$ $(m \leqslant n)$ системы являются циклическими и, следовательно, уравнения движения (3.78) допускают m первых интегралов:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} = \int Q_\mu(t)\, dt + C_\mu \quad (\mu = 1, 2, ..., m). \tag{3.2}$$

где C_μ — произвольная постоянная. Так как интегралы (3.2) линейны относительно обобщенных скоростей, то, очевидно, предыдущие рассуждения имеют место и в этом случае, причем интегралы (3.2) могут быть представлены в форме (3.79).

В этом частном случае после исключения первых и вторых производных от координат q_μ $(\mu = 1, 2, ..., m)$, координаты эти не войдут в уравнения движения (3.85) и уравнения (3.79). Что касается самых уравнений (3.85), то легко убедиться, что они в рассматриваемом случае в точности совпадают с уравнениями (3.7) § 21.

Действительно, так как функции T^*, Q^*_ν $(\nu = \overline{m+1, n})$ и уравнения (3.79) не содержат явно координат q_μ $(\mu = \overline{1, m})$, то уравнения (3.85) в этом случае значительно упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\nu} = Q^*_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu} Q^*_\mu + \\ + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\rho=m+1}^{n+1} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\right)\left(\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\rho \\ (\nu = \overline{m+1, n}). \end{aligned} \tag{3.87}$$

Введем теперь в эти уравнения вместо T^* функцию R при помощи равенства (3.6):

$$\begin{aligned} T^* = R + \sum_{\mu=1}^{m}\left(\int Q_\mu(t)\cdot dt + C_\mu\right)\dot{q}_\mu = \\ = R + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\dot{q}_\mu = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} B_{\rho\mu}\dot{q}_\rho + R \end{aligned} \tag{3.88}$$

Тогда, на основании формул:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\nu} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}, \quad \frac{\partial T^*}{\partial q_\nu} = \frac{\partial R}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1} \frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_\nu}\dot{q}_\rho \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\nu} = \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1} \frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\rho}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\dot{q}_\rho + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu} Q^*_\mu,$$

уравнения (3.87) перепишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial R}{\partial q_\nu} = Q^*_\nu, \quad (\nu = m+1, ..., n)$$

т. е. получили уравнения (3.7) § 21. После интегрирования этих уравнений координаты $q_\mu\,(\mu=\overline{1,\ m})$ определятся квадратурами (3.8).

Изложенное выше, оправдывает введенное в § 21 понятие циклической координаты для неконсервативных систем.

Отметим еще один частный случай. Допустим, что уравнения (3.79) интегрируемы. Это означает, что уравнения движения (3.78) имеют m вторых интегралов вида:

$$f_\mu\,(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n\,)=0 \quad (\mu=1,2,\ \ldots,\ m). \tag{3.89}$$

В этом случае, как известно, все количества

$$\Omega_{\nu\mu\rho}=E_\rho\,(B_{\nu\mu})-E_\nu\,(B_{\rho\mu})=0 \quad (\mu=1,\ \ldots,\ m;\ \rho,\ \nu=m+1,\ \ldots,\ n)$$

и уравнения (3.85) делаются обычными уравнениями движения голономной системы в избыточных координатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_\nu}-E_\nu(T^*)=Q^*_\nu \quad (\nu=m+1,\ \ldots,\ n). \tag{3.90}$$

Тем самым оправдывается утверждение сделанное выше на стр. 52 (конец § 18).

ГЛАВА IV.

О МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЛИНЕЙНЫМИ НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ.

§ 27. Неголономные механические системы. Метод избыточных (независимых) переменных, которым мы пользовались в предыдущей главе, без каких-либо существенных изменений возможно применить к исследованию движения неголономных механических систем.

Как известно, неголономные механические системы характеризуются тем, что для них число независимых координат, необходимых для определения конфигурации системы в любой момент времени, превышает число степеней свободы, так как система подчинена некоторому числу связей, выражающимися некоторыми неинтегрируемыми кинематическими соотношениями, которые иначе называются *неголономными* связями[1].

Неголономные связи выражаются или некоторыми соотношениями между скоростями точек системы, или же соотношениями между обобщенными скоростями, не сводящимися к конечным соотношениям между самими координатами. Этим связям должно удовлетворять движение системы.

Неголономные связи, реализуемые на практике, в большинстве случаев, выражаются соотношениями, линейными относительно первых производных от координат системы. Но, неголономные связи могут быть и нелинейными относительно скоростей.

В качестве обобщения, которое имеет пока только теоретическое значение, можно было бы вообразить еще более сложные неголономные связи, например связи, выражаемые нелинейными зависимостями между первыми и вторыми производными от координат системы; но до сих пор неизвестны конкретно осуществимые механические системы с такого рода связями[2].

Аналитической динамике неголономных систем, начала которой содержатся в работах великого русского механика С. А. Чаплыгина[3], посвящена огромная литература, свидетельствующая о большой важности изучения теории движения этих систем.

Наиболее обстоятельному изучению, естественно, в первую очередь были подвергнуты механические системы с линейными неголономными связями. Это видно из того большого количества различных типов уравнений движения таких систем, данных многими авторами.

Несмотря на это, остается целый ряд неразрешенных или частично разрешенных задач в теории движения механических систем с линейными неголономными связями, отмечаемых многими авторами; к ним относятся: вопросы интегрирования уравнений движения этих систем,

[1] Этот термин принадлежит Герцу (H. Hertz, Prinzipe der Mechanik, (1894).
[2] См. по этому вопросу E. Delassus, Lecons sur les dynamique, Paris (1913).
[3] С. А. Чаплыгин, Полное собрание сочинений, ч. I (1933).

вопросы изучения интегралов их, вопросы построения различных теорий, аналогичных теориям классической динамики.

Среди работ посвященных решению этих вопросов, необходимо отметить исследования В. В. Добронравова (Аналитическая динамика в неголономных координатах. Ученые записки МГУ, вып. 122, механика, т. 2, 1948).

В этой главе мы будем заниматься решением некоторых из поставленных выше вопросов. В частности, мы установим для неголономных систем с любыми линейными связями теорему, аналогичную теореме Пуассона для голономных неконсервативных систем, а также докажем теорему о свойствах интегралов динамических уравнений С. А. Чаплыгина.

Прежде чем переходить к выводу наиболее удобных для нашей задачи типов уравнений движения, остановимся на аналитической характеристике неголономных систем с линейными связями.

Вообразим некоторую механическую систему, стесненную гладкими связями, конфигурация которой в любой момент времени определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Положим, что при движении системы эти координаты должны удовлетворять m линейно независимым уравнениям вида

$$\sum_{j=1}^{n+1} A_{ji}\, dq_j = 0,\ (q_{n+1} = t),\quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.1}$$

или же уравнениями в форме

$$\sum_{j=1}^{n+1} A_{ji}\, \dot{q}_j = 0,\qquad (\dot{q}_{n+1} = \dot{t} = 1),\quad (i = 1.2, \ldots, m) \tag{4.1'}$$

где коэффициенты A_{ji} являются функциями от q_j, t.

Если система уравнений Пфаффа (4.1) не допускает никакой интегрируемой комбинации, т. е. уравнения (4.1) не могут получиться посредством дифференцирования из m конечных независимых соотношений между $q_1, q_2, \ldots, q_n$, t, то механическая система будет называться неголономной системой с $n - m$ степенями свободы.

Мы можем всегда разрешить m линейных независимых уравнений (4.1[1]) относительно m обобщенных скоростей $\dot{q}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$; тем самым мы придадим уравнениям, выражающим неголономные связи, следующий вид:

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n+1} B_{\rho\mu}\, \dot{q}_\rho,\quad (\dot{q}_{n+1} = \dot{t} = 1),\quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.2}$$

где $B_{\rho\mu}$ суть определенные функции q_i и t. Тогда, между вариациями δq_1 $\delta q_2, \ldots, \delta q_n$ будут иметь место неинтегрируемые соотношения вида

$$\delta q_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu}\, \delta q_\rho,\ (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{4.3}$$

Таким образом n вариаций δq связаны m условиями (4.3), следовательно, независимых вариаций будет $n - m$, а остальные m будут зависимыми; поэтому получить n уравнений движения из общего уравнения динамики, как в случае голономной системы, невозможно. Следовательно, непосредственное приложение к неголономным системам уравнений Лагранжа второго рода или уравнений Гамильтона, невозможно. Возник вопрос о необходимости изыскания других методов для составления уравнений движения таких систем.

Впервые в мировой литературе уравнения движения для неголономных систем (без множителей связей) были установлены С. А. Чаплыгиным. Вслед за уравнениями движения в форме Чаплыгина были найдены многими авторами другие формы уравнений движения для неголономных систем.

Необходимо отметить еще раз один факт (см. §§ 7,11, 13 и др.), устанавливающий существенное различие между голономными и неголономными механическими системами, впервые отчетливо высказанный Г. К. Сусловым (Г. К. Суслов. Об одном видоизменении начала Даламбера. Математический сборник, т. 22, 1901. Также Г. К. Суслов. Теоретическая механика, Гостехиздат, 1946, § 299, стр. 596).

Вследствие наличия неголономных связей (4.2) все вариации обобщенных координат δq могут быть разделены на независимые ($\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n$) и зависимые ($\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m$).

Г. К. Суслов при выводе уравнений движения для неголономных систем подчеркивает, что при наличии неголономных связей коммутативность операций дифференцирования по времени и варьирования имеет место только для тех координат, вариации которых независимы, т. е.

$$\frac{d}{dt}\delta q_\rho - \delta\frac{dq_\rho}{dt} = 0 \text{ для } (\rho = m+1, \ldots, n). \tag{4.4}$$

Пользуясь условием (4.4) Г. К. Суслов устанавливает далее выражение билинейного ковариант для остальных m зависимых скоростей

$$\frac{d}{dt}\delta q_\mu - \delta\dot{q}_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n}\left[\frac{dB_{\rho\mu}}{dt}\delta q_\rho - \dot{q}_\rho\delta B_{\rho\mu}\right] - \delta B_{n+1\mu} \tag{4.5}$$

и далее применяет это к выводу уравнений движения.

Горак в своих работах (Z. Horak, Mechanique absolue et sa representation dans l'espace — temps. ..., 1934; а также в др. работах) следуя Суслову, принимает билинейный ковариант для обобщенных координат, вариации которых независимы, равным нулю.

Пользуясь равенствами (4.2) и (4.3) нетрудно показать, что выражению билинейного ковариант (4.5), можно придать вид:

$$\frac{d}{dt}\delta q_\mu - \delta\dot{q}_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n}\sum_{\nu=m+1}^{n+1}\left[E_\nu(B_{\rho\mu}) - E_\rho(B_{\nu\mu})\right]\dot{q}_\nu\delta q_\rho,$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.6}$$

где

$$E_\nu(B_{\rho\mu}) - E_\rho(B_{\nu\mu}) \equiv \Omega_{\rho\mu\nu} \equiv \frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\rho} +$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{m}\left(B_{\nu\sigma}\frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_\sigma} - B_{\rho\sigma}\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\sigma}\right). \tag{4.7}$$

Ясно, что все выражения (4.6) тождественно обращаются в нуль, если равенства (4.2) образуют вполне интегрируемую систему Пфаффа, т. е. когда рассматриваемая механическая система будет фактически голономной.

Таким образом, величины $\Omega_{\rho\mu\nu}$ обладают весьма важным свойством характеризовать „неголономность“ даннной механической системы. Если связи (4.2) не интегрируются, то количества

$$\Omega_{\rho\mu\nu} = E_\nu(B_{\rho\mu}) - E_\rho(B_{\nu\mu}),$$

не могут быть все одновременно нулями.

§ 28. Некоторые типы уравнений движения механических систем с линейными неголономными связями.

1. Первым по времени типом уравнений движения для неголономных систем был тип уравнений, содержащих неопределенные лагранжевы множители.

Пусть конфигурация неголономной системы в любой момент времени определяется координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, система имеет кинетическую энергию T_0, а обусловленные неголономностью кинематические соотношения заданы m уравнениями (4.2).

Если $Q_1^1\delta q_1 + Q_2^1\delta q_2 + \ldots + Q_n^1\delta q_n$ представляет собой элементарную работу внешних активных сил, приложенных к системе, при каком-нибудь виртуальном перемещении $(\delta q_1, \delta q_2 \ldots, \delta q_n)$, то уравнения движения системы, содержащие неопределенные множители λ, как известно, будут:

$$\frac{d}{dt}\frac{dT_0}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma^1 + \lambda_\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\nu} = Q_\nu^1 - \sum_{\sigma=1}^{m} \lambda_\sigma B_{\nu\sigma}, \quad (\nu = m+1, \ldots, n). \qquad (4.8)$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (4.2) образуют систему $n+m$ уравнений со столькими же неизвестными q_i $(i = 1, \ldots n)$ и λ_σ $(\sigma = \overline{1,m})$. При помощи этих уравнений можно определить движение рассматриваемой неголономной системы.

Нужно, однако, заметить, что уравнения (4.8) неудобны тем. что содержат лишние неизвестные λ_σ, которые нужны только для нахождения реакций связей; если же стоит вопрос только об определении движения системы, то множители λ_σ являются лишними. Кроме того, присутствие множителей λ_σ затрудняет изучение свойств этих уравнений, в смысле их интеграции и т. д.

2. Метод, изложенный в n° 1, зависит существенно от приведения неголономных систем к голономным путем введения дополнительных сил—реакций неголономных связей; вследствие этого уравнений движения получается больше числа степеней свободы на число неголономных связей.

Уравнения движения неголономных систем (4.8) можно привести к форме, свободной от неопределенных множителей, которая заслуживает того, чтобы на ней остановиться, хотя она и далека от структурной простоты уравнений Лагранжа второго рода, имеющих место для голономных систем.

Зависимые скорости $\dot{q}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ являются линейными функциями независимых скоростей $\dot{q}_\rho$ $(\rho = m + 1, \ldots, n)$. Поэтому при помощи уравнений (4.2) можно исключить из функции T_0 величины $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$. Тогда T_0 станет функцией от $q_1, q_2, \ldots, q_n$,

$\dot q_{m+1}, \dot q_{m+2}, \ldots, \dot q_n, t$. Преобразованную таким образом функцию T_0 мы обозначим через T. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu} = \frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma} \frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\sigma}, \quad (\nu = m+1, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma} \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\sigma}\frac{dB_{\nu\sigma}}{dt},$$

$$(\nu = m+1, \ldots, n), \tag{4.9}$$

причем

$$\frac{dB_{\nu\sigma}}{dt} = \sum_{\rho=m+1}^{n+1} E_\rho (B_{\nu\sigma}) \dot q_\rho, \quad E_\rho = \frac{\partial}{\partial q_\rho} + \sum_{i=1}^{m} B_{\rho i} \frac{\partial}{\partial q_i},$$

$$(\rho = m+1, \ldots, n+1).$$

Заменяя в равенстве (4.9) величины $\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\nu}$ и $\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\sigma}$ их выражениями из уравнений (4.8), будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu} = Q_\nu + \frac{\partial T_0}{\partial q_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma}\frac{\partial T_0}{\partial q_\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1} \frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\sigma} E_\rho (B_{\nu\sigma}) \dot q_\rho,$$

$$(\nu = m+1, \ldots, n) \tag{4.10}$$

если ввести обозначение

$$Q_\nu = Q_\nu^1 + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma} Q_\sigma^1, \quad (\nu = m+1, \ldots, n)$$

где Q_ν суть составляющие активных сил по обобщенным координатам q_ν, вариации которых δq_ν $(\nu = m+1, \ldots, n)$ независимы.

Если теперь из (4.10) исключим количества $\frac{\partial T_0}{\partial q_\nu}$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$ и $\frac{\partial T_0}{\partial q_\sigma}$ $(\sigma = \overline{1,m})$ при помощи соотношений вида:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial T_0}{\partial q_i} + \sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1} \frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\sigma}\frac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_i}\dot q_\rho, \quad (\dot q_{n+1} = \dot t = 1),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

то получим, после простых преобразований,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu} - E_\nu(T) = Q_\nu + \sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1} [E_\rho(B_{\nu\sigma}) -$$

$$- E_\nu(B_{\rho\sigma})] \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\sigma}\right) \dot q_\rho, \quad (\nu = \overline{m+1, n}) \tag{4.11}$$

или, принимая во внимание соотношения (4.7),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu} - E_\nu(T) = Q_\nu + \sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1} \Omega_{\nu\sigma\rho}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\sigma}\right)\dot q_\rho,$$

$$(\nu = m+1, \ldots, n). \tag{4.11^1}$$

Здесь через $\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)$ обозначен импульс $\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\sigma}$, выраженный при помощи уравнений (4.2) только через последние $n-m$ обобщенных скоростей $\dot{q}$.

Уравнения движения (4.11[1]) были получены впервые П. В. Воронцом для случая консервативных склерономных систем (со связями, не зависящими от времени). (П. В. Воронец. Об уравнениях движения для неголономных систем. Матем. сборник, т. 22, 1901).

3. В частном случае, когда координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$, соответствующие исключенным скоростям, не входят явно в живую силу T_0, в обобщенные силы $Q_\nu\,(\nu=m+1, \ldots, n)$ и в уравнения связей (4.2), уравнения (4.11) значительно упрощаются и принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=Q_\nu+\sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\left(\frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial q_\rho}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\rho, \quad (\nu=m+1, \ldots, n). \tag{4.12}$$

Уравнения эти были получены впервые С. А. Чаплыгиным для случая консервативных склерономных систем (С. А. Чаплыгин. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Труды отд. физ. наук общества люб. естеств. т. 9, 1897).

Уравнения (4.12) можно, очевидно, интегрировать вполне независимо от уравнений связей (4.2). Остальные же координаты q_1, q_2, ..., q_m найдутся затем при помощи квадратур из уравнений (4.2).

Разобранный С. А. Чаплыгиным класс неголономных систем характерен тем, что в их уравнения движения (4.12) входят только $n-m$ обобщенных координат $(q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n)$ и ровно столько же независимых скоростей с теми же индексами. Другими словами, уравнения (4.12) для данного класса неголономных систем фактически представляют собою полную систему уравнений движения для некоторой голономной системы с $n-m$ обобщенными координатами q_{m+1}, $q_{m+2}, \ldots, q_n$ движущейся в подпространстве $n-m$ измерений пространства n измерений. Поэтому для интеграции уравнений (4.12) нет необходимости выходить за пределы пространства $n-m$ измерений. Вот почему такие неголономные системы, разобранные С. А. Чаплыгиным, можно назвать *замкнутыми неголономными системами*.[1]

Однако, необходимо особо отметить, что хотя уравнения (4.12) и можно рассматривать как уравнения движения некоторой голономной системы в пространстве $n-m$ измерений (которую мы можем считать в общем случае неконсервативной), но из этого факта совсем еще не следует, что тем самым получается возможность непосредственного применения к уравнениям (4.12) всех теорий аналитической динамики, имеющих место для голономных систем. Едва ли стоит упоминать о том, что всякое предложение, относящееся к теории движения замкнутых неголономных систем (представляющих собою все-таки „особые" системы), независимо от того в каких координатах составляются их уравнения движения, требует специального доказательства[2].

[1] Этот термин введен В. В. Добронравовым (Аналитич. динамика в неголономных координатах. Ученые записки МГУ, вып. 122, механика т. 2, 1948, стр. 165—167).

[2] Д. Л. Синдж. Тензорные методы в динамике (1947), стр. 32. Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. Об ошибке В. Вольтерра, допущенной им при выводе уравнений движения неголономных систем. Прикладн. мат. и механ., т, 15. в. 5, 1951. См. также работу В. С. Новоселова (Учен. зап. ЛГУ, № 217, механика, вып. 31, стр. 50—83, 1957 г.).

Заметим еще, что уравнения (4.12) принимают вид обычных уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = Q_\nu, \quad (\nu = m+1, \ldots, n)$$

лишь в том случае, если коэффициенты $B_{\nu\sigma}$ тождественно удовлетворяют соотношениям вида

$$\frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_\nu} = 0, \quad (\nu = m+1, \ldots, n), \quad (\rho = m+1, \ldots, n+1),$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots, m)$$

т. е. когда уравнения связей (4.2) интегрируемы, а рассматриваемая механическая система является голономной.

4. Из уравнений (4.11) получаются как частный случай уравнения движения голономных систем в избыточных координатах (гл. II, § 7). Действительно, если дифференциальные связи (4.2), наложенные на механическую систему, мы предположим интегрируемыми, то все количества

$$E_\rho(B_{\nu\sigma}) - E_\nu(B_{\rho\sigma}) = 0, \quad (\rho = m+1, \ldots, n+1), \quad (\nu = m+1, \ldots, n),$$
$$(\sigma = 1, \ldots, m)$$

и уравнения (4.11) делаются обычными уравнениями движения голономной системы в избыточных координатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - E_\nu(T) = Q_\nu, \quad (\nu = m+1, \ldots, n).$$

5. Покажем, что систему уравнений (4.11) можно преобразовать в такую систему уравнений, которые можно будет назвать каноническими.

Положим, что на рассматриваемую неголономную механическую систему действуют силы, допускающие силовую функцию $U(t; q_1, q_2, \ldots, q_n)$, т. е. что

$$Q_\nu = Q_\nu^1 + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma} Q_\sigma^1 = \frac{\partial U}{\partial q_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\nu\sigma}\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} = E_\nu(U), \quad (\nu = m+1, \ldots, n).$$

Обозначим через $L_0\,(t;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n;\ q_1, \ldots, q_n) = T_0 + U$ функцию Лагранжа.

При помощи уравнений (4.2) можно исключить из L_0 зависимые скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$. Тогда L_0 станет функцией от $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n, t$. Преобразованную таким образом функцию L_0 мы обозначим через L. Тогда

$$L = T + U, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad (\nu = m+1, \ldots, n),$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots, m), \tag{4.13}$$

и мы можем переписать систему (4.11) так

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - E_\nu(L) = \sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\left[E_\rho(B_{\nu\sigma}) - E_\nu(B_{\rho\sigma})\right]\dot{q}_\rho,$$
$$(\nu = m+1, \ldots, n). \tag{4.14}$$

Для приведения этих уравнений к каноническому виду введем вместо $\dot{q}_\nu$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$ новые переменные u_j, определяемые равенствами:

$$u_j = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j}, \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{4.15}$$

Система (4.15) линейна относительно скоростей $\dot{q}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ и всегда может быть разрешена относительно этих скоростей, т. к. функциональный определитель системы тождественно не равен нулю, т. е.

$$\left\| \frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_i} \right\| \neq 0.$$

Определив из уравнений (4.15) скорости $\dot{q}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ и вводя определяемые ими значения величин $\dot{q}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ в уравнения связей (4.2), мы получим систему m уравнений линейных относительно n переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Таким образом, мы видим, что n импульсов $u_i (i=1, \ldots, n)$, в силу уравнений (4.2), связаны между собою m условиями, следовательно, независимых из них будет только $n - m$.

Имея это в виду, введем вместо переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$ новые независимые между собою переменные p_{m+1}, p_{m+2}, p_n, которые связаны с предыдущими при помощи соотношений:

$$p_\rho = u_\rho + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\rho\sigma}^{\bullet} u_\sigma, \quad (\rho = m+1, \ldots n), \tag{4.16}$$

где $B_{\rho\sigma}$ суть коэффициенты уравнений связей (4.2).

Далее, имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\rho} + \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{q}_\rho} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\rho} + \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\rho\sigma} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma} \quad (\rho = m+1, \ldots, n)$$

или, принимая во внимание (4.15) и (4.16),

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = p_\rho \quad (\rho = m+1, \ldots, n). \tag{4.17}$$

Система (4.17) линейна относительно скоростей $\dot{q}_\nu (\nu = m+1, \ldots, n)$ и всегда может быть разрешена относительно этих скоростей. При помощи этой системы уравнений мы можем рассматривать величины одного из двух рядов $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_n$ и $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$ как функции величин другого ряда. Таким путем мы можем перейти к новым переменным $q_1\ q_2, \ldots, q_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$.

Уравнения (4.14) можно переписать в виде:

$$E_\nu(L) = \dot{p}_\nu - \sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{\rho=m+1}^{n+1} \Omega_{\nu\sigma\rho} u_\sigma \dot{q}_\rho \tag{4.18}$$

где u_σ суть известные функции от $t, q_1, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_n$.

Варьируя функцию L $(t; q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n)$ принимая при этом во внимание уравнения (4.3), (4.17) и (4.18), будем иметь:

$$\delta L=\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\nu}\delta\dot q_\nu+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_{\nu=m+1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot q_\nu}\delta\dot q_\nu+E_\nu(L)\delta q_\nu\right]=$$

$$=\sum_{\nu=m+1}^{n}\left[p_\nu\delta\dot q_\nu+E_\nu(L)\delta q_\nu\right]=\delta\sum_{\nu=m+1}^{n}p_\nu\dot q_\nu+\sum_{\nu=m+1}^{n}\Bigg[\Big(\dot p_\nu-$$

$$-\sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\Omega_{\nu\sigma\rho}u_\sigma\dot q_\rho\Big)\delta q_\nu-\dot q_\nu\delta p_\nu\Bigg],$$

или

$$\delta\left[\sum_{\nu=m+1}^{n}p_\nu\dot q_\nu-L\right]=\sum_{\nu=m+1}^{n}\Bigg[\dot q_\nu\delta p_\nu-$$

$$-\Big(\dot p_\nu-\sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\Omega_{\nu\sigma\rho}u_\sigma\dot q_\rho\Big)\delta q_\nu\Bigg].$$

Вводя в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H(t;\ q_1,\ q_n,\ \ldots,\ q_n;\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n)=\sum_{\nu=m+1}^{n}p_\nu\dot q_\nu-L,$$

получаем соотношение:

$$\delta H=\sum_{\nu=m+1}^{n}\left[\dot q_\nu\delta p_\nu-\Big(\dot p_\nu-\sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\Omega_{\nu\sigma\rho}u_\sigma\dot q_\rho\Big)\delta q_\nu\right].$$

С другой стороны, варьируя функцию H и исключая зависимые вариации δq_μ ($\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ m$) при помощи уравнений (4.3), найдем:

$$\delta H=\sum_{\nu=m+1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\delta p_\nu+E_\nu(H)\delta q_\nu\right].$$

Сравнивая последние два равенства и имея ввиду независимость вариаций δp_ν, δq_ν ($\nu=m+1,\ m+2,\ldots,\ n$), получаем уравнения движения в форме:

$$\dot q_\nu=\frac{\partial H}{\partial p_\nu},\quad \dot p_\nu=-E_\nu(H)+\sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\Omega_{\nu\sigma\rho}u_\sigma\frac{\partial H}{\partial p_\rho},$$
$$(\nu=m+1,\ \ldots,\ n) \qquad (4.19)$$

а это не что иное, как ранее полученные уравнения (2.137) (§ 19) из гамильтоновых уравнений с неопределенными множителями.

Последние уравнения и можно назвать каноническими уравнениями движения неголономной системы. Они вместе с уравнениями (4.2), которые можно переписать в виде

$$\dot q_\mu=\sum_{\rho=m+1}^{n+1}B_{\rho\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\rho},\quad\left(\frac{\partial H}{\partial p_{n+1}}=1\right),\quad(\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ m)\qquad(4.20)$$

с аналитической точки зрения дают в дифференциальной форме, полную постановку задачи о движении механической системы с линейными неголономными связями. Если конфигурация и состояние движения системы в начальный момент заданы, т. е. указаны начальные значения величин q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $p_\nu (\nu = m+1, \ldots, n)$, то движение неголономной системы будет однозначно определено.

В частном случае, когда координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$, соответствующие зависимым вариациям $\delta q_1\ \delta q_2, \ldots, \delta q_m$, не входят явно в функцию Гамильтона H и в коэффициенты уравнений связей (4.2), т. е. когда неголономная система является замкнутой, уравнения (4.19) принимают вид:

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{\rho=m+1}^{n+1} \left(\frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_\nu}\right) \frac{\partial H}{\partial p_\rho} u_\sigma,$$
$$(\nu = m+1, \ldots, n). \tag{4.21}$$

Уравнения эти можно, очевидно, интегрировать независимо от уравнений (4.20). Остальные же координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$ возможно найти затем при помощи квадратур из уравнений (4.20).

Заметим еще, что уравнения (4.19) переходят в канонические уравнения в избыточных переменных (2.59) (§ 10, гл. II), если связи (4.2) все интегрирующиеся, т. е. если при всяких значениях индексов ν, σ, ρ, величины $\Omega_{\nu\sigma\rho} = 0$.

Мы не приводим здесь вывода других типов уравнений движения для механических систем с линейными неголономными связями, ибо в дальнейшем изложении ими пользоваться не будем.

§ 29. Циклические координаты. Распространение метода Рауса на неголономные механические системы. В предыдущем параграфе мы видели, что движение неголономной механической системы с $n-m$ степенями свободы, положение которой зависит от n обобщенных координат $q_1\ q_2, \ldots, q_n$, определяется дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - E_\nu(T) = Q_\nu + \sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{\rho=m+1}^{n+1} [E_\rho(B_{\nu\sigma}) - E_\nu(B_{\rho\sigma})] \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) \dot{q}_\rho$$
$$(\nu = 1, \ldots, n), \tag{4.11}$$

где $T, Q_{m+1}, Q_{m+2}, \ldots, Q_n$ суть известные функции от $t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n$, а символ E_ν — оператор вида

$$E_\nu = \frac{\partial}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \quad (\nu = m+1, \ldots, n)$$

в котором $B_{\nu\mu}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ суть коэффициенты уравнений неголономных связей

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\nu=m+1}^{n+1} B_{\nu\mu} \dot{q}_\nu \quad (\dot{q}_{n+1} = \dot{t} = 1), \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{4.2}$$

Введем понятие циклической координаты для неголономных механических систем. При этом будем держаться той точки зрения, согласно которой всякой циклической координате соответствует циклический интеграл, используя который возможно понизить порядок системы уравнений движения, но так, чтобы преобразованные уравнения сохранили свою прежнюю форму. Тогда возможно дать общее определение циклической координаты, охватывающее как голономные, так и неголономные системы, которые могут быть консервативными или неконсервативными.

Действительно, допустим, что обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$, при помощи которых определяется положение неголономной системы, удовлетворяют условиям: 1°) положим, что некоторые координаты, вариации которых приняты за независимые, например, $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_{m+k}$ $(m+k<n)$ не входят явно в живую силу системы T, но она содержит явно соответствующие скорости $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_{m+k}$, а соответствующие этим координатам обобщенные силы $Q_{m+1}, Q_{m+2}, \ldots, Q_{m+k}$ являются либо только функциями от времени t, либо величинами постоянными; 2°) остальные обобщенные силы $Q_{m+k+1}, \ldots, Q_n$ тоже не зависят явно от координат $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_{m+k}$, но могут зависеть от их производных; 3°) уравнения неголономных связей (4.2) тоже не зависят явно от координат $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_{m+k}$, а также не зависят и от их производных $\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_{m+k}$. Такого рода координаты неголономной системы мы будем называть *циклическими*.

Согласно условиям 1° и 3° для циклических координат q_λ $(\lambda = m+1, \ldots, m+k)$ все величины $B_{\lambda\sigma}, \dfrac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_\lambda}$ и $\dfrac{\partial T}{\partial q_\lambda}$ равны нулям, при всевозможных значениях индексов σ, ρ. Поэтому для циклических координат q_λ $(\lambda = m+1, \ldots, m+k)$ имеем соотношения:

$$E_\lambda(T)=0,\ E_\rho(B_{\lambda\sigma})-E_\lambda(B_{\rho\sigma})=0, \quad (\lambda=m+1, \ldots, m+k),$$
$$(\sigma=1, 2, \ldots, m). \quad (\rho=m+1, \ldots, n+1), \tag{4.22}$$

и уравнения движения (4.11) для этих координат дают:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}=Q_\nu, \quad (\nu=m+1, \ldots, m+k).$$

Другими словами, для циклических координат существуют первые интегралы:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}=\int Q_\nu\, dt+c_\nu \quad (\nu=m+1, \ldots, m+k), \tag{4.23}$$

где c_ν суть постоянные интегрирования; эти интегралы мы будем называть *циклическими интегралами*.

Покажем теперь, каким образом, используя эти k интегралов, можно понизить порядок системы (4.11).

Выразив из уравнений (4.23) производные циклических координат $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_{m+k}$ в функции остальных нециклических координат $q_1, q_2, \ldots, q_m, q_{m+k+1}, \ldots, q_n$, производных $\dot{q}_{m+k+1}, \ldots, \dot{q}_n$ и произвольных постоянных $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_{m+k}$, подставим найденные выражения вместо $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_{m+k}$ в живую силу T и обобщенные силы Q_ν $(\nu=m+k+1, \ldots, n)$. Обозначая результат подстановки через T^* и Q_ν^* имеем,

$$T(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_m;\ q_{m+k+1}, \ldots, q_n;\ \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n)=$$

$$= T^* (t;\ q_1;\ q_2,\ \ldots,\ q_m;\ q_{m+k+1},\ \ldots\ q_n;\ \dot{q}_{m+k+1},\ \ldots,\ \dot{q}_n;$$
$$c_{m+1},\ \ldots,\ c_{m+k}), \tag{4.24}$$

$$Q_\nu(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_m;\ q_{m+k+1},\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_{m+1},\ \ldots,\ \dot{q}_n) =$$
$$= Q_\nu^*(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_m;\ q_{m+k+1},\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_{m+k+1},\ \ldots,\ \dot{q}_n,$$
$$c_{m+1},\ \ldots,\ c_{m+k+1}),\ (\nu = m + k + 1,\ \ldots,\ n).$$

Для преобразования оставшихся $n - m - k$ уравнений движения (4.11) нам необходимо составить выражения:

$$E_\nu(T) \equiv \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} \quad (\nu = m + k + 1\ \ldots,\ n).$$

Обращаясь к тождеству (4.24) и имея в виду, что циклические скорости $\dot{q}_{m+1},\ \ldots,\ \dot{q}_{m+k}$ являются функциями от нециклических координат $q_\mu(\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, $q_\nu(\nu = m + k + 1,\ \ldots,\ n)$ и производных $\dot{q}_\nu$ $(\nu = m + k + 1,\ \ldots,\ n)$, будем иметь:

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_\mu} = \frac{\partial T}{\partial q_\mu} + \sum_{\lambda=m+1}^{m+k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\frac{\partial \dot{q}_\lambda}{\partial q_\mu},\quad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_\nu} = \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \sum_{\lambda=m+1}^{m+k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\frac{\partial \dot{q}_\lambda}{\partial q_\nu},\quad (\nu = m + k + 1,\ \ldots,\ n)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\nu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} + \sum_{\lambda=m+1}^{m+k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\frac{\partial \dot{q}_\lambda}{\partial \dot{q}_\nu},\quad (\nu = m + k + 1,\ \ldots,\ n).$$

Но количества

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} = \int Q_\lambda\, dt + c_\lambda,\quad (\lambda = m + 1,\ \ldots,\ m + k)$$

являются функциями только от времени t, поэтому предыдущие соотношения можно переписать в виде:

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_\mu} = \frac{\partial T}{\partial q_\mu} + \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{\lambda=m+1}^{m+k} \left(\int Q_\lambda\, dt + c_\lambda\right) \dot{q}_\lambda. \quad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_\nu} = \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \frac{\partial}{\partial q_\nu} \sum_{\lambda=m+1}^{m+k} \left(\int Q_\lambda\, dt + c_\lambda\right) \dot{q}_\lambda,$$
$$(\nu = m + k + 1,\ \ldots,\ n)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\nu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} + \frac{\partial}{\partial q_\nu} \sum_{\lambda=m=1}^{m+k} \left(\int Q_\lambda\, dt + c_\lambda\right) \dot{q}_\lambda,$$
$$(\nu = m + k + 1,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial q_\mu} = \frac{\partial}{\partial q_\mu}\left[T^* - \sum_{\lambda=m+1}^{m+k} \left(\int Q_\lambda\, dt + c_\lambda\right) \dot{q}_\lambda\right] = \frac{\partial R}{\partial q_\mu},$$
$$(\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=\frac{\partial}{\partial q_\nu}\left[T^*-\sum_{\lambda=m+1}^{m+k}\left(\int Q_\lambda\,dt+c_\lambda\right)\dot q_\lambda\right]=\frac{\partial R}{\partial q_\nu},$$
$$(\nu=m+k+1,\ \dots,\ n)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu}=\frac{\partial}{\partial \dot q_\nu}\left[T^*-\sum_{\lambda=m+1}^{m+k}\left(\int Q_\lambda\,dt+c_\lambda\right)\dot q_\lambda\right]=\frac{\partial R}{\partial \dot q_\nu},$$
$$(\nu=m+k+1,\ \dots,\ n).$$

и, следовательно,

$$E_\nu(T)=\frac{\partial R}{\partial q_\nu}+\sum_{\mu=1}^{m}B_{\nu\mu}\frac{\partial R}{\partial q_\mu}=E_\nu(R),\ (\nu=m+k+1,\ \dots,\ n) \tag{4.25}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu}=\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\nu},\quad (\nu=m+k+1,\ \dots,\ n) \tag{4.26}$$

если ввести новую функцию R при помощи равенства

$$R=T^*-\sum_{\lambda=m+1}^{m+k}\left(\int Q_\lambda\,dt+c_\lambda\right)\dot q_\lambda. \tag{4.27}$$

В функции R производные циклических координат $\dot q_{m+1},\ \dots,\ \dot q_{m+k}$ заменены указанным выше способом, так что она является функцией от $q_1,\ \dots,\ q_m,\ q_{m+k+1},\ \dots,\ q_n,\ \dot q_{m+k+1},\ \dots,\ \dot q_n,\ c_{m+1},\ \dots,\ c_{m+k}$. Если мы обозначим через $\left(\frac{\partial T_0^*}{\partial \dot q_\sigma}\right)$ $(\sigma=1,\ 2,\ \dots,\ m)$ результат исключения циклических скоростей $\dot q_\lambda$ $(\lambda=m+1,\ \dots,\ m+k)$ из выражения $\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\sigma}\right)$ $(\sigma=1,\ 2,\ \dots,\ m)$ при помощи уравнений (4.23), то согласно полученным соотношениям (4.25), (4.26), (4.24) и (4.22) уравнения (4.11) для нециклических координат приобретают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\nu}-E_\nu(R)=Q_\nu^*+\sum_{\sigma=1}^{m}\ \sum_{\rho=m+k+1}^{n+1}\Big[E_\rho(B_{\nu\sigma})-$$
$$-E_\nu(B_{\rho\sigma})\Big]\left(\frac{\partial T_0^*}{\partial \dot q_\sigma}\right)\dot q_\rho,\ (\nu=m+k+1,\ \dots,\ n) \tag{4.28}$$

т. е. получили $n-m-k$ уравнений того же типа (4.11), в которых теперь роль живой силы T выполняет функция R. Присоединив к ним уравнения связей (4.2), которые в рассматриваемом случае приобретают вид

$$\dot q_\mu=\sum_{\rho=m+k+1}^{n+1}B_{\rho\mu}\,\dot q_\rho,\qquad (\dot q_{n+1}=\dot t=1),\ (\mu=1,\ 2,\ \dots,\ m), \tag{4.29}$$

мы получим полную систему $n-k$ уравнений для определения неизвестных $q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_m,\ q_{m+k+1},\ \dots\ q_n$. После того как проинтегрирована последняя система уравнений для нециклических координат, значения циклических координат q_λ $(\lambda=m+1,\quad m+2,\ \dots,\ m+k)$ можно будет найти из уравнений:

$$q_\lambda=-\int\frac{\partial R}{\partial c_\lambda}dt,\quad (\lambda=m+1,\ \dots\ m+k) \tag{4.30}$$

ибо, как легко видеть, из (4.27), имеют место соотношения

$$q_\lambda = -\frac{\partial R}{\partial c_\lambda}, \quad (\lambda = m+1, \ldots, m+k). \tag{4.31}$$

Таким образом *динамическая задача о движении неголономной системы с $n-m$ степенями свободы, определяемой n обобщенными координатами, из которых k координат являются циклическими, может быть сведена к динамической задаче о движении неголономной системы с $n-m-k$ степенями свободы, определяемой $n-k$ обобщенными координатами.*

В частном случае, когда координаты $q_1\ q_2, \ldots, q_m$, соответствующие исключенным зависимым скоростям, не входят явно в живую силу T, обобщенные силы Q_ν и в уравнения связей (4.2), т. е. когда рассматриваемая система является замкнутой неголономной системой с $n-m$ степенями свободы и с k циклическими координатами q_λ $(\lambda = m+1, \ldots, m+k)$, уравнения (4.28) упрощаются и принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\nu} - \frac{\partial R}{\partial q_\nu} = Q_\nu^* + \sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+k+1}^{n+1}\left(\frac{\partial T_0^*}{\partial \dot q_\sigma}\right)\left(\frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot q_\rho,$$

$$(\nu = m+k+1, \ldots, n) \tag{4.32}$$

т. е. имеем $n-m-k$ уравнений того же типа Чаплыгина (4.12), в которых теперь роль кинетической энергии T играет функция R, определяемая формулой (4.27); эти уравнения содержат только нециклические координаты q_ν $(\nu = m+k+1, \ldots, n)$, их производные и произвольные постоянные $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_{m+k}$. Уравнения (4.32) можно интегрировать независимо от уравнений связей (4.29). После того как нециклические координаты q_ν $(\nu = m+k+1, \ldots, n)$ будут определены как функции времени, циклические координаты q_λ $(\lambda = m+1, \ldots, m+k)$ найдутся при помощи квадратур (4.30). Что касается остальных координат $q_1, q_2, \ldots, q_m$, то их тоже можно отыскать затем при помощи квадратур из уравнений связей (4.29):

$$q_\mu = \int \sum_{\rho=m+k+1}^{n+1} B_{\rho\mu}\, dq_\rho, \quad (q_{n+1}=t), \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{4.33}$$

Ясно, что преобразования рассмотренные нами ранее (в §§ 9, 21) представляют собою частные случаи преобразований, приведенных нами в данном параграфе. Тем самым, значительно расширяется круг задач, к которым применим метод приведения уравнений движения к меньшему числу, аналогичный методу Рауса.

§ 30. Обобщение теоремы Пуассона на случай неголономных механических систем. Цель данного параграфа заключается в том, чтобы путем введения дополнительных неизвестных функций дать обобщение классической теоремы Пуассона на случай механических систем с линейными неголономными связями.

Вопрос о применении теоремы Пуассона к неголономным системам исследовался Dautheville'ем[1] и В. В. Добронравовым[2]. Оба автора

[1] Dautheville. Sur les systemes non Holonomes. Bullet. de la Soc. math. de France т. 37, стр. 120–132, 1909.

[2] В. В. Добронравов. Теорема Пуассона в неголономных координатах, ДАН СССР, XLIV, № 6, 1944. Также В. В. Добронравов. Аналитическая динамика в неголономных координатах. Учен. зап. МГУ, вып. 122, механика т. 2, 1948, часть II, гл. VI.

рассматривали только случай замкнутых неголономных систем (С. А. Чаплыгина) и применяли иные сравнительно с предлагаемыми нами методы; полученные ими результаты формулируются иначе чем в данной работе.

1. Канонические уравнения движения для механических систем с линейными неголономными связями, как мы видели в предыдущем параграфе, имеют вид:

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = -E_\nu(H) + \Delta_\nu, \quad (\nu = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n) \tag{4.19}$$

$$\Delta_\nu = \sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{\rho=m+1}^{n+1} \Omega_{\nu\sigma\rho} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} u_\sigma,$$

где H и Δ_ν — данные функции обобщенных координат, q_1 $q_2, \ldots, q_n$, импульсов $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$ и времени t. Эти уравнения должны рассматриваться совместно с уравнениями связей (4.2), которые можно записать так:

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n+1} B_{\rho\mu} \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p_{n+1}} = 1\right), \quad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{4.20}$$

Найдем то тождественное соотношение, которому должен удовлетворять каждый интеграл $f(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ p_{m+1}, \ldots, p_n) = c = \mathrm{const}$ системы уравнений (4.19) и (4.20). Имеем:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\rho} \dot{p}_\rho \equiv 0.$$

Подставляя в это равенство вместо $\dot{q}_i$ и $\dot{p}_\rho$ их выражения из (4.19) и (4.20), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{n+1,\mu} \frac{\partial f}{\partial q_\mu} + \sum_{\rho=m+1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_\rho} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\rho\mu} \frac{\partial f}{\partial q_\mu}\right) \frac{\partial H}{\partial p_\rho} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f}{\partial p_\rho} E_\rho(H) \right] + \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\rho} \Delta_\rho \equiv 0,$$

или, вводя оператор E,

$$E_{n+1}(f) + \sum_{\rho=m+1}^{n} \left[E_\rho(f) \frac{\partial H}{\partial p_\rho} - \frac{\partial f}{\partial p_\rho} E_\rho(H)\right] +$$

$$+ \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\rho} \Delta_\rho \equiv 0. \tag{4.34}$$

Рассматривая структуру тождества (4.34), естественно записать его в виде

$$E_{n+1}(f) + \{f,\ H\} + \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\rho} \Delta_\rho \equiv 0, \tag{4.35}$$

где фигурные скобки означают выражение (которое можно назвать обобщенными скобками Пуассона, см. § 11, гл. II)

$$\{f,\ H\} \equiv \sum_{\rho=m+1}^{n} \left[E_\rho(f) \frac{\partial H}{\partial p_\rho} - \frac{\partial f}{\partial p_\rho} E_\rho(H)\right]. \tag{4.36}$$

2. Введем вспомогательные (избыточные) переменные u_{m+1}, u_{m+2}, ..., u_n, s_1, s_2, ..., s_n и положим

$$K=\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(s_\nu+\sum_{i=1}^{m}B_{\nu i}s_i\right)\frac{\partial H}{\partial p_\nu}+\sum_{\nu=m+1}^{n}\left[E_\nu(H)-\Delta_\nu\right]u_\nu. \qquad (4.37)$$

$s_{\nu+i}=0$

$\partial H/\partial p_\nu$

Тогда мы можем переписать систему (4.19) и (4.20) так:

$$\dot q_k=\frac{\partial K}{\partial s_k},\quad \dot p_\nu=-\frac{\partial K}{\partial u_\nu},\quad (k=1,\ 2,\ ...,\ n),$$
$$(\nu=m+1,\ m+2,\ ...,\ n) \qquad (4.38)$$

вместе с уравнениями

$$\dot u_\nu=\frac{\partial K}{\partial p_\nu},\quad \dot s_k=-\frac{\partial K}{\partial q_k},\quad (\nu=m+1,\ m+2,\ ...,\ n),$$
$$(k=1,\ 2,\ ...,\ n), \qquad (4.39)$$

служащими для определения избыточных координат u_{m+1}, u_{m+2}, ..., u_n и избыточных импульсов s_1, s_2, ..., s_n.

Совокупность уравнений (4.38) и (4.39) образует систему канонических уравнений с гамильтоновой функцией

$$K\,(t;\ q_1,\ ...,\ q_n;\ p_{m+1},\ ...,\ p_n;\ u_{m+1},\ ...,\ u_n;\ s_1,\ ..,\ s_n).$$

В раскрытом виде вспомогательная система уравнений (4.39) запишется так:

$$\dot u_\nu=\sum_{\rho=m+1}^{n}\left(s_\rho+\sum_{i=1}^{m}B_{\rho i}\,s_i\right)\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho\,\partial p_\nu}+\sum_{\rho=m+1}^{n}\left[\frac{\partial E_\rho(H)}{\partial p_\nu}-\frac{\partial\Delta_\rho}{\partial p_\nu}\right]u_\rho,$$
$$(\nu=m+1,\ ...,\ n)$$
$$\dot s_k=-\sum_{\rho=m+1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial B_{\rho i}}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_\rho}s_i-\sum_{\rho=m+1}^{n}\Bigg(s_\rho+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}B_{\rho i}\,s_i\Bigg)\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho\,\partial q_k}-\sum_{\rho=m+1}^{n}\left[\frac{\partial E_\rho(H)}{\partial q_k}-\frac{\partial\Delta_\rho}{\partial q_k}\right]u_\rho,$$
$$(k=1,\ 2,\ ...,\ n). \qquad (4.39')$$

3. Чтобы доказать для уравнений (4.19) и (4.20) теорему, аналогичную классической теореме Пуассона, установим сначала одно замечательное свойство, которым обладают уравнения вспомогательной системы (4.39). Это свойство можно высказать в виде предложения:

Лемма. Если $f\,(t;\ q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n;\ p_{m+1},\ ...,\ p_n)=\mathrm{const}$ есть интеграл системы уравнений (4.19) и (4.20), то система уравнений (3.39') удовлетворяется значениями

$$u_\nu=\frac{\partial f}{\partial p_\nu},\quad s_k=-\frac{\partial f}{\partial q_k},\quad (\nu=m+1,\ ...,\ n),\quad (k=1,\ 2,\ ...,\ n). \qquad (4.40)$$

Доказательство ничем не отличается от такого же для установленной леммы в § 24 гл. III.

Действительно, в справедливости этой леммы можно убедиться, непосредственно подставляя значения u_ν, s_k из уравнений (4.40) в уравнения (4.39′). Эта замена, имея в виду уравнения (4.19) и (4.20), даст тождества:

$$\frac{\partial}{\partial p_\nu}\left[E_{n+1}(f)+\{f,\,H\}+\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_\rho}\Delta_\rho\right]=\frac{\partial}{\partial p_\nu}\left(\frac{df}{dt}\right)\equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left[E_{n+1}(f)+\{f,\,H\}+\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_\rho}\Delta_\rho\right]=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{df}{dt}\right)\equiv 0.$$

Таким образом, всякому первому интегралу системы (4.19) и (4.20) соответствует решение (4.40) дополнительной системы (4.39).

4. Допустим, что нам известны два первых интеграла расширенной системы уравнений (4.38) и (4.39), например интегралы вида:

$$f\,(t;\,q_1,\;q_2,\,\ldots,\,q_n;\,p_{m+1},\,\ldots,\,p_n)=\mathrm{const}, \tag{4.41}$$

$$\varphi\,(t;\,q_1,\,\ldots,\,q_n;\,p_{m+1},\,\ldots,\,p_n;\,u_{m+1},\,\ldots\,u_n;\,s_1,\,\ldots,\,s_n)=$$
$$=\mathrm{const}: \tag{4.42}$$

здесь $f=\mathrm{const}$ является одновременно и интегралом первоначальной системы уравнений (4.19) и (4.20). Тогда, в силу классической теоремы Пуассона, равенство

$$\psi=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial\varphi}{\partial s_k}-\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}=\mathrm{const} \tag{4.43}$$

будет тоже интегралом этой расширенной системы уравнений. В частности может случиться, что избыточные переменные u_ν ($\nu=m+1,\,\ldots,\,n$) и s_k ($k=1,\,2,\,\ldots,\,n$) не входят явно в функцию ψ, но эта функция содержит явно основные переменные t, q_k, p_ν. Ясно, что в этом случае уравнение (4.43) определит некоторый интеграл первоначальной системы (4.19) и (4.20).

В общем же случае функция ψ может зависеть как от основных переменных q_k, p_ν, t так и от избыточных переменных u_ν, s_k. Тогда в этом случае, имея ввиду, что $f=\mathrm{const}$ является интегралом системы уравнений (4.19) и (4.20) и, следовательно, имеют место равенства (4.40), мы можем при помощи этих равенств исключить из выражения (4.43) все избыточные переменные u_ν, s_k. В результате равенство (4.43) будет содержать только переменные q_k, p_ν, t и будет выражать вообще некоторый новый интеграл первоначальной системы уравнений (4.19) и (4.20).

Итак, мы можем полученный результат высказать следующим образом:

Теорема. Если известен один первый интеграл $f\,(t;\,q_k;\,p_\nu)=\mathrm{const}$ *уравнений движения неголономной системы (4.19) и (4.20), а также известен некоторый первый интеграл* $\varphi\,(t;\,q_k;\,p_\nu;\,u_\nu;\,s_k)=\mathrm{const}$ *расширенной системы (4.38) и (4.39), то, вводя определяемые равенствами (4.40) значения величин* u_ν, s_k *в уравнение (4.43), мы получим, вообще говоря, новый интеграл первоначальной системы уравнений (4.19) и (4.20).*

Установленное обобщение теоремы Пуассона дает возможность, зная один интеграл расширенной системы (4.38) и (4.39) и один интеграл уравнений движения (4.19) и уравнений (4.20), найти второй интеграл уравнений движения, затем третий и т. д. и таким образом получить в некоторых случаях полную систему независимых интегралов уравнений движения неголономной системы.

Интересные свойства дополнительной системы уравнений (4.39), доказанные в n° 3, позволяют дать обобщенной теореме Пуассона несколько иную формулировку, которая непосредственно вытекает из соотношений (4.40), существующих для всякого интеграла $f = \text{const}$ уравнений (4.19) и (4.20).

Действительно, имеет место такое предложение: *Пусть известен некоторый первый интеграл*

$$\varphi(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ p_{m+1}, \ldots, p_n;\ u_{m+1}, \ldots, u_n;\ s_1, \ldots, s_n) = \text{const} \tag{4.44}$$

расширенной системы уравнений (4.38) и (4.39). Если в этом интеграле заменить избыточные переменные u_ν, s_k их значениями из (4.40), в которых $f = \text{const}$ есть интеграл уравнений (4.19) и (4.20), то тогда равенство (4.44) будет выражать, вообще говоря, новый интеграл первоначальной системы уравнений (4.19) и (4.20).

Это предложение тоже дает возможность, зная один интеграл расширенной системы (4.38) и (4.39) и один интеграл системы (4.19) и (4.20), найти второй интеграл уравнений (4.19) и (4.20); комбинируя этот новый интеграл с прежним интегралом расширенной системы, мы получили бы третий интеграл уравнений движения неголономной системы, и так далее.

5. Отметим некоторые частные случаи. Допустим, что неголономная система склерономна, т. е. что уравнения движения (4.19) и (4.20) и, следовательно, функция K не содержат явно времени t. Разбираемый случай характерен тем, что расширенная система (4.38) и (4.39) всегда допускает первый интеграл вида

$$K = \sum_{\nu=m+1}^{n}\left(s_\nu + \sum_{i=1}^{m} B_{\nu i}\, s_i\right)\frac{\partial H}{\partial p_\nu} + \sum_{\nu=m+1}^{n}\left[E_\nu(H) - \right.$$
$$\left. - \Delta_\nu\right] u_\nu = \text{const}. \tag{4.45}$$

Если предположим теперь, что известен также некоторый интеграл $f(t;\ q_1\ q_2, \ldots, q_n;\ p_{m+1}, \ldots, p_n) = \text{const}$ системы уравнений (4.19) и (4.20), то согласно установленной теореме, заменяя в (4.45) величины s_k и u_ν их значениями из уравнений (4.40), мы получим новый интеграл уравнений движения (4.19) при связях (4.20):

$$-\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\nu} + \sum_{i=1}^{m} B_{\nu i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)\frac{\partial H}{\partial p_\nu} + \sum_{\nu=m+1}^{n}\left[E_\nu(H) - \Delta_\nu\right]\frac{\partial f}{\partial p_\nu} = \text{const}$$

или, вводя оператор $E_\nu(f)$ и пользуясь обобщенными скобками Пуассона (4.36),

$$-\sum_{\nu=m+1}^{n}\left[E_\nu(f)\frac{\partial H}{\partial p_\nu} - \frac{\partial f}{\partial p_\nu}E_\nu(H)\right] - \sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_\nu}\Delta_\nu = \text{const}. \tag{4.46}$$

Заметим, что этому новому интегралу на основании тождества (4.34) можно придать вид:

$$E_{n+1}(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} B_{n+1,i}\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial t} = \text{const} \tag{4.47}$$

если мы примем, что в случае склерономной системы, коэффициенты неголономных связей $B_{n+1,i}=0$. Однако, следует иметь в виду, что существуют примеры неголономных систем, уравнения связей которых не содержат явно времени, а все коэффициенты $B_{\nu i}$ либо постоянны, либо являются функциями координат, причем $B_{n+1,i}\neq 0$.*

Таким образом, *если* $f(t;\ q_\kappa;p_\nu)=\text{const}$ *есть интеграл уравнений движения неголономной (склерономной) системы (4.19) и (4.20), то* $\frac{\partial f}{\partial t}=c$ *будет также интегралом этой системы, а следовательно, интегралами будут и* $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c_1, \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}=c_2$ *и т. д. Если же функция* f *явно от* t *не зависит, то тогда равенство (4.47) уже не будет интегралом системы (4.19) и (4.20).*

Положим теперь, что некоторые из координат q явно не входят в уравнения движения (4.19) и уравнения (4.20), т. е. некоторые координаты q являются циклическими для расширенной системы (4.38) и (4.39). Пусть циклическими будут первые к координат $q_1, q_2,..., q_\kappa$ $(\kappa < n)$. В этом случае расширенная система дает к первых интегралов:

$$s_\rho = c_\rho = \text{const}, \quad (\rho = 1, 2, ..., \kappa). \tag{4.48}$$

Если в этих интегралах заменить s_ρ их значениями из равенств (4.40), в которых $f\ (t;\ q_\kappa;\ p_\nu) = \text{const}$ есть интеграл уравнений (4.19) и (4.20), то равенства (4.48) будут выражать собою вообще к новых интегралов системы (4.19) и (4.20). Выполняя эту замену, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial q_\rho} = c_\rho = \text{const}, \quad (\rho = 1,2, ..., \kappa). \tag{4.49}$$

Таким образом, если $f\ (t;\ q_1,\ q_2,\ ...;\ q_n; p_{m+1}, ..., p_n) = \text{const}$ есть интеграл уравнений (4.19) и (4.20), а q_ρ $(\rho = 1,2, ..., \kappa)$ суть циклические координаты расширенной системы (4.38) и (4.39), то интегралами уравнений движения неголономной системы, будут, вообще говоря, также и равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial q_\rho} = c_\rho\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q_\rho \partial q_\mu} = c_{\rho\mu}\ , \ ... \ (\rho,\mu, ... = 1,2, ..., \kappa). \tag{4.50}$$

§ 31. Теорема о свойствах интегралов уравнений Чаплыгина. В § 25 мы доказали теорему о свойствах интегралов лагранжевых уравнений для голономных неконсервативных систем, аналогичную классической теореме Пуассона.

Покажем, что подобную теорему о свойствах интегралов можно установить и для динамических уравнений Чаплыгина:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = P_\nu, \quad (\nu = m+1,\ m+2, ...,n) \tag{4.12}$$

$$P_\nu = Q_\nu + \sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n+1}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot q_\sigma}\right)\left(\frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot q_\rho.$$

* См. Т. Леви—Чивита и У. Амальди. Курс теоретической механики, т. II, ч. 1, 1951, стр. 420 (примечания редактора).

Эти уравнения, число которых равно числу степеней свободы системы, позволяют независимо от кинематических связей (4.2) найти $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$, после чего из (4.2) можно найти остальные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

В переменных q_ν, $p_\nu = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$ уравнения Чаплыгина (4.12) могут быть записаны в виде

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \dot{p}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} + Q^*_\nu + \sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{\rho=m+1}^{n+1} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) \left(\frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_\nu}\right) \frac{\partial H}{\partial p_\rho},$$

$$(\rho = m+1, \ldots, n). \tag{4.51}$$

где $\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)$, Q^*_ν, $H = \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot{q}_\nu - T$ выражены через переменные q_{m+1}, $q_{m+2}, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_n, t$.

1. Величины $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_n$ мы можем рассматривать как функции импульсов $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$ и наоборот; H будет квадратичной функцией переменных p_ν $(\nu = m+1, \ldots, n)$.

Положим, что нам известен некоторый первый интеграл φ $(t;\ q_{m+1}, \ldots, q_n;\ \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n) = \text{const}$ уравнений (4.12). Тогда, если ввести в рассмотрение функцию Гамильтона H $(t;\ q_\nu;\ p_\nu)$, то функция φ_0 должна удовлетворять тождественно условию:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q_\rho} \dot{q}_\rho + \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_\rho} \left(\frac{\partial T}{\partial q_\rho} + P_\rho\right) \equiv 0, \tag{4.52}$$

где φ_0 $(t;\ q_{m+1}, \ldots, q_n;\ \ldots, p_{m+1}, \ldots, p_n)$ обозначает функцию, полученную из φ исключением скоростей $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_n$ при помощи уравнений $p_\nu = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$.

Далее, вводя избыточные переменные $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_n$ и полагая

$$L = \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} \dot{u}_\rho + \sum_{\rho=m+1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_\rho} + P_\rho\right) u_\rho, \quad \dot{u}_\rho = \frac{du_\rho}{dt}, \tag{4.52'}$$

мы можем заменить систему (4.12) лагранжевыми уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{\partial \dot{u}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial u_\nu} = 0, \quad (\nu = m+1, \ldots, n) \tag{4.53}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0, \quad (\nu = m+1, \ldots, n) \tag{4.54}$$

из которых последние $n-m$ уравнений являются вспомогательными и служат для определения избыточных переменных u_ν.

Интересно заметить, что дополнительную систему (4.54) мы можем рассматривать как $n-m$ дополнительных дифференциальных связей, которые нужно наложить на неголономную систему, чтобы она после наложения этих связей могла рассматриваться как голономная консервативная система (дополнительные связи неголономные системы голономизируют). Функцию $L\ (t;\ \dot q_\nu;\ q_\nu;\ \dot u_\nu;\ u_\nu)$ можно было бы назвать голономизированным кинетическим потенциалом рассматриваемой неголономной системы.

В развернутом виде уравнения (4.54) перепишутся так:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_j\,\partial \dot q_\nu}\dot u_j+\frac{\partial^2 T}{\partial q_j\,\partial \dot q_\nu}u_j+\frac{\partial P_j}{\partial \dot q_\nu}u_j\right)-\sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_j\,\partial q_\nu}\dot u_j+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 T}{\partial q_j\,\partial q_\nu}u_j+\frac{\partial P_j}{\partial q_\nu}u_j\right)=0,\ (\nu=m+1,\ \dots,\ n). \tag{4.54'}$$

2. Чтобы доказать для уравнений (4.12) теорему, аналогичную теореме Пуассона, установим предварительно одно интересное свойство, которым обладает дополнительная система (4.54). Это свойство можно формулировать в виде предложения:

Лемма. Если $\varphi\ (t;\ q_{m+1},\ \dots,\ q_n;\ \dot q_{m+1},\ \dots,\ \dot q_n)=\mathrm{const}$ *есть интеграл системы уравнений (4.12), то система уравнений (4.54') удовлетворяется значениями:*

$$u_\nu=\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial \dot q_j}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\,\partial p_\nu},\quad (\nu=m+1,\ \dots,\ n). \tag{4.55}$$

Доказательство ничем не отличается от такого же для установленной нами леммы в § 25 главы III.

Вводя в уравнения (4.55) функцию φ_0 вместо функции φ, мы можем их переписать так:

$$u_\nu=\frac{\partial\varphi_0}{\partial p_\nu},\quad (\nu=m+1,\ \dots,\ n). \tag{4.55'}$$

Дифференцируя эти уравнения по времени, заменяя $\dot p_\nu$ их значениями из уравнений (4.12), имея в виду тождество (4.52), получим после простых преобразований равенства:

$$\dot u_\nu=-\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_j}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\,\partial p_\nu}-\sum_{j,k=m+1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\,\partial p_\nu}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_j\,\partial q_k}+\frac{\partial P_k}{\partial q_j}\right)u_k,$$

$$(\nu=m+1,\ \dots,\ n), \tag{4.56}$$

где

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_j}=\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}-\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial \dot q_k\,\partial q_j}u_k,\ (j=m+1,\ \dots\ n). \tag{4.56'}$$

Подставляя найденные выражения для u_ν, $\dot u_\nu$ $(\nu=m+1,\ \dots,\ n)$ из (4.55') и (4.56) в уравнения (4.54'), имея при этом в виду соотношения

$$\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_\nu\,\partial \dot q_j}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\,\partial p_k}=\begin{cases}1 \text{ при } k=\nu\\ 0 \text{ при } k\neq\nu,\end{cases} \tag{4.57}$$

преобразуем их в следующие:

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\nu}\right)+\sum_{j=m+1}^{n}\left\{\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\rho}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho\,\partial p_j}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_j\,\partial q_\nu}+\right.$$

$$+\sum_{\rho,k=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi_0}{\partial p_\rho}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\,\partial p_j}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_j\,\partial q_\nu}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_k\,\partial q_\rho}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial P_\rho}{\partial \dot q_k}\right)-\frac{\partial\varphi_0}{\partial p_j}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_j\,\partial q_\nu}+\frac{\partial P_j}{\partial q_\nu}\right)\Bigg\}=0,\ (\nu=m+1,\ \dots,\ n).$$

Выполняя в последних равенствах дифференцирование по t, а затем имея в виду, что в силу уравнений (4.51), скорости $\dot q_\nu$ ($\nu=m+1, \dots, n$) нужно рассматривать как функции t, q_i, p_i ($i=m+1, \dots, n$) получим тождества:

$$-\frac{\partial}{\partial q_\nu}\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i}\dot q_i+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi_0}{\partial p_i}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}+P_i\right)\right\}\equiv 0,$$

$$(\nu=m+1,\ \dots,\ n).$$

Таким образом, всякому первому интегралу уравнений Чаплыгина (4.12) соответствует решение (4.55) дополнительной системы (4.54).

3. Из установленного свойства системы (4.54) непосредственно вытекает теорема, аналогичная теореме Пуассона.

Теорема. Пусть известен некоторый первый интеграл

$$f\,(t:\ q_{m+1},\ \dots,\ q_n;\dot q_{m+1},\ \dots,\ \dot q_n;\ u_{m+1},\ \dots,\ u_n;\ \dot u_{m+1},\ \dots,\ \dot u_n)=$$
$$=\mathrm{const}. \qquad (4.58)$$

расширенной системы (4.53) *и* (4.54). *Если в этом интеграле заменить величины* u_ν, $\dot u_\nu$ ($\nu=m+1, \dots, n$) *их значениями из* (4.55) *и* (4.56), *в которых* $\varphi=\mathrm{const}$ *есть интеграл уравнений* (4.12), *то равенство* (4.58) *будет выражать вообще некоторый новый интеграл уравнений* (4.12).

Таким образом к уравнениям Чаплыгина для неголономных неконсервативных систем применим метод интеграции, основанный на последовательном применении теоремы, аналогичной теореме Пуассона.

4. *Частные случаи.* 1) Если уравнения (4.12) не содержат явно времени t, а функция $\varphi\ (t;\ q_\nu;\ \dot q_\nu)=\mathrm{const}$ есть интеграл этих уравнений, то их интегралом будет также и равенство

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=c_1=\mathrm{const}. \qquad (4.59)$$

Действительно в этом случае расширенная система (4.53) и (4.54) всегда допускает первый интеграл вида

$$\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\nu}\dot q_\nu+\frac{\partial L}{\partial \dot u_\nu}u_\nu\right)-L=\mathrm{const}. \qquad (4.60)$$

Если в (4.60) заменить u_ν, $\dot u_\nu$ ($\nu=m+1. \dots, n$) их значениями из (4.55) и (4.56), то равенство (4.60) будет выражать вообще новый интеграл системы (4.12). Этому новому интегралу, на основании тождества (4.52) и соотношений (4.57), можно придать вид

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}=\mathrm{const}. \qquad (4.61)$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}-\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_\rho\partial t}u_\rho,$$

или, так как по предположению T не зависит явно от t,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial t},$$

которое вместе с (4.61) показывает, что $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\text{const}$ есть тоже интеграл системы (4.12).

Итак, *если* $\varphi(t;\ q_\nu;\ \dot q_\nu)=\text{const}$ *есть интеграл системы (4.12), не содержащий явно времени* t, *то интегралами этой системы будут также и равенства:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=c_1,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c_2,\ \dots$$

Если же функция φ *явно от* t *не зависит, то тогда равенство (4.59) уже не будет интегралом системы уравнений (4.12).*

2) Если уравнения (4.12) не содержат явно координат q_{m+1}, q_{m+2}, ..., q_{m+k} $(k\leqslant n-m)$, а функция $\varphi(t;\ q_{m+1},\ \dots,\ q_n;\ \dot q_{m+1},\ \dots,\ \dot q_n)=$ $=\text{const}$ есть интеграл этих уравнений, то их интегралами будут также и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}=c_\sigma=\text{const},\quad (\sigma=m+1,\ \dots,\ m+k). \tag{4.62}$$

Действительно, беря частную производную по q_σ $(\sigma=m+1,\ \dots,\ m+k)$ от левой части тождества (4.52), получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\sigma}\right)+\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_\rho}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\sigma}\right)\dot q_\rho+\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_\rho}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\sigma}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial q_\rho}+P_\rho\right)\equiv 0,$$

которое вместе с равенством $\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}$ $(\sigma=m+1,\ \dots,\ m+k)$, вытекающем из формулы (4.56′), показывает, что $\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}=\text{const}$ есть тоже интеграл системы (4.12).

Отсюда мы видим, что если q_{m+1}, q_{m+2}, ..., q_{m+k} суть циклические координаты расширенной системы (4.53) и (4.54), а $\varphi(t;\ q_\nu;\ \dot q_\nu)=\text{const}$ есть интеграл уравнений Чаплыгина (4.12), то их интегралами будут также и равенства:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}=c_\sigma,\ (\sigma=m+1,\ m+2,\ \dots,\ m+k),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_\sigma\partial q_\rho}=c_{\sigma\rho},\ \dots,\ (\sigma,\ \rho,\ \dots=m+1,\ m+2,\ \dots,\ m+k).$$

Если же функция φ явно от координат q_ρ ($\rho = m+1, \ldots, m+k$) не зависит, то $\frac{\partial\varphi}{\partial q_\rho} = 0$, и тогда выражение (4.62) уже не будет интегралом уравнений движения (4.12).

5. Предположим теперь, что все координаты q_ν ($\nu = m+1, \ldots, n$) явно не входят в уравнения (4.12), так что они имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} = P_\nu, \quad (\nu = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n). \tag{4.63}$$

Рассматриваемый частный случай характерен тем, что кинетический потенциал $L = L\,(t;\ \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n;\ u_{m+1}, \ldots, u_n;\ \dot{u}_{m+1}, \ldots, \dot{u}_n)$, т. е. все основные координаты q_ν ($\nu = m+1, \ldots, n$) будут циклическими для расширенной системы уравнений (4.53) и (4.54). Тогда дополнительная система (4.54) даст:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} = 0, \quad (\nu = m+1, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} = c_\nu, \quad (\nu = m+1, \ldots, n) \tag{4.64}$$

где c_ν — произвольные постоянные; эти уравнения дают $n-m$ интегралов нашей расширенной системы.

Используя эти $n-m$ интегралов, можно понизить порядок системы (4.53) и (4.54). Для этой цели введем функцию Рауса

$$R = L - \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\,\dot{q}_\nu. \tag{4.65}$$

При помощи $n-m$ уравнений (4.64) можно выразить величины $\dot{q}_\nu$ ($\nu = m+1, \ldots, n$) и, следовательно, R как функцию переменных: $t,\ u_{m+1}, \ldots, u_n,\ \dot{u}_{m+1}, \ldots, \dot{u}_n,\ c_{m+1}, \ldots, c_n$. Варьируя равенство (4.65) получим такие соотношения:

$$\frac{\partial L}{\partial u_\nu} = \frac{\partial R}{\partial u_\nu}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_\nu} = \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_\nu}, \quad (\nu = m+1, \ldots, n), \tag{4.66}$$

$$\dot{q}_\nu = -\frac{\partial R}{\partial c_\nu}, \quad (\nu = m+1, \ldots, n). \tag{4.67}$$

Оставшиеся уравнения расширенной системы (4.53) и (4.54) перепишутся после этого следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial R}{\partial \dot{u}_\nu} - \frac{\partial R}{\partial u_\nu} = 0, \quad (\nu = m+1, \ldots, n) \tag{4.68}$$

т. е. мы получили новую систему $n-m$ уравнений Лагранжа, в которых теперь роль кинетического потенциала выполняет функция R; эти уравнения содержат только избыточные координаты u_ν ($\nu = m+1,\ m+2, \ldots, n$), их производные и произвольные постоянные c_ν.

Если после решения системы (4.68) переменные $u_\nu (\nu = m+1,...,n)$ будут определены как функции t, то основные переменные q_ν $(\nu = m+1, ..., n)$ можно будет найти из уравнений:

$$q_\nu = -\int \frac{\partial R}{\partial c_\nu} dt + b_\nu, \ (b_\nu = \text{const}), (\nu = \overline{m+1, n}). \tag{4.69}$$

Отсюда мы видим, что полный процесс интегрирования системы уравнений (4.63) приводится к задаче интегрирования вспомогательной системы $n-m$ лагранжевых уравнений (4.68) и к вычислению $n-m$ квадратур (4.69).

Таким образом, *если известно частное решение u_{m+1} u_{m+2}, ..., u_n вспомогательной системы (4.68), то, вводя определяемые ими значения величин u_{m+1} u_{m+2}, ..., u_n в уравнения (4.69), мы получим общее решение первоначальной системы (4.63).*

Что касается уравнений типа (4.68) или союзных им уравнений Гамильтона, то теория этих уравнений, как известно, разработана во многих деталях.

6. *Пример на применение метода избыточных переменных к неголономным системам.* В качестве простого примера рассмотрим задачу С. А. Чаплыгина о движении острорежущего колесика с двумя степенями свободы[1].

Вообразим твердое тело, опирающееся на горизонтальную плоскость тремя точками; две из этих точек представляют свободно скользящие ножки; третья есть точка прикосновения острого колесика, горизонтальная ось которого неизменно скреплена с телом; допустим, что колесико не может скользить в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Положение тела определяем горизонтальными координатами ξ, η точки прикосновения A колесика и углом φ, который составляет ось Ax связанная с телом и лежащая в плоскости колесика, с неподвижной осью $O\xi$. Горизонтальная проекция центра тяжести тела определяется ее координатами α и β по подвижным осям. Исследуем движение тела по инерции.

Примем за координаты системы $\xi = q_1$, $\eta = q_2$, $\varphi = q_3$ и $q = q_4$, где q есть длина траектории точки A. Тогда, нетрудно убедиться, что связи данной системы сводятся к двум неинтегрируемым соотношениям:

$$\dot\xi = \dot q \cos\varphi, \ \dot\eta = \dot q \sin\varphi \tag{4.70}$$

Первоначальное выражение живой силы T_0, составленного без учета связей (4.70), определится формулой

$$2T_0 = [\dot\xi - \dot\varphi(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)]^2 + [\dot\eta + \dot\varphi(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)]^2 + \\ + k^2\dot\varphi^2, \tag{4.71}$$

где κ — радиус инерции тела около вертикали, проходящей через центр тяжести (для простоты приняли массу тела $m = 1$).

Формула (4.71) дает вместе с уравнениями связей (4.70) приведенную формулу живой силы:

$$2T = \dot q^2 - 2\beta\dot q\dot\varphi + (\alpha^2 + \beta^2 + \kappa^2)\dot\varphi^2 \tag{4.72}$$

---

[1] С. А. Чаплыгин. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Полное собран. сочин., т. 1, 1933, стр. 212.

и, кроме того,

$$\frac{\partial T_0}{\partial \xi}=\dot{\xi}-\dot{\varphi}(\alpha\sin\varphi+\beta\cos\varphi)=\dot{q}\cos\varphi-\dot{\varphi}(\alpha\sin\varphi+\beta\cos\varphi),$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\eta}}=\dot{\eta}+\dot{\varphi}(\alpha\cos\varphi-\beta\sin\varphi)=\dot{q}\sin\varphi+\dot{\varphi}(\alpha\cos\varphi-\beta\sin\varphi). \qquad (4.73)$$

Так как движение тела происходит по инерции, то обобщенные силы $Q_3=Q_4=0$. Коэффициенты $B_{\nu\sigma}$ уравнений связей (4.70), имеют вид:

$$B_{31}=0,\ B_{41}=\cos\varphi,\ B_{32}=0,\ B_{42}=\sin\varphi.$$

Вычисляя P_ν $(\nu=3,4)$ уравнений (4.12), получим:

$$P_3=-\alpha\dot{\varphi}\dot{q},\quad R_4=\alpha\dot{\varphi}^2. \qquad (4.74)$$

Дифференциальные уравнения движения в форме Чаплыгина запишутся так:

$$\frac{d}{dt}\left[-\beta\dot{q}+(\alpha^2+\beta^2+\kappa^2)\dot{\varphi}\right]=-\alpha\dot{\varphi}\dot{q},\quad \frac{d}{dt}\left[\dot{q}-\beta\dot{\varphi}\right]=\alpha\dot{\varphi}^2. \qquad (4.75)$$

Отсюда мы видим, что рассматриваемая неголономная система склерономна, причем координаты φ и q не входят явно в уравнения движения, т. е. здесь имеет место случай, когда все основные координаты q_ν $(\nu=3,4)$ — циклические для расширенной системы уравнений (которые нами не выписаны).

Решим нашу весьма простую задачу сначала методом, который основан на последовательном применении теоремы, аналогичной теореме Пуссона.

Нетрудно убедиться, что уравнения движения (4.75) допускают первый интеграл

$$\Phi=\frac{\dot{q}-\beta\dot{\varphi}}{\sqrt{\alpha^2+\kappa^2}}\sin\left(\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\alpha^2+\kappa^2}}\right)+\dot{\varphi}\cos\left(\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\alpha^2+\kappa^2}}\right)=c_1=\text{const}. \qquad (4.76)$$

Применяя к этому интегралу формулу (4.62), мы получим новый интеграл

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=\frac{\alpha(\dot{q}-\beta\dot{\varphi})}{\alpha^2+\kappa^2}\cos\left(\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\alpha^2+\kappa^2}}\right)-\frac{\alpha\dot{\varphi}}{\sqrt{\alpha^2+\kappa^2}}\sin\left(\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\alpha^2+\kappa^2}}\right)=c_2. \qquad (4.77)$$

Продолжая применение формулы (4.62) к интегралу (4.77), найдем еще интегралы, но они являются следствием предыдущих.

Возвращаясь снова к уравнениям (4.75), можно убедиться, что они допускают первый интеграл

$$F=\dot{\varphi}\,e^{\frac{\alpha(q-\beta\varphi)}{\alpha^2+\kappa^2}}+\frac{\sqrt{\psi}+\dot{q}-\beta\dot{\varphi}}{\sqrt{\psi}-\dot{q}+\beta\dot{\varphi}}\,e^{-\frac{2\alpha t\sqrt{\psi}}{\alpha^2+\kappa^2}}=c=\text{const}, \qquad (4.78)$$

где $\psi=\dot{q}^2-2\beta\dot{\varphi}\dot{q}+(\alpha^2+\beta^2+\kappa^2)\dot{\varphi}^2$.

Прилагая к этому интегралу формулы (4.60) и (4.62), получим два таких интеграла:

$$\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{\alpha\dot{\varphi}}{\alpha^2+\kappa^2}e^{\frac{\alpha(q-\beta\varphi)}{\alpha^2+\kappa^2}}=c_3, \qquad (4.79)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-\frac{2\alpha\sqrt{\psi}}{\alpha^2+\kappa^2}\,\frac{\sqrt{\psi}+\dot{q}-\beta\dot{\varphi}}{\sqrt{\psi}-\dot{q}+\beta\dot{\varphi}}\,e^{-\frac{2\alpha t\sqrt{\psi}}{\alpha^2+\kappa^2}}=c_4 \qquad (4.80)$$

Ясно, что пять составленных, таким образом, интегралов (4.76), (4.77), (4.78), (4.79) и (4.80), не будут различными. Действительно, легко убедиться, что между названными интегралами имеет место следующее тождественное соотношение:

$$4\left[\alpha^2 C_1^2+(\alpha^2+\kappa^2)C_2^2\right]\left[(\alpha^2+\kappa^2)\,C_3-\alpha C\right]^2=\alpha^2(\alpha^2+\kappa^2)\;C_4^2.$$

Стало быть, эти пять интегралов приводятся к четырем. Четыре интеграла (4.76), (4.77), (4.79) и (4.80) позволяют определить неизвестные φ, q, $\dot q$, $\dot\varphi$ в функции t и четырех произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4. Это очевидно, и будут те самые интегралы, которые возможно получить непосредственным интегрированием уравнений движения (4.75).

Подойдем теперь к той же задаче с методом, который был изложен в $n^0 5$.

Составляем по формуле (4.52[1]) кинетический потенциал L. В данном случае, принимая во внимание формулы (4.72) и (4.74), будем, очевидно, иметь:

$$L=\gamma\dot\varphi\dot u_3-\beta\dot q\dot u_3-\beta\dot\varphi\dot u_4+\dot q\,\dot u_4-\alpha\,\dot\varphi\,\dot q u_3+\alpha\dot\varphi^2 u_4\,,$$

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\kappa^2, \tag{4.81}$$

где u_3 и u_4 — избыточные переменные. Видим, что функция L не зависит явно от φ и q. Следовательно, расширенная система уравнений (которые за ненадобностью мы не выписываем), допускает два первых интеграла вида

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=\gamma\dot u_3-\beta\,\dot u_4-\alpha\dot q\,u_3+2\alpha\,\dot\varphi\,u_4=a,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot q}=\dot u_4-\beta\,\dot u_3-\alpha\,\dot\varphi\,u_3=b. \tag{4.82}$$

Далее, составляем функцию Рауса R (4.65); имеем:

$$R=\alpha\,(\dot\varphi\,\dot q u_3-\dot\varphi^2 u_4). \tag{4.83}$$

Пользуясь интегралами (4.82), мы должны из функции R исключить скорости $\dot\varphi$ и $\dot q$, соответствующие циклическим координатам φ и q (расширенной системы); тогда получим необходимое нам выражение для функции R:

$$R=\frac{1}{\alpha u_3^2}\left(\dot u_4-\beta\,\dot u_3-b\right)\left[\left(\gamma u_3-\beta u_4\right)\dot u_3+\left(u_4-\beta u_3\right)\dot u_4-\right.$$

$$\left.-\,bu_4-\alpha\,u_3\right]. \tag{4.84}$$

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению частного решения $u_3\ (t)$ и $u_4\ (t)$ системы уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial\dot u_3}-\frac{\partial R}{\partial u_3}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial\dot u_4}-\frac{\partial R}{\partial u_4}=0, \tag{4.85}$$

и к вычислению квадратур

$$\varphi=-\int\frac{\partial R}{\partial a}\,\mathrm{d}t+\mathrm{const},\qquad q=-\int\frac{\partial R}{\partial b}\,\mathrm{d}t+\mathrm{const}. \tag{4.86}$$

Для решения системы (4.85) можно воспользоваться, например, методом Гамильтона—Якоби, построив соответствующее этой системе уравнение в частных производных. После того как проинтегрированы уравнения (4.85) и вычислены φ и q, значения координат ξ и η определятся из уравнений:

$$\xi=\int\cos\varphi dq,\qquad \eta=\int\sin\varphi\, dq. \tag{4.87}$$

Соответствующие вычисления, проделанные для рассматриваемой неголономной системы, дают решение задачи, совпадающее с решением данным С. А. Чаплыгиным.

§ 32. Обобщение теоремы Пуассона на случай любой системы дифференциальных уравнений. В предыдущих параграфах (§§ 24, 25, 30, 31) мы показали, что вводя избыточные переменные, можно обобщить классическую теорему Пуассона на случай неконсервативных механических систем (в том числе и с линейными неголономными связями). В данном параграфе мы доказываем аналогичную теорему для любой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем самым получается возможность непосредственного применения метода Пуассона к интегрированию уравнений движения механических систем, стесненных любыми кинематическими связями.

Вопрос о применении теоремы Пуассона к любым системам обыкновенных дифференциальных уравнений исследовался А. Булем[1] и П. Аппелем[2]. Оба автора применяли иные сравнительно с предлагаемыми нами методы и полученные ими результаты формулируются иначе чем в данной работе.

А. Буль рассматривал систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}, \tag{a}$$

где X_i суть функции x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, и доказал такую теорему: всегда можно найти n функций Y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ переменных x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ таких, что, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\text{const}$ представляет собою какой—либо интеграл системы уравнений (a), то выражение

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=\text{const} \tag{в}$$

будет другим интегралом этой системы. При этом неизвестные функции Y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ должны быть определены из системы n уравнений с частными производными:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial Y_k}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n} Y_i\frac{\partial X_k}{\partial x_i},\quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{c}$$

интегрирование которых в общем случае, требует предварительного интегрирования первоначальной системы уравнений (a).

---

[1] A. Buhl. Svr les formes lineares aux dérivées partielles d'une intègrale d'une systémes d'equations differentielles simultanees qui sont aussi des intègrales de ce système. Compt. Rend., m. 132 стр. 313—316, 1901.

[2] P. Appell. Sur le the'oreme de Poisson et un thèoreme de Buhl. Compt. Rend. m. 132, стр. 317—319, 1901.

Теорема Буля включает в себе теорему Пуассона как частный случай. Но, с другой стороны, как показал П. Аппель в вышеприведенной статье, теорему эту можно вывести также и из теоремы Пуассона.

Далее мы докажем более общую теорему, аналогичную классической теореме Пуассона, из которой теорема Буля получается как частный случай.

1. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\dot{x}_k = f_k\,(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4.88}$$

В форме (4.88) можно записать любую систему дифференциальных уравнений, разрешенную относительно старших производных искомых функций. Вводя по способу Лиувилля[1] избыточные переменные y_1, y_2, ..., y_n и полагая

$$H = \sum_{i=1}^{n} f_i\, y_i \tag{4.89}$$

мы можем заменить систему (4.88) каноническими уравнениями

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k},\quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{4.90}$$

$$\dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k},\quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{4.91}$$

из которых последние n уравнений служат для определения y_1, y_2, ..., y_n.

В развернутом виде вспомогательная система уравнений (4.91) перепишется так:

$$\dot{y}_k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\, y_i = 0,\quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4.92}$$

Положим, что мы имеем некоторый интеграл $\varphi\,(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \mathrm{const}$ уравнений (4.88). Тогда функция φ будет удовлетворять тождественно условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, f_i = 0. \tag{4.93}$$

Кроме того, докажем, что *если* $\varphi\,(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \mathrm{const}$ *есть интеграл системы* (*4.88*), *то вспомогательная система уравнений* (*4.92*) *удовлетворяется значениями*

$$y_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},\quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4.94}$$

---

[1] П. Аппель. Руководство теоретической (рациональной) механики, т. II, 1911, стр. 510.

Действительно, заменяя в уравнениях (4.92) y_k их выражениями (4.94), имея при этом в виду уравнения (4.88), будем иметь

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} f_i\right) \equiv 0.$$

2. Допустим теперь, что нам известны два интеграла расширенной системы (4.90) и (4.91), вида:

$$\begin{aligned} &\varphi\,(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \text{const}, \\ &\psi\,(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ y_1\ y_2\ \ldots,\ y_n) = \text{const}. \end{aligned} \tag{4.95}$$

Ясно, что $\varphi = \text{const}$ является одновременно и интегралом первоначальной системы (4.88). Тогда, согласно классической теореме Пуассона, выражение

$$(\varphi,\ \psi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\psi}{\partial y_i} = \text{const} \tag{4.96}$$

будет тоже интегралом этой расширенной системы уравнений.

В частности может случиться, что величины $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ не входят явно в функцию $(\varphi,\ \psi)$, но эта функция содержит явно переменные $x_1,\ \ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ t$. Тогда в этом случае равенство (4.96) определит некоторый другой интеграл первоначальной системы (4.88).

В общем же случае функция $(\varphi,\ \psi)$ может зависеть от переменных $x_i,\ y_i,\ t$. Тогда, имея в виду, что $\varphi = \text{const}$ есть интеграл уравнений (4.88) и, следовательно, имеют место соотношения (4.94), мы можем при помощи этих соотношений исключить из равенства (4.96) все избыточные переменные y_i $(i = 1, 2, \ldots,\ n)$. В результате равенство (4.96) будет содержать только переменные $x_i,\ t$ и будет выражать вообще некоторый новый интеграл первоначальной системы уравнений (4.88).

Заметим еще, что новый интеграл первоначальной системы (4.88) можно получить и несколько иным путем, а именно, не прибегая к классической теореме Пуассона.

Действительно, если в интеграле (4.95) расширенной системы (4.90) и (4.91) заменить все избыточные переменные y_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ их значениями (4.94), где $\varphi = \text{const}$ есть интеграл уравнений (4.88), то равенство

$$\psi\left(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) = \text{const} \tag{4.97}$$

будет выражать вообще некоторый новый интеграл системы (4.88).

Резюмируя, мы можем полученный результат высказать следующим образом:

Теорема. Если известен один интеграл $\varphi\ (t;\ x_i) = \text{const}$ *системы уравнений (4.88), а также известен некоторый интеграл* $\psi\ (t;\ x_i;\ y_i) = \text{const}$ *расширенной системы уравнений (4.90) и (4.91), то, вводя определяемые равенствами (4.94) значения величин* y_i *в уравнение (4.96) и в интеграл* $\psi = \text{const}$, *мы получим, вообще говоря, некоторых два новых интеграла первоначальной системы уравнений (4.88).*

Установленное обобщение теоремы Пуассона дает способ, посредством которого по одному известному интегралу расширенной системы (4.90) и (4.91) и одному известному интегралу уравнений (4.88), можно найти второй и третий интеграл системы (4.88), затем четвертый и т. д. и таким образом получить в некоторых благоприятных случаях полную систему независимых интегралов уравнений (4.88).

3. *Частные случаи.* Наиболее важным случаем будет тот, при котором каждая из функций f_k явно не зависит от аргумента t. В этом случае, расширенная система (4.90) и (4.91) всегда дает интеграл вида

$$H = \sum_{i=1}^{n} f_i\, y_i = \text{const}. \tag{4.98}$$

Если известен также интеграл $\varphi(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \text{const}$ уравнений (4.88), то согласно доказанной теореме выражение

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = c = \text{const},$$

будет также интегралом склерономной системы уравнений (4.88). Последнему интегралу, на основании тождества (4.93), можно придать вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \text{const}. \tag{4.99}$$

Таким образом, *если* $\varphi(x_i,\ t) = \text{const}$ *есть интеграл склерономной системы уравнений (4.88), то интегралами этой системы будут также и* $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c_1$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c_2$, ..., ... *и т. д. Если же функция* φ *явно от* t *не зависит, то тогда равенство (4.99) уже не будет интегралом этой системы уравнений.*

Положим теперь, что уравнения (4.88) явно не содержат переменной x_i, т. е. переменная x_i является циклической. В этом случае расширенная система дает интеграл вида:

$$y_i = \text{const}.$$

Допустим, что известен также интеграл $\varphi(t;\ x_i) = \text{const}$ уравнений (4.88). Тогда, на основании установленной выше теоремы, равенство

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = c = \text{const} \tag{4.100}$$

будет другим интегралом этой системы уравнений.

Итак, *если* x_i *есть циклическая переменная и* $\varphi(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = \text{const}$ *есть интеграл системы уравнений (4.88), то интегралами этой системы будут также и* $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = c_1$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = c_2$, и т. д.

4. Покажем теперь, что из установленной нами теоремы в п° 2 теорема А. Буля получается как частный случай.

Для этого ищем в частности интеграл расширенной системы (4.90) и (4.91) в виде

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} Y_i\, y_i = \text{const}, \tag{4.101}$$

где Y_i суть функции только от $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Предположим, что известен также интеграл $\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \text{const}$ системы уравнений (4.88) и, следовательно, имеют место равенства (4.94).

Тогда, согласно доказанной выше теоремы, заменяя в равенстве (4.101) избыточные переменные y_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ их значениями (4.94), получим выражение

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \text{const}, \tag{4.102}$$

которое будет также интегралом системы уравнений (4.88), т. е. получили интеграл, который дает теорема Буля.

Нетрудно установить полученные Булем уравнения (c) для определения функций Y_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Для этого достаточно найти то тождественное соотношение, которому должен удовлетворять интеграл (4.101), расширенной системы (4.90) и (4.91); имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} y_i - Y_k \frac{\partial H}{\partial x_k}\right) \equiv 0,$$

или, заменяя H его значением (4.89),

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n}\left(f_k \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} - Y_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right) y_i \equiv 0.$$

Написав теперь, что последнее тождество выполняется при любых значениях y_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ мы получим n уравнений найденных Булем

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{4.103}$$

для определения функций Y_i.

В частности, если взять вместо уравнений (4.88) канонические уравнения Гамильтона, у которых система функций Y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ зависит от одного интеграла, то как показал А. Буль из его теоремы легко может быть получена классическая теорема Пуассона.

5. Приведем простой пример на применение рассмотренного здесь метода в том случае, когда система дифференциальных уравнений склерономна.

Пусть дана система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_1 = x_3 - 2x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3 - 2x_2, \quad \dot{x}_3 = x_1 - x_3. \tag{4.104}$$

Легко можно убедиться, что эти уравнения допускают интеграл вида

$$\varphi = e^t\,[t x_1 - (t+1)\,x_2 + (t-1)\,x_3] = c_1. \tag{4.105}$$

Применяя к этому интегралу формулу (4.99), мы получим новый интеграл

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = e^t\,[(t+1)\,x_1 - (t+2)\,x_2 + t x_3] = c_2. \tag{4.106}$$

Продолжая применение формулы (4.99) к интегралу (4.106), найдем еще интегралы, но они являются следствием предыдущих. Третий независимый интеграл уравнений (4.104), как нетрудно убедиться, имеет вид

$$f = e^{3t}\,[x_1 + x_2 - x_3] = c;$$

отсюда становится ясно, почему этот интеграл не может быть получен путем дифференцирования из интеграла (4.105).

ГЛАВА V.

НАИБОЛЕЕ ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ.

§ 33. Введение. По вопросу о составлении дифференциальных уравнений движения для несвободных механических систем имеется довольно обширная литература. Однако, нам кажется, прежнее решение этого вопроса является еще недостаточно полным, а может быть и недостаточно общим. Например, теоретическая сторона неголономных систем со связями какого угодно вида относительно скоростей изучена далеко не полно. Это видно хотя бы из того, что до самого последнего времени аналитическая динамика не обладала уравнениями движения таких систем, не содержащих неопределенных множителей[1].

Что касается уравнений движения с неопределенными множителями, то для неголономных систем с нелинейными связями такие уравнения впервые были получены в 1911 г. П. Аппелем, из предложенного им принципа „минимума функции R" (P. Appell. Sur les liaisons exprimées par des relations non lineaires entre les vitesses, Compt. Rend. т. 152, 1911). В том же году он привел и первый пример возможности движения с неголономной связью, выражаемой нелинейным соотношением между производными от координат (P. Appell, Exemple de mouvement d'un point assujettie a' une liaison exprimeè par une relations non linèaire entre les composantes de la vitesse, Rendiconti del Circolo di Palermo, т. 32, 1911). Нужно отметить, что во всех этих исследованиях П. Аппель ограничивается рассмотрением обычных (геометрических и кинематических) связей, не касаясь других родов совершенных связей, осуществляемых динамически, о которых будет сказано ниже.

Значительный вклад в теорию неголономных систем с нелинейными связями внес Н. Г. Четаев разрешивший вопрос о совместимости двух основных принципов аналитической динамики — принципа Даламбера—Лагранжа и принципа Гаусса — в системах с неголономными нелинейными связями (Н. Г. Четаев, О принципе Гаусса, Извест. физ. матем. об-ва при Казанском университете, 1934). Н. Е. Кочин в работе „Об освобождении механ. систем" (ПММ, т 10, 1946 г.) вводит определение возможных перемещений, которое имеет принципиально важное значение для динамики неголономных систем с нелинейными связями.

В смысле постановки проблемы весьма важны исследования А. Пшеборского (A. Przeborski, Die allgemeinsten Gleichungen der klass. Dy-

[1] Относительно уравнений движения для неголономных систем с нелинейными связями без неопределенных множителей мы отсылаем к нашей статье (Об уравнениях движения неголономных систем с нелинейными связями, Бюллетень САГУ, вып. 23, 1945, Ташкент), а также к более поздней работе Г. С. Погосова (Уравнения движения для неголономных систем с нелинейными связями, Вестник МГУ, №10, 1948).

namik, Math. Zeitsc. т. 36, тетр. 1, стр. 184—194, 1932), который сформулировал задачу о составлении уравнений движения несвободной системы в наиболее общем виде, т. е. когда система подчинена каким угодно голономным и неголономным связям, которые могут быть выражены уравнениями, причем неголономные связи могут быть первого и второго порядка—не обязательно линейные—относительно производных. Основная мысль Пшеборского состоит в том, что при изучении движения несвободной материальной системы не нужно исходить из чисто математической точки зрения, а следует учитывать свойства механического движения, которые реализуются аналитическими связями; причем эта реализация может совершаться различными способами. На это неоднократно обращал внимание Е. Деласу в своих многочисленных работах (E. Delassus. Comptes Rendus, т. 152, стр. 1739—1743, 1911; т. 153, стр. 707—710, 626—628, 1911; т. 154, стр. 964—967, 1912; Annales de l'Fcole Normale, т. 29, стр. 305—370, 1912; т 30, стр. 489—520, 1913;—Leçons Sur les dynamique, Paris, 1913), посвященных вопросу материального осуществления связей, в которых, кроме того, он исследовал с теоретической стороны вопрос возможности существования систем с нелинейными связями первого порядка в Ньютонианской механике, придя к положительному ответу.

Затем Беген в своей интересной работе (Bèghin, Etude thèorique des compas gyrostatiques Anschutz et Sperry, Compt. Rend. т. 173, стр. 288—290, 1921; и др. статьях), основанной на той же самой точке зрения, исследовал новые связи, которые при постановке соответствующих динамических задач рассматриваются иначе чем обычные связи.

Заметим, что если ограничиваться совершенными связями, то существует важная категория механизмов, в которых связи осуществляются различными способами, такими, которые допускают безусловное приложение основных принципов аналитической динамики, причем в этих связях не может быть абстрагирована форма связи и нельзя удовлетвориться их аналитическим выражением. Это такие связи, которых достигают „подчинением". Согласно П. Аппелю (P. Appell, Sur une forme générale des equations de la dynamique, Mémorial des Scien. Math., Paris §§ 3—5, 1925) имеется подчинение, когда соответствующие связи, вместо того, чтобы реализоваться, например, при помощи двух твердых тел, которые скользят или катятся друг по другу, осуществляют их при помощи соответствующих сил (электромагнитные силы, давление жидкости или газа и т. п.). Такого рода совершенные связи, результируются силами—реакциями связей, которые Béghin называет силами второго типа и возможная работа которых обычно отлична от нуля, если перемещение совместимо со связями.

Положим, что задана некоторая материальная система Σ из N материальных точек M_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), стесненных голономными и неголономными связями. Тогда мы можем предположить, что на эту систему наложены другие связи, осуществляемые при помощи автоматических приспособлений (например, электромагнитных), которые являются источником некоторых сил $\vec{N}_i$, приложенных к точкам M_i системы и совершающих не равную нулю работу при всяких виртуальных перемещениях $\delta\vec{r}_i$, совместимых со связями системы. Эти силы $\vec{N}_i$ принято называть *сервомоторными*[1], а механические прис-

[1] Т. Леви—Чивита и У. Амальди. Курс теоретической механики, т. II ч. 1, 1951, стр. 319.

пособления, осуществляющие их, *сервомоторами.* Осуществляемые таким образом связи можно отличать от обычных связей, называя их *динамическими.*

Сервомоторные силы $\vec{N}_i$ сами по себе, как предназначенные для осуществления связей, принадлежат к классу реакций связей. При постановке же задачи о движении эти силы должны рассматриваться как прямо приложенные к системе, аналогично тому, как это имеет место в случае пассивных сопротивлений и трения.

Сервомоторные силы $\vec{N}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, осуществляющие динамические связи, наложенные на материальную систему, не удовлетворяют всем условиям характеризующим обычные гладкие связи, так как сумма элементарных работ этих сил не равна нулю при всяком бесконечно малом перемещении, совместимом со связями. Таким образом, при исследовании движения системы Σ, находящейся под действием (неосвобождающих) связей, не только геометрических и кинематических, но также и динамических, мы можем ее рассматривать как подчиненную только обычным связям (геометрическим и кинематическим) и находящейся под действием всех активных сил $\vec{F}_i$ и сервомоторных сил $\vec{N}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Следовательно, при наличии динамических связей, общее уравнение Даламбера—Лагранжа будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i + \vec{N}_i - m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}, \delta\vec{r}_i\right) = 0; \qquad (a)$$

это уравнение должно иметь место при всех виртуальных перемещениях $\delta\vec{r}_i$ совместимых со связями.

В общем случае силы $\vec{N}_i$, по крайней мере некоторые из них, подобно любым другим реакциям связей, являются неизвестными, так как известны только физические условия или механические приспособления, порождающие их.

Допустим, для определенности, что рассматриваемая механическая система Σ, если отвлечься от динамических связей, является голономной с n степенями свободы, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Кроме того, предположим, например, что сервомоторные силы $\vec{N}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, действующие на нее, выражаются известными функциями от k параметров $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k$, которые следует рассматривать при всяком движении системы как функции времени t, вид которых заранее неизвестен. При таком предположении уравнение (a) равносильно n лагранжевым уравнениям, содержащим, помимо величин q_i, $\dot{q}_i$ и $\ddot{q}_i$, еще k параметров σ, являющихся тоже неизвестными функциями времени. Поэтому, если динамические действия сервомоторных сил $\vec{N}_i$ регулируются таким образом, что в любой момент между параметрами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ существует k независимых соотношений, то движение системы будет определенным.[1]

Однако, Беген (Béghin) не получил самых общих уравнений движения. Более общие результаты получил А. Пшеборский в вышеприведенной статье, в которой он, исходя из закона движения Нью-

[1] Более подробное исследование, принадлежащее Бегену, можно найти в трактате П. Аппеля (P. Appell. Traite, de mecanique rationnelle, IV изд. т. II, 1924); см. также Т. Леви—Чивита и У. Амальди. Курс теоретической механики, т. II, ч. I, 1951.

тона и принципа Даламбера—Лагранжа, вывел уравнения движения несвободной системы, как с множителями, так и без множителей связей.

Следует, однако, отметить, что несмотря на вполне общую постановку задачи, Пшеборскому не удалось дать столь же полного и вполне общего решения этой задачи, так как он придерживается декартовых координат и, кроме того, хотя в неявной форме (при выводе уравнений движения без множителей связей), делает частные предположения об уравнениях неголономных связей,—допускает возможность однозначного решения этих уравнений относительно первых ($\dot{q}$) и вторых ($\ddot{q}$) производных, тогда как по условию $\dot{q}$ и $\ddot{q}$ входят в эти уравнения вообще нелинейно и, следовательно, в общем случае сделать этого нельзя.

Кроме того, нельзя не признать, что метод уравнений Пшеборского довольно сложен. В самом деле, для получения уравнений движения по этому методу (например, без множителей связей) приходится выражать декартовы координаты и их первые и вторые производные через обобщенные координаты и их производные первого и второго порядка, при этом механическая система характеризуется аналитическим выражением не одной какой либо функции (например, кинетической энергией или энергией ускорений, как это обычно имеет место в уравнениях типа Лагранжа или Аппеля), а целым рядом функций, имеющих вообще различную структуру в различных задачах. Указанные выше факты, до некоторой степени умаляют общность и значимость полученных Пшеборским результатов. Однако, нам кажется, что эти недостатки были вызваны не существом вопроса, а лишь требованиями примененного им метода.

В данной главе, основанный на той же самой точке зрения, о которой неоднократно упоминалось выше, мы даем для несвободных механических систем с нелинейными неголономными связями вывод наиболее общих дифференциальных уравнений движения как с множителями, так и без множителей связей. При этом оказывается, что для получения этих уравнений в обобщенных координатах можно пользоваться выражением кинетической энергии или энергии ускорений системы.

В основу рассуждений мы положим два принципа, которые необходимо принять как постулаты. Их можно формулировать следующим образом:

1) Для каждой несвободной механической системы можно найти силы, которые называют реакциями связей, такие, что движение под действием данных сил и реакций после устранения связей происходит точно также, как под действием данных сил при наличии связей. Другими словами, можно ввести реакции связей так, что несвободная система может рассматриваться, как свободная (принцип освобождаемости).

2) Принцип наименьшего принуждения Гаусса, наравне с принципом Даламбера-Лагранжа, приложим к исследуемым материальным системам.

В целях большей ясности изложения, в смысле постановки задачи, мы начнем с вывода уравнений движения в декартовых координатах с неопределенными множителями.

§ 34. Уравнения движения механической системы в декартовых координатах. Рассмотрим движение несвободной системы из N материальных точек под действием данных сил. Обозначим через x_1,

$x_2, \ldots, x_{3N}$ декартовы координаты точек системы и допустим, что связи выражаются уравнениями

$$f_\rho = 0, \ (\rho = 1, 2, \ldots, r), \ (r < 3N), \tag{5.1}$$

которые могут быть как конечными, так и дифференциальными неинтегрируемыми; в последнем случае уравнения (5.1) могут быть первого или второго порядка — не обязательно линейные — относительно производных. Другими словами, кроме геометрических связей, на точки системы наложены кинематические связи наиболее общего вида, выражаемые нелинейными зависимостями между скоростями $\dot{x}_k$ и ускорениями $\ddot{x}_k (k = 1, 2, \ldots, 3N)$.

Если обозначить через $X_{3k-2}, X_{3k-1}, X_{3k}$ и $R_{3k-2}, R_{3k-1}, R_{3k}$ проекции активных сил и реакций связей, которые приложены к точке массы $m_{3k-2} = m_{3k-1} = m_{3k}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, то уравнение выражающее принцип Гаусса можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{3N} (m_k \ddot{x}_k - X_k - R_k)\, \delta \ddot{x}_k = 0. \tag{5.2}$$

Так как введением реакций связей система приведена к свободной, то вариации ускорений $\delta \ddot{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 3N)$ будут независимыми и, следовательно, множители при этих вариациях в уравнении (5.2) будут равны нулям. Таким образом получаем уравнения движения системы в виде:

$$m_k \ddot{x}_k = X_k + R_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, 3N). \tag{5.3}$$

Ясно, что уравнения (5.3), представляющие собой закон движения Ньютона, можно было бы написать исходя из принципа Даламбера-Лагранжа.

Перейдем теперь к вопросу определения реакций связей. Для этого недостаточно уравнений, которые мы имеем, а именно, $3N$ уравнений движения (5.3) и r уравнений связей (5.1), так как определяется $6N$ неизвестных x_k и R_k $(k = 1, 2, \ldots, 3N)$. Таким образом, задача определения движения несвободной системы делается по существу неопределенной и остается такою до тех пор, пока не даются дополнительные физические характеристики материального осуществления связей.

Одним из самых простых является предположение об идеальности (гладкости) связей, с отнесением всех отклонений от идеальности (например, сил трения, электромагнитных реакций и т. п.) к числу задаваемых сил, приложенных к системе. Мы видим, таким образом, что движение несвободной системы может быть определено, когда знают свойства механического движения, которые реализуются связями (5.1). Эта реализация, как было отмечено, может совершаться различными способами при помощи механических приспособлений.

Однако, свойства механизма (природы связей) не могут определить все реакции R_k, иначе мы имели бы $3N + r$ уравнений для определения $3N$ неизвестных координат x_k $(k = 1, \ldots, 3N)$. Очевидно, чтобы наша задача была определенной, из свойств механизма осуществления связей должны отыскиваться $3N - r$ реакций R_k как функции от t, x_k, $\dot{x}_k$, $\ddot{x}_k$, или иначе, из свойств природы связей должны определиться все R_k как функции от t, x_k, $\dot{x}_k$, $\ddot{x}_k$ и неизвестных параметров λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$, число которых равно числу связей (5.1). Значение этих параметров должно зависеть от приложенных сил и наложенных на систему связей.

Таким образом, имеем:

$$R_k = R_k\,(t;\ x_k;\ \dot{x}_k;\ \ddot{x}_k;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_r),\quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ 3N). \tag{5.4}$$

При определении реакций связей будем исследовать выражение:

$$\sum_{k=1}^{3N} R_k\,\delta\ddot{x}_k. \tag{5.5}$$

Это выражение отличается от соответствующего ему выражения для элементарной работы реакций на возможном перемещении системы только тем, что в него вместо вариаций координат δx_k входят вариации ускорений $\delta\ddot{x}_k$. Выражение (5.5) (из физических данных о природе связей и механизма их осуществления), задается таким образом:

$$\sum_{k=1}^{3N} R_k\,\delta\ddot{x}_k = \sum_{k=1}^{3N} N_k\,\delta\ddot{x}_k, \tag{5.6}$$

где N_k суть данные функции от $t,\ x_k,\ \dot{x}_k,\ \ddot{x}_k\ (k=1,\ 2,\ \dots,\ 3N)$, а вариации $\delta\ddot{x}_k$ связаны между собою r условиями, налагаемыми на них связями (5.1).

Для получения этих условий будем дифференцировать уравнения (5.1) по времени или два раза, или один раз, или ни одного раза, в зависимости от того будут ли эти уравнения или конечными, или дифференциальными уравнениями первого порядка, или дифференциальными уравнениями второго порядка. Варьируя затем полученные уравнения и имея в виду, что варьируются только ускорения[1], получим искомые условия:

$$\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial f_\rho}{\partial p_k}\,\delta\ddot{x}_k = 0,\quad (\rho=1,\ 2,\ \dots,\ r), \tag{5.7}$$

где $p_k = x_k$, если $f_\rho = 0$ суть конечные уравнения, $p_k = \dot{x}_k$, если они дифференциальные уравнения первого порядка, и $p_k = \ddot{x}_k$, если они дифференциальные уравнения второго порядка.

Соотношения (5.7) показывают, что из $3N$ вариаций $\delta\ddot{x}_k$ зависимых будет только r, а остальные $3N - r$ будут независимыми.

Выразив из уравнений (5.7) r зависимых вариаций $\delta\ddot{x}$ в функции остальных $3N - r$ независимых и подставив найденные выражения зависимых вариаций в уравнение (5.6), мы получим уравнение которое будет содержать только независимые вариации $\delta\ddot{x}$. Ввиду произвольности этих вариаций, множители при них должны быть равны нулю, что даст нам $3N - r$ уравнений между R_k; так как эти уравнения будут линейными относительно R_k, то из них возможно определить R_k как функции r параметров $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_r$. Но исключение зависимых вариаций удобнее выполнить, пользуясь методом лагранжевых неопределенных множителей. Применяя этот метод к уравнениям (5.6) и (5.7), получим:

$$R_k = N_k + \sum_{\rho=1}^{r} \frac{\partial f_\rho}{\partial p_k}\,\lambda_\rho,\quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ 3N). \tag{5.8}$$

---

[1] Такого рода вариацию некоторые авторы называют гауссовой вариацией (см., например, Н. Н. Бухгольц, Основной курс теоретической механики, II ч. и др.).

Тогда уравнения движения (5.3) могут быть записаны в виде:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + N_i + \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 3N). \qquad (5.9)$$

Присоединяя к этим уравнениям r уравнений связей (5.1), мы получим полную систему $3N + r$ уравнений для определения $3N + r$ неизвестных функций $x_1, x_2, \ldots, x_{3N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Уравнения движения несвободной системы, аналогичные уравнениям (5.9) были получены А. Пшеборским в вышеприведенной статье [1].

Может случиться, что силы N_i $(i = 1, 2, \ldots, 3N)$ зависят также еще от s других параметров $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$. Чтобы наша задача (определения движения материальной системы) была определенной в этом случае, когда вариации $\delta\ddot{x}_i$ удовлетворяют соотношениям (5.7), из свойств природы связей и механизма их осуществления должны получиться s недостающих уравнений между $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Например, при наличии трения эти недостающие уравнения будут следовать из законов трения, а при наличии динамических связей эти уравнения должны вытекать из регулирующих автоматических приспособлений (сервомоторов), осуществляющих такие связи.

Заменив в уравнении (5.2), выражающем принцип Гаусса, реакции R_k их выражениями (5.8), мы можем переписать его так:

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - X_i - N_i)\, \delta\ddot{x}_i = 0, \qquad (5.10)$$

так как согласно условиям (5.7)

$$\sum_{i=1}^{3N} \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial p_i}\, \delta\ddot{x}_i = 0. \qquad (5.11)$$

Ясно, что теперь в принципе Гаусса (5.10) вариации $\delta\ddot{x}_i$ не независимы. В общем случае реакция R_i, как видно из формулы (5.8), состоит из двух слагаемых. Первые слагаемые N_i $(i = 1, 2, \ldots, 3N)$, как мы видели выше, должны рассматриваться, вообще говоря, как известные функции от неизвестных кинематических элементов движения (возможно, также и некоторых других параметров). Что касается вторых слагаемых

$$\sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 3N)$$

то они всегда удовлетворяют условию (5.11), т. е. обладают свойством, присущим реакциям идеальных связей. Первые же слагаемые последним свойством не обладают, ибо, вообще говоря,

$$\sum_{i=1}^{3N} N_i \delta\ddot{x}_i \neq 0. \qquad (5.12)$$

---

[1] Ясно, что в общем случае, когда связи несвободной механической системы выражаются неинтегрируемыми дифференциальными уравнениями второго порядка, нелинейными относительно вторых производных, уравнения движения (5.9) могут оказаться многозначными относительно ускорений $\ddot{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 3N)$.

В дальнейшем мы будем называть для краткости первое слагаемое N_i — *активной частью*, а второе слагаемое $\sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial p_i}$ — *пассивной частью* реакции R_i.

§ 35. Уравнения движения системы в обобщенных координатах с множителями связей. Пусть дана система N материальных точек, подчиненная, прежде всего, конечным связям вида:

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}, t) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

Пусть, принимая во внимание эти связи, n есть число независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$, определяющих конфигурацию системы в момент времени t. Тогда декартовы координаты точек системы (в силу известности строения системы) являются известными функциями величин $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$. Пусть эти функции представляются уравнениями

$$x_i = x_i(t;\, q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, 3N). \tag{5.13}$$

Так как

$$\delta\ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta\ddot{q}_j, \quad (i = 1, 2, \ldots 3N)$$

то, подставляя эти выражения вариаций ускорений в уравнение (5.10), получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - X_i - N_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta\ddot{q}_j = 0. \tag{5.14}$$

Если обозначим через $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2$ живую силу системы, через $Q_j = \sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ — обобщенную силу, отнесенную к координате q_j и через $P'_j = \sum_{i=1}^{3N} N_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ — активную часть обобщенной реакции (голономных связей), то после простых преобразований уравнения (5.14), получим выражение принципа Гаусса в криволинейных координатах в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - P'_j \right) \delta\ddot{q}_j = 0. \tag{5.15}$$

Если других связей нет, то величины $\delta\ddot{q}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ произвольны, и тогда уравнение (5.15) даст n уравнений движения, которые будут уравнениями Лагранжа.

Но предположим теперь, что к предыдущим связям присоединены новые связи, которые состоят из l дифференциальных уравнений первого порядка

$$F_\rho(t;\, q_1, q_2, \ldots, q_n;\, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, l) \tag{5.16}$$

и из m дифференциальных уравнений второго порядка

$$F_{l+s}(t;\, q_1, q_2, \ldots, q_n;\, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n;\, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n) = 0,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, m), \tag{5.17}$$

т. е. система подчинена $l+m<n$ неголономным связям наиболее общего вида, выражаемыми вообще нелинейными зависимостями между скоростями ($\dot{q}$) и ускорениями ($\ddot{q}$).

В силу принципа освобождаемости мы можем предположить, что к системе приложены некоторые дополнительные внешние силы, а именно, реакции неголономных связей, которые нужно приложить к системе, чтобы она этим связям удовлетворяла. Пусть

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j' \delta \ddot{q}_j \tag{5.18}$$

представляет собою выражение, которое отличается от соответствующего ему выражения для элементарной работы реакций Q_j' неголономных связей на возможном перемещении системы только тем, что в него вместо вариаций δq_j входят вариации $\delta \ddot{q}_j$. Так как введением дополнительных сил система приведена к голономной, то можно применить уравнения Лагранжа. Следовательно, уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + P_j' + Q_j', \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.19}$$

Реакции Q_j' ($j = 1, 2, \ldots, n$) неизвестны; для их определения недостаточно уравнений, которые мы имеем, а именно, n уравнений движения (5.19) и $l+m$ уравнений связей (5.16) и (5.17), так как определяется $2n$ неизвестных q_j и Q_j'. Следовательно, задача определения движения рассматриваемой неголономной системы делается по существу неопределенной и остается такою до тех пор, пока не даются дополнительные физические характеристики материального осуществления связей. Чтобы движение системы было определенным, из свойств природы связей (5.16) и (5.17) должны отыскаться все реакции Q_j' как функции от кинематических элементов движения и неизвестных параметров λ_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, l+m$), число которых равно числу неголономных связей. Как и в предыдущем параграфе наша задача будет разрешена, если при определении реакций неголономных связей мы будем исследовать выражение (5.18), задав его в таком виде:

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j' \delta \ddot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} P_j^* \delta \ddot{q}_j, \tag{5.20}$$

где P_j^* — данные функции от t, q_j, $\dot{q}_j$, $\ddot{q}_j$, а вариации $\delta \ddot{q}_j$ связаны между собою $l+m$ условиями, налагаемыми на них связями (5.16) и (5.17).

Дифференцируя уравнения (5.16) по времени, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_\rho}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \varphi_\rho = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, l), \tag{5.21}$$

где через φ_ρ обозначено выражение, не содержащее ускорений. Из уравнений (5.21) и (5.17), считая координаты и скорости неварьируемыми, получим соотношения:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_\rho}{\partial \xi_j} \delta \ddot{q}_j = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, l+m) \tag{5.22}$$

где $\xi = \dot{q}_j$ в случае когда $F_\rho = 0$ — дифференциальные уравнения первого порядка, и $\xi_j = \ddot{q}_j$, если они дифференциальные уравнения второго порядка.

Соотношения (5.22) показывают, что из n вариаций $\delta\ddot{q}_j$ зависимых будет $l+m$, а остальные $n-l-m$ будут произвольны. В соответствии с этим введем $l+m$ неопределенных множителей λ_ρ; тогда из равенств (5.20) и (5.22) имеем:

$$Q_j' = P_j^* + \sum_{\rho=1}^{l+m} \lambda_\rho \frac{\partial F_\rho}{\partial \xi_j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.23}$$

Вводя обозначение $P_j = P'_j + P_j^*$, где P_j — активная часть обобщенной реакции связей, отнесенная к координате q_j, мы можем переписать уравнения движения (5.19) так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + P_j + \sum_{\rho=1}^{l+m} \lambda_\rho \frac{\partial F_\rho}{\partial \xi_j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.24}$$

Они вместе с уравнениями (5.16) и (5.17) образуют систему $n+l+$ $+m$ уравнений со столькими же неизвестными $q_1, q_2, \ldots, q_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l+m}$.

Если для аналитической характеристики системы, вместо кинетической энергии T, воспользоваться энергией ускорений $S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i^2$, то уравнения движения рассматриваемой системы, как легко видеть, можно переписать так:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = Q_j + P_j + \sum_{\rho=1}^{l+m} \lambda_\rho \frac{\partial F_\rho}{\partial \xi_j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.25}$$

т. е. в форме Аппеля с неопределенными множителями.

Не следует забывать, что в общем случае реакции P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ могут зависеть также еще от k дальнейших параметров $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ (как, например, при наличии трения или при наличии динамических связей). В этом случае, чтобы рассматриваемая задача была определенной, из свойств механизма осуществления связей должны получиться к недостающих уравнений между параметрами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l+m}$. Например, при наличии трения эти уравнения будут следовать из законов трения.

§ 36. Наиболее общие уравнения динамики без множителей связей. Метод, изложенный в предыдущем параграфе, зависит существенно от приведения неголономных систем к голономным путем введения дополнительных сил — реакций неголономных связей.

Вследствие этого уравнений движения получается больше числа степеней свободы системы на число неголономных связей.

Мы теперь покажем, что можно установить уравнения движения несвободной системы, которые соответствуют уравнениям Аппеля без неопределенных множителей, когда реакции связей заданы посредством равенства (5. 6)), в котором вариации ускорений удовлетворяют соотношениям (5. 7).

Допустим, что конфигурация механической системы из N материальных точек, стесненных связями (5. 1), во всякий момент времени определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Тогда декартовы координаты точек системы можно представить как функции $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и t, т. е.

$$x_i = x_i(t;\ q_1,\ q_2, \ldots, q_n), \quad (i=1,\ 2, \ldots, 3N) \tag{5. 26}$$

и, следовательно,

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (i=1,\ 2, \ldots, 3N) \tag{5.27}$$

$$\ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\ddot{q}_j + \varphi_i\ (t; q; \dot{q}), \quad (i=1,\ 2, \ldots, 3N). \tag{5.28}$$

Уравнения (5.26) эквивалентны конечным уравнениям из системы уравнений (5.1). Формулы (5.26), (5.27) и (5.28) дают возможность преобразовать дифференциальные уравнения системы (5.1) к обобщенным координатам.

Допустим, что наложенные на рассматриваемую систему кинематические связи (5.1), выраженные в обобщенных координатах, состоят из l дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$F_\rho(t;\ q_1,\ q_2, \ldots, q_n;\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = 0, \quad (\rho = 1,2, \ldots, l) \tag{5.29}$$

и из m дифференциальных уравнений второго порядка, линейных относительно ускорений $\ddot{q}$, вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{js}\ddot{q}_j + b_s = 0, \quad (s = 1,\ 2, \ldots, m) \tag{5.30}$$

где a_{js} и b_s суть данные функции величин $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t$.

Дифференцируя уравнения (5.29) по времени, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_\rho}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \Phi_\rho(t;\ q;\ \dot{q}) = 0, \quad (\rho = 1,\ 2, \ldots, l). \tag{5.31}$$

Из (5.28), (5.31) и (5.30), считая координаты и скорости неварьируемыми, находим:

$$\delta\ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta\ddot{q}_j, \quad (i = 1,\ 2, \ldots, 3\ N) \tag{5.32}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_\rho}{\partial \dot{q}_j}\delta\ddot{q}_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{js}\delta\ddot{q}_j = 0,\ (\rho = 1,\ 2, \ldots, l),\ (s = 1,2, \ldots, m). \tag{5.33}$$

Таким образом n ускорений $\ddot{q}_j$, а также вариаций $\delta\ddot{q}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) связаны $l + m$ условиями (5.30), (5.31) и (5.33); поэтому число независимых ускорений и вариаций будет равно $n - l - m = k$. Пусть независимыми из этих величин будут первые k, *т. е.* $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_k$ *и* $\delta\ddot{q}_1, \ldots, \delta\ddot{q}_k$.

Посредством уравнений (5.30), (5.31) и (5.33) исключим из уравнений (5.28) и (5.32) $l+m$ зависимых ускорений и их вариаций; тогда получим:

$$\ddot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{\kappa} A_{i\nu}\ddot{q}_\nu + A_i\,, \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 3N) \tag{5.34}$$

$$\delta\ddot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{\kappa} A_{i\nu}\delta\ddot{q}_\nu\,, \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 3N) \tag{5.35}$$

где $A_{i\nu}$ и A_i суть функции $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\, t$; причем в равенствах (5.34) и (5.35) ускорения $\ddot{q}_\nu$ и их вариации $\delta\ddot{q}_\nu$ ($\nu=1, 2, \ldots, \kappa$) будут теперь независимы.

Из уравнений (5.34), имеем:

$$A_{i\nu} = \frac{\partial\ddot{x}_i}{\partial\ddot{q}_\nu}\,, \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 3N), \ (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ \kappa). \tag{5.36}$$

Возьмем теперь уравнение (5.10), выражающее принцип Гаусса, и вставим в него выражения вариаций $\delta\ddot{x}_i$ из равенств (5.35); получим:

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa}\left(\sum_{i=1}^{3N} m_i\ddot{x}_i A_{i\nu} - \sum_{i=1}^{3N} X_i A_{i\nu} - \sum_{i=1}^{3N} N_i A_{i\nu}\right)\delta\ddot{q}_\nu = 0,$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa}\left(\sum_{i=1}^{3N} m_i\ddot{x}_i A_{i\nu} - Q_\nu - \Delta_\nu\right)\delta\ddot{q}_\nu = 0\,, \tag{5.37}$$

если ввести обозначения:

$$Q_\nu = \sum_{i=1}^{3N} A_{i\nu}X_i\,, \quad \Delta_\nu' = \sum_{i=1}^{3N} A_{i\nu}N_i\,, \ (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ \kappa) \tag{5.38}$$

где Q_ν есть обобщенная сила, отнесенная к координате q_ν, а Δ_ν — активная часть обобщенной реакции связей, отнесенная к координате q_ν.

Если ввести в рассмотрение функцию

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i\ddot{x}_i^2$$

— энергию ускорений системы, то, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i\ddot{x}_i A_{i\nu} = \sum_{i=1}^{3N} m_i\ddot{x}_i\frac{\partial\ddot{x}_i}{\partial\ddot{q}_\nu} = \frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_\nu}\,, \ (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ \kappa),$$

и уравнение (5.37) перепишется в виде:

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa}\left(\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_\nu} - Q_\nu - \Delta_\nu\right)\delta\ddot{q}_\nu = 0;$$

откуда, принимая во внимание произвольность вариаций $\delta\ddot{q}_\nu$, имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_\nu} = Q_\nu + \Delta_\nu\,, \ (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ \kappa). \tag{5.39}$$

Уравнения (5.39) и представляют собою искомые уравнения движения системы, которые образуют систему $n - l - m = k$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Для составления этих уравнений нужно написать выражение энергии ускорений в координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а затем, посредством уравнений кинематических связей (5.29) и (5.30), исключить вторые производные тех координат q, которые в силу уравнений дифференциальных связей являются зависимыми. Величины Q_ν и Δ_ν можно вычислить, например, как коэффициенты при независимых вариациях $\delta\ddot{q}_\nu$ из выражений:

$$\sum_{\nu=1}^{k} Q_\nu \delta\ddot{q}_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{k} \Delta_\nu \delta\ddot{q}_\nu, \tag{5.40}$$

которые отличаются от соответствующих им выражений для элементарных работ активных сил и реакций на возможном перемещении системы только тем, что в них вместо вариаций δq_ν входят вариации ускорений $\delta\ddot{q}_\nu$. Уравнения (5.39) вместе с уравнениями (5.29) и (5.30), дают систему n уравнений для определения n функций $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Следует подчеркнуть, что уравнения (5.39) не заключают неизвестных (пассивных частей) реакций связей. Они крайне просты и по внешнему виду отличаются только правой частью от уравнений движения для неголономных систем с линейными связями, которые были получены в 1899 году П. Аппелем (P. Appell, Comptes Rendus, т. 129; стр. 317—320, 423—427, 1899; и др. статьи). По существу уравнения (5.39) представляют собою обобщения уравнений Аппеля на случай любой несвободной материальной системы с тем только ограничением, что кинематические связи второго порядка являются линейными функциями ускорений.

Очевидно, что уравнения (5.39) имеют также место, если величины $q_1, q_2, \ldots, q_n$ будут не истинными координатами, а квазикоординатами. Так как уравнения (5.39) приложимы ко всем механическим системам (связи которых могут быть выражены уравнениями) и при любом выборе независимых параметров, то мы думаем, всего естественнее их назвать *наиболее общими уравнениями динамики*.

Предположим теперь, что на рассматриваемую материальную систему наложены только гладкие связи (геометрические и кинематические, а динамические отсутствуют), т. е. что выражение

$$\sum_{k=1}^{3N} R_k \delta\ddot{x}_k = \sum_{k=1}^{3N} N_k \delta\ddot{x}_k = 0, \tag{5.6}$$

когда вариации ускорений $\delta\ddot{x}$ удовлетворяют соотношениям (5.7). Уравнение (5.6), будучи преобразовано к обобщенным координатам, эквивалентно уравнению:

$$\sum_{\nu=1}^{k} \Delta_\nu \delta\ddot{q}_\nu = 0, \tag{5.41}$$

откуда, обращая внимание на произвольность $\delta\ddot{q}_\nu$, получаем:

$$\Delta_\nu = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{5.42}$$

Таким образом, в случае гладких (и при отсутствии динамических) связей, общие уравнения динамики (5.39) принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\nu} = Q_\nu, \ (\nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{5.43}$$

Уравнения эти были получены нами в 1939 г., хотя работа была опубликована в 1944 году (Научные труды ВАИ НКАП СССР, механ. т. II. стр. 33–40, 1944). По внешнему виду уравнения (5.43) ничем не отличаются от классических уравнений Аппеля, но только для них несколько иначе составляются правые части—функции Q_ν.

Далее, предположим, что силы действующие на систему, имеют потенциал, т. е. существует функция $V'(t; x_1, x_2, ..., x_{3N})$, для которой

$$X = -\frac{\partial V'}{\partial x_i}, \quad (i=1, 2, ..., 3N). \tag{5.44}$$

Дифференцируя дважды функцию V' по времени, получим:

$$\frac{d^2V'}{dt^2} = \ddot{V}' = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V'}{\partial x_i} \ddot{x}_i + f(t; x; \dot{x}). \tag{5.45}$$

Если подставим теперь значения для $x, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$ из (5.26), (5.27) и (5.34) в правую часть равенства (5.45) и воспользоваться при этом формулой (5.44), то $\ddot{V}'$ станет функцией $q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, \ddot{q}_1, ..., \ddot{q}_n, t$. Преобразованную таким образом функцию $\ddot{V}'$ мы обозначим через $\ddot{V}$.

Тогда можно написать:

$$\ddot{V} = -\sum_{\nu=1}^{k} \sum_{i=1}^{3N} A_{i\nu} X \ddot{q}_\nu + \Phi(t; q; \dot{q}),$$

или, принимая во внимание (5.38),

$$\ddot{V} = -\sum_{\nu=1}^{k} Q_\nu \ddot{q}_\nu + \Phi(t; q; \dot{q}); \tag{5.46}$$

отсюда, получаем:

$$Q_\nu = -\frac{\partial \ddot{V}}{\partial \ddot{q}_\nu}, \quad (\nu=1, 2, ..., k). \tag{5.47}$$

Вводя теперь новую функцию $R\ (t; q_1, ..., q_n \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n; \ddot{q}_1, ..., \ddot{q}_k)$ при помощи равенства

$$R = S + \ddot{V}$$

мы можем написать уравнения движения (5.43) в крайне сжатой форме

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_\nu} = 0, \quad (\nu=1, 2, ..., k). \tag{5.49}$$

Они вместе с уравнениями связей (5.29) и (5.30) с аналитической точки зрения дают в дифференциальной форме полную постановку задачи о движении системы с гладкими связями. Функция R одна вполне характеризует механическую систему, подчиненную каким угодно геометрическим и кинематическим гладким связям и подвергнутую действию консервативных сил, если рассмотрению подлежат лишь только вопросы чисто динамического порядка. Вот почему функцию R мы думаем, можно назвать *характеристической функцией* системы.

§ 37. О принципе минимума функции $\overline{R}$. В форме (5.49) можно представить также уравнения движения и для неконсервативных механических систем. Действительно, если ввести функцию $\overline{R}$, определяемую равенством

$$\overline{R} = S - \sum_{\nu=1}^{\kappa} Q_\nu \ddot{q}_\nu, \tag{5.50}$$

где S — энергия ускорений системы, выраженная через независимые ускорения $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_k$, а Q_ν — обобщенная сила, соответствующая независимой вариации $\delta\ddot{q}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, \kappa$), то уравнения (5.43) мы можем привести к виду

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \ddot{q}_\nu} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \kappa). \tag{5.51}$$

Последние уравнения определяют те значения ускорений $\ddot{q}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \kappa$), которые дают экстремум функции $\overline{R}$. Легко убедиться, что этот экстремум есть минимум. В самом деле, функция $\overline{R}$ второй степени относительно $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_k$, причем члены второй степени происходят от энергии ускорений S и представляют определенно положительную квадратичную форму. Поэтому значения $\ddot{q}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, \kappa$) получаемые из уравнений (5.51), обращают $\overline{R}$ в минимум.

Этот результат, представляющий собою обобщение предложенного П. Аппелем „принципа минимума функции R"[1], можно высказать следующим образом: *Во всякий момент действительное движение системы, находящейся под действием активных сил и подчиненной каким угодно голономным и неголономным (гладким) связям происходит с ускорениями, обращающими функцию $\overline{R}$ в минимум.*

Интересно заметить, что при такой формулировке принципа, можно заменить функцию $\overline{R}$ всякой другой функцией, которая отличалась бы от $\overline{R}$ только членами, не зависящими от ускорений, например, функцией

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2,$$

которую по Гауссу называют принуждением системы. Тот факт, что ускорения обращают последнюю функцию в минимум, является следствием принципа наименьшего принуждения Гаусса (Gauss, Journ. f. Math., т. 4. стр. 232, 1829).

§ 38. Другая форма наиболее общих уравнений динамики. Уравнения (5.30) и (5.31) линейны относительно ускорений; поэтому эту систему уравнений всегда можно, вообще говоря, разрешить относительно $l+m$ зависимых ускорений $\ddot{q}_{k+1}, \ddot{q}_{k+2}, \ldots, \ddot{q}_n$. Пусть эти решения имеют вид:

$$\ddot{q}_\eta = \sum_{\nu=1}^{\kappa} B_{\eta\nu}\ddot{q}_\nu + B_\eta, \quad (\eta = \kappa+1, \ldots, n), \quad (\kappa = n - l - m), \tag{5.52}$$

---

[1] Относительно принципа, аналогичного „принципу минимума функции R" П. Аппеля см. работы И. Ценова (ДАН СССР, т. 89, №№ 1, 3, стр. 21—24, 415—418), посвященные выводу новой формы уравнений движения механических систем с линейными неголономными связями. В этих работах он показывает, что известный принцип Гаусса можно вывести, пользуясь свойством минимума введенной им функции К, которая отличается от функции Аппеля R только членами, не зависящими от ускорений.

где $B_{\eta\nu}$ и B_{η} суть известные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t$.
Аналогично из уравнений (5.33) для зависимых вариаций ускорений получаем

$$\delta\ddot{q}_{\eta} = \sum_{\nu=1}^{\kappa} B_{\eta\nu}\,\delta\ddot{q}_{\nu}, \; (\eta = \kappa + 1, \ldots, n). \tag{5.53}$$

Далее, из (5.52) находим:

$$B_{\eta\nu} = \frac{\partial \ddot{q}_{\eta}}{\partial \ddot{q}_{\nu}}, \; (\eta = \kappa + 1, \ldots, n), \quad (\nu = 1, \ldots, \kappa). \tag{5.54}$$

Уравнение (5.15), выражающее принцип Гаусса, мы можем переписать в виде:

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_{\nu}} - \frac{\partial T_0}{\partial q_{\nu}} - Q_{\nu} - P_{\nu}\right)\delta\ddot{q}_{\nu} + \sum_{\eta=\kappa+1}^{n}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \ddot{q}_{\eta}} - Q_{\eta} - P_{\eta}\right)\delta\ddot{q}_{\eta} = 0, \tag{5.55}$$

где T_0 — кинетическая энергия, а S_0 — энергия ускорений системы, причем T_0 и S_0 вычислены без учета неголономных связей (5.29) и (5.30) и, следовательно, при вычислении этих функций все координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ считаются равноправными.

Подставляя значения для $\delta\ddot{q}_{\eta}$ из (5.53) в уравнение (5.55), преобразуем его в следующее:

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_{\nu}} - \frac{\partial T_0}{\partial q_{\nu}} + \sum_{\eta=\kappa+1}^{n} B_{\eta\nu}\frac{\partial S_0}{\partial \ddot{q}_{\eta}} - Q_{\nu}^{*} - \Delta_{\nu}\right)\delta\ddot{q}_{\nu} = 0, \tag{5.56}$$

причем

$$Q_{\nu}^{*} = Q_{\nu} + \sum_{\mu=k+1}^{n} B_{\mu\nu} Q_{\mu}, \quad \Delta_{\nu} = P_{\nu} + \sum_{\mu=k+1}^{n} B_{\mu\nu} P_{\mu}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{5.57}$$

где Q_{ν}^{*} — обобщенная сила, а Δ_{ν} — активная часть обобщенной реакции связей, — отнесенные к координате q_{ν} $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$. Кроме того, согласно соотношениям (5.54), имеем:

$$\sum_{\mu=k+1}^{n} B_{\mu\nu}\frac{\partial S_0}{\partial \ddot{q}_{\mu}} = \sum_{\mu=k+1}^{n}\frac{\partial S_0}{\partial \ddot{q}_{\mu}}\frac{\partial \ddot{q}_{\mu}}{\partial \ddot{q}_{\nu}} = \frac{\partial S_1}{\partial \ddot{q}_{\nu}}, \; (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{5.58}$$

где через S_1, обозначена та часть энергии ускорений системы S_0, которая содержит явно зависимые ускорения $\ddot{q}_{k+1}, \ddot{q}_{k+2}, \ldots, \ddot{q}_n$ и которая рассматривается только как функция этих ускорений, так как от остальной части функции S_0, не содержащей зависимых ускорений, все частные производные по $\ddot{q}_{\mu}$ $(\mu = k + 1, \ldots, n)$ будут равны нулю.

Тогда уравнение (5.56) перепишется в виде:

$$\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_{\nu}} - \frac{\partial T_0}{\partial q_{\nu}} + \frac{\partial S_1}{\partial \ddot{q}_{\nu}} - Q_{\nu}^{*} - \Delta_{\nu}\right)\delta\ddot{q}_{\nu} = 0; \tag{5.59}$$

откуда, в силу независимости вариаций $\delta\ddot{q}_\nu$, получаем $k = n - l - r$ уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\nu} + \frac{\partial S_1}{\partial \ddot{q}_\nu} = Q_\nu^* + \Delta_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{5.60}$$

которые и представляют искомую другую форму наиболее общих уравнений динамики и которые, вместе с уравнениями связей (5.29) и (5.30), дают систему n уравнений для определения n функций q_1, q_2, .., q_n.

Уравнения (5.60) по внешнему виду отличаются только правой частью от уравнений, которые в 1924 г. были получены Ценовым для неголономных систем с линейными связями (J. Tzenoff, Sur les èquations génèrales les du mouvement des systèmes matèr. non holonomes, Math. Annalen, т. 91, 1924). По существу уравнения (5.60) представляют собою обобщения уравнений Ценова на случай любой несвободной механической системы с тем только ограничением, что кинематические связи второго порядка являются линейными функциями ускорений.

Для составления уравнений (5.60) нужно написать выражения функций T_0 и S_0 в координатах q_1, q_2, ..., q_n; затем, разбить S_0 на две части S_1 и S_2 так, чтобы S_2 не содержала зависимых ускорений $\ddot{q}_{k+1}$, ..., $\ddot{q}_n$ и вычислить производные $\frac{\partial S_1}{\partial \ddot{q}_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, имея при этом в виду, что S_1 является функцией только зависимых ускорений. Величины Q_ν^* и Δ_ν можно определить из выражений (5.40), как множители при независимых вариациях $\delta\ddot{q}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$.

Ясно, что уравнения (5.39) и (5.60) тесно связаны между собою в том смысле, что из уравнений одного типа легко можно получить уравнения другого типа.

Кроме того, следует заметить, что уравнения движения механических систем, которые были предложены в данной главе, дают интеграл энергии если: 1) силы действующие на систему имеют потенциал, 2) связи гладкие и склерономные (т. е. явно от времени не зависят) и 3) неголономные связи выражаются только дифференциальными уравнениями первого порядка и при этом однородными относительно производных.

Доказательство этого предложения ничем существенно не отличается от такого же для голономной системы.

§ 39. Кривизна траектории неголономной системы в функции обобщенных координат. Принцип Гаусса-Герца, подобно принципу Остроградского-Гамильтона, может служить для определения траектории динамической системы.

Липшиц доказал, что для голономной динамической системы с n степенями свободы кривизну кинематически возможной траектории можно представить в функции производных от n обобщенных координат, определяющих конфигурацию системы (R. Lipschitz, Journ. f. Mathem. т. 82, стр. 323; см. также Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937 г., §§ 105, 106).

Мы сейчас покажем, что принцип Гаусса-Герца и наиболее общие дифференциальные уравнения динамики, позволяют обобщить результат Липшица на случай механических систем с нелинейными неголономными связями. Для простоты мы ограничимся рассмотрением лишь только таких гладких связей, элементарная работа реакций которых равна нулю при всяком перемещении, совместимом со связями. Под траекторией механической системы мы будем понимать траекторию точки, изображающей в многомерном пространстве движение этой системы.

1. Пусть мы имеем несвободную динамическую систему N материальных точек, стесненных гладкими связями. Обозначим через x_1, x_2, ..., x_{3N} декартовы координаты точек системы и допустим, что связи выражаются уравнениями:

$$f_\rho = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r) \tag{5.61}$$

которые могут быть как конечными, так неинтегрируемыми дифференциальными; в последнем случае уравнения (5.61) могут быть первого порядка и не обязательно линейные относительно производных или второго порядка, но линейные относительно вторых производных.

Если обозначим через X_{3k-2}, X_{3k-1}, X_{3k} компоненты активной силы, действующей на точку массы $m_{3k-2} = m_{3k-1} = m_{3k}$, то принцип Гаусса запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{3N} (m_k \ddot{x}_k - X_k)\, \delta\ddot{x}_k = 0, \tag{5.62}$$

где вариации $\delta\ddot{x}_k$ связаны между собою r условиями, налагаемыми на них связями (5.61). Из уравнений (5.61), находим:

$$\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial f_\rho}{\partial p_k} \ddot{x}_k + \varphi_\rho(t;\ x;\ \dot{x}) = 0, \quad (\rho = 1, \ldots, r) \tag{5.63}$$

где $p_k = x_k$, если $f_\rho = 0$ — конечное уравнение, $p_k = \dot{x}_k$, если оно дифференциальное уравнение первого порядка, и $p_k = \ddot{x}_k$, если оно дифференциальное уравнение второго порядка.

Варьируя уравнения (5.63) и имея в виду, что варьируются только ускорения, будем иметь, искомые условия:

$$\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial f_\rho}{\partial p_k} \delta\ddot{x}_k = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r). \tag{5.64}$$

Пусть $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$, ..., $\ddot{x}_{3N}$ — компоненты ускорений точек на рассматриваемой кинематически возможной траектории, а $\ddot{x}_{10}$, $\ddot{x}_{20}$, ..., $\ddot{x}_{3N,0}$ соответствующие компоненты ускорений на действительной траектории.

Если мы вычтем уравнения (5.63), составленные для действительной траектории, из аналогичных уравнений, составленных для кинематически возможной траектории, то будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial f_\rho}{\partial p_k} (\ddot{x}_k - \ddot{x}_{k0}) = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r) \tag{5.65}$$

так как координаты и скорости для обеих траекторий в соответствующие моменты времени одинаковы.

Уравнение (5.65) показывает, что вариации ускорений $\delta\ddot{x}_k$ пропорциональны $(\ddot{x}_k - \ddot{x}_{k0})$ и, следовательно, уравнение (5.62) можно переписать так:

$$\sum_{k=1}^{3N} (m_k \ddot{x}_{k_0} - X_k)(\ddot{x}_k - \ddot{x}_{k0}) = 0.$$

Это уравнение можно привести к виду:

$$\sum_{k=1}^{3N} m_k \left(\ddot{x}_k - \frac{X_k}{m_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{3N} m_k \left(\ddot{x}_{k0} - \frac{X_k}{m_k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{3N} m_k (\ddot{x}_k - \ddot{x}_{k0})^2. \qquad (5.66)$$

Кривизна или принуждение Гаусса-Герца кинематически возможной траектории в декартовых координатах определяется выражением (см. § 37):

$$\sum_{k=1}^{3N} m_k \left(\ddot{x}k - \frac{X_k}{m_k}\right)^2,$$

которое на основании равенства (5.66), можно переписать так:

$$\sum_{k=1}^{3N} m_k \left(\ddot{x}_{k0} - \frac{X_k}{m_k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{3N} m_k (\ddot{x}_k - \ddot{x}_{k0})^2. \qquad (5.67)$$

2. Положим теперь, что конфигурация рассматриваемой неголономной системы, подчиненной связям (5.61), во всякий момент времени определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$; тогда

$$x_i = x_i(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n), \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N), \qquad (5.68)$$

$$\dot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \dot{q}_\nu + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad \ddot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \ddot{q}_\nu + \varphi_i,$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3N) \qquad (5.69)$$

где символом φ_i обозначено выражение, не содержащее ускорений.

Уравнения (5.68) эквивалентны конечным уравнениям из системы (5.61). Формулы (5.69) позволяют преобразовать дифференциальные уравнения системы (5.61) к обобщенным координатам. Пусть наложенные на систему кинематические связи (5.61), выраженные в обобщенных координатах состоят из l дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$F_\alpha(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_n) = 0, \quad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ l), \qquad (5.70)$$

и из m дифференциальных уравнений второго порядка, линейных относительно ускорений $\ddot{q}$, вида:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\rho} \ddot{q}_\nu + b_\rho = 0, \quad (\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \qquad (5.71)$$

где $a_{\nu\rho}$ и b_ρ суть известные функции t, q_ν, $\dot{q}_\nu$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Дифференцируя уравнения (5.70) по времени, получим;

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{q}_\nu} \ddot{q}_\nu + \Phi_\alpha(t;\ q;\ \dot{q}) = 0, \quad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ l). \qquad (5.72)$$

Отсюда, мы видим, что из n ускорений $\ddot{q}$ независимых будет только $n-l-m=k$; пусть независимыми ускорениями будут $\ddot{q}_1$, $\ddot{q}_2$, ..., $\ddot{q}_k$. При помощи уравнений (5.71) и (5.72) исключим из (5.69) $l+m$ зависимых ускорений $\ddot{q}_{k+1}$, $\ddot{q}_{k+2}$, ..., $\ddot{q}_n$; имеем:

$$\ddot{x}_i = \sum_{\lambda=1}^{k} A_{i\lambda}\,\ddot{q}_\lambda + a_i\ (t,\ q;\ \dot{q}),\quad (i=1,\ 2,\ ...,\ 3N) \tag{5.73}$$

где $A_{i\lambda}$ и a_i — известные функции t, q_λ, $\dot{q}_\lambda$ $(\lambda=1,\ 2,\ ...,\ n)$. Тогда, как было доказано в § 37, дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_\lambda}=0,\quad R=S-\sum_{\lambda=1}^{k} Q_\lambda\,\ddot{q}_\lambda,\quad (\lambda=1,\ 2,\ ...,\ k) \tag{5.51}$$

где S — энергия ускорений системы, выраженная через независимые обобщенные ускорения $\ddot{q}_\lambda$, а Q_λ — обобщенная сила соответствующая независимой вариации $\delta\ddot{q}_\lambda$ $(\lambda=1,\ ...,\ k)$.

3. Перейдем теперь к выводу формулы для кривизны траектории неголономной системы в обобщенных координатах.

Пусть $\ddot{q}_{10}$, $\ddot{q}_{20}$, ..., $\ddot{q}_{k_0}$ — независимые обобщенные ускорения для действительной траектории, которые для любой кинематически возможной траектории (имеющей в данный момент общие координаты и скорости с действительной траекторией) пусть будут $\ddot{q}_1$, $\ddot{q}_2$, ..., $\ddot{q}_k$.

Первая сумма равенства (5.67), представляющая кривизну действительной траектории системы, одинакова для всех траекторий сравнения. Эту сумму можно представить в обобщенных координатах, через независимые ускорения, в виде:

$$2S-2\sum_{\lambda=1}^{n} Q_\lambda\,\ddot{q}_{\lambda 0}+\Phi, \tag{5.74}$$

где энергия ускорений системы

$$S=\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\sigma=1}^{k} b_{\lambda\sigma}\,\ddot{q}_{\lambda 0}\,\ddot{q}_{\sigma 0}+\sum_{\lambda=1}^{k} b_\lambda\,\ddot{q}_{\lambda 0}+b,$$

причем величины

$$b_{\lambda\sigma}=\sum_{i=1}^{3N} m_i A_{i\lambda}A_{i\sigma},\quad b_\lambda=\sum_{i=1}^{3N} m_i A_{i\lambda}a_i,\quad b=\sum_{i=1}^{3N} m_i a_i^2 \tag{5.74'}$$

суть известные функции t, q_ν, $\dot{q}_\nu$ $(\nu=1,\ 2,\ ...,\ n)$; через Φ обозначено выражение не содержащее ускорений, а

$$Q_\lambda=\sum_{l=1}^{3N} X_i A_{i\lambda},\quad (\lambda=1,\ 2,\ ...,\ k).$$

Действительно, принимая во внимание соотношения (5.73), имеем:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i\left(\ddot{x}_{io}-\frac{X_i}{m_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{3N} m_i\left(\sum_{\lambda=1}^{k} A_{i\lambda}\ddot{q}_{\lambda o}+a_i\right)^2-$$

$$-2\sum_{i=1}^{3N} X_i\left(\sum_{\lambda=1}^{k} A_{i\lambda}\ddot{q}_{\lambda o}+a_i\right)+\sum_{i=1}^{3N}\frac{X_i^2}{m_i};$$

откуда и следует формула (5.74).

Так как первая сумма выражения (5.67) одинакова для всех кривых сравнения, то ее можно было бы совсем не писать, назвав кривизной вторую сумму, ибо свойство минимума общего выражения кривизны от этого бы не потерялось.

Чтобы вторую сумму в выражении (5.67) представить в обобщенных координатах, сначала выразим в этих координатах разности $\ddot{x}_i-\ddot{x}_{io}$.

Вычитая равенство (5.73), составленное для действительной траектории, из аналогичного равенства, составленного для кинематически возможной траектории, получим:

$$\ddot{x}_i-\ddot{x}_{io}=\sum_{\lambda=1}^{k} A_{i\lambda}(\ddot{q}_\nu-\ddot{q}_{\lambda o}),\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 3N). \tag{5.75}$$

Введем новую функцию K_λ при помощи равенства

$$K_\lambda=\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_\lambda}=\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\lambda}-Q_\lambda,\quad (\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{5.76}$$

Эта функция на действительной траектории, в силу уравнений (5.51), обращается в нуль. Поэтому вычитая равенство (5.76) составленное для действительной траектории, из аналогичного же равенства для кинематически возможной траектории, найдем что K_λ равна разности значений $\dfrac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\lambda}$ для кривой сравнения и действительной траектории, т. е.

$$K_\lambda=\sum_{\sigma=1}^{k} b_{\lambda\sigma}(\ddot{q}_\sigma-\ddot{q}_{\sigma o}),\quad (\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{5.77}$$

Последняя система k уравнений может быть разрешена относительно $\ddot{q}_\sigma-\ddot{q}_{\sigma o}$,так как определитель D, составленный из коэффициентов $b_{\lambda\sigma}$ не равен тождественно нулю, т. е.

$$D=\|b_{\lambda\sigma}\|=\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial\ddot{q}_\lambda\,\partial\ddot{q}_\sigma}\right\|\neq 0. \tag{5.78}$$

Обозначим через $B_{\lambda\sigma}$ алгебраическое дополнение элемента $b_{\lambda\sigma}$ определителя D. Тогда умножая уравнения (5.77) на $\dfrac{B_{\lambda\sigma}}{D}$ и суммируя по λ, получим:

$$\ddot{q}_\sigma-\ddot{q}_{\sigma o}=\frac{1}{D}\sum_{\lambda=1}^{k} B_{\lambda\sigma}K_\lambda,\quad (\sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

и, следовательно,

$$\ddot{x}_i - \ddot{x}_{i_0} = \frac{1}{D} \sum_{\lambda,\sigma=1}^{k} A_{i\sigma} B_{\lambda\sigma} K_\lambda, \quad (i=1, 2, \ldots, 3N). \tag{5.79}$$

Поэтому кривизну $\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\ddot{x}_i - \ddot{x}_{i_0}\right)^2$ можно представить так:

$$\frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^{3N} \sum_{\lambda\, l,\sigma,\mu=1}^{k} m_i A_{i\sigma} A_{i\mu} B_{\lambda\sigma} B_{l\mu} K_\lambda K_l,$$

или, принимая во внимание (5.74′),

$$\frac{1}{D^2} \sum_{\lambda,l,\sigma,\mu=1}^{k} b_{\sigma\mu} B_{\lambda\sigma} B_{l\mu} K_\lambda K_l. \tag{5.80}$$

Но, по известному свойству определителей:

$$\sum_{\sigma,\mu=1}^{k} b_{\sigma\mu} B_{\lambda\sigma} B_{l\mu} = D B_{\lambda l}.$$

Поэтому кривизну (5.80) можно представить в функции обобщенных координат, их первых производных $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и вторых производных $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_k$, в виде:

$$\frac{1}{D} \sum_{\lambda, l=1}^{k} B_{\lambda l} K_\lambda K_l. \tag{5.81}$$

Таким образом, *для всякой динамической системы, подчиненной голономным и неголономным связям, с $k = n - l - m$ степенями свободы, определяемую n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, кривизну кинематически возможной траектории можно представить в виде*:

$$2S - 2\sum_{\lambda=1}^{k} Q_\lambda \ddot{q}_{\lambda_0} + \Phi + \frac{1}{D} \sum_{\lambda, l=1}^{k} B_{\lambda l} K_\lambda K_l. \tag{5.82}$$

Последняя формула и представляет собою обобщение результата Липшица на случай, когда динамическая система подчинена любым геометрическим и кинематическим (гладким) связям.

§ 40. Примеры неголономных систем с нелинейными связями. Фактическая сторона теории механических систем с нелинейными неголономными связями разработана еще меньше чем теоретическая. В настоящее время механика обладает только двумя конкретными примерами неголономных движений с нелинейными связями. Первый пример был дан в 1911 г. П. Аппелем[1], а второй А. Д. Билимовичем в 1936 г.[2].

---

[1] P. Appell. Sur une forme générale des equations de la dynamique. Mémorial des Sciences Mathem., Fasc. 1, Paris, 1925; здесь собраны результаты работ автора по теории неголономных систем с 1898 по 1916 г.

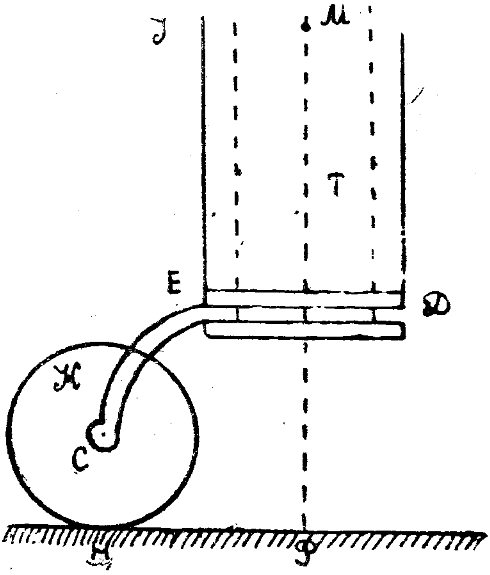
[2] Подробное изложение примера, принадлежащего Билимовичу, можно найти в статье В. В. Добронравова (Об уравнениях движения неголономных механических систем с линейными и нелинейными связями. Труды Московск. гидро-метеорологич. и-та, вып. 1, 1940).

Однако, нужно отметить, что примеров аналогичных этим двум, т. е. с теми же принципами осуществления связей, можно указать много.

В качестве примера, на применение метода общих уравнений динамики к исследованию неголономного движения с нелинейной связью, рассмотрим задачу Аппеля о движении точки с тремя координатами x, y, z, стесненной неголономной связью вида

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{z}^2. \tag{5.83}$$

Приведем описание механизма, предложенного Аппелем, осуществляющего связь (5.83). Представим ножку кресла EJ, опирающуюся на круглое колесико K, катящееся без скольжения по горизонтальной плоскости XOY. Это колесико, при помощи вилки CD, соединено с ножкой кресла таким образом, что хомутик D охватывает эту ножку и может свободно вращаться, около вертикальной оси, вследствие чего плоскость колесика K может тоже поворачиваться на любой угол. В то же время колесико может поворачиваться вокруг горизонтальной оси C, несущей вилку CD. Когда хотят сдвинуть с места кресло в определенном направлении, колесико поворачивается вокруг ножки и перемещается в вертикальной плоскости этого направления. Таким образом система не оказывает никакого сопротивления перемещению в каком либо направлении.



черт 3.

Вообразим теперь, что колесико K соединено при помощи некоторой передачи, находящейся внутри вилки CD, с вертикальным стержнем MT, заключенным внутри ножки EJ и несущем на своем конце материальную точку M, массы m, с прямоугольными координатами x, y, z; на точку M действует некоторая сила $\vec{F}\,(X, Y, Z)$. Предположим, что передача от колесика к точке M устроена таким образом, что изменение δz апликаты точки M пропорционально углу поворота φ колесика в своей плоскости, т. е. $\delta z = b\delta\varphi$. Но, с другой стороны, поворот колесика на угол $\delta\varphi$ влечет за собой перемещение его центра C на отрезок $\delta s = a\delta\varphi$, где a—радиус колесика. В то же время эту величину δs можно представить в виде:

$$\delta s = \sqrt{\delta x_c^2 + \delta y_c^2} = a\delta\varphi,$$

где x_c и y_c координаты центра колесика. Итак, имеем:

$$\sqrt{\delta x_c^2 + \delta y_c^2} = \frac{a}{b}\delta z.$$

Предположим теперь, что расстояние HP по горизонтали между центром колесика и точкой M стремится к нулю, а также пренебрежем массой стержня сравнительно с массой точки. Тогда на координаты точки M в результате перехода к пределу будет наложена квадратичная связь вида:

$$\kappa^2 \ (\delta x^2 + \delta y^2) = \delta z^2, \qquad \kappa^2 = \frac{b^2}{a^2} = \text{const}.$$

Для простоты письма (не меняя общности) положим $\kappa = 1$. Тогда будем иметь движение точки M со связью, выражающейся уравнением

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{z}^2.$$

Интересно отметить, что П. Аппель дав конкретный пример движения точки с нелинейной неголономной связью (5.83), не мог воспользоваться своими уравнениями для составления дифференциальных уравнений движения этой точки. Он (в цитированной выше работе) выводит уравнения движения точки M довольно сложно, пользуясь некоторым видоизменением принципа Гаусса (принципом минимума функции R) в сочетании с методом лагранжевых неопределенных множителей.

Решим задачу Аппеля сначала методом общих уравнений динамики (5.43). Этих уравнений будет два:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{x}} = Q_x, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{y}} = Q_y, \tag{5.84}$$

если $\delta \ddot{z}$ будем считать зависимой вариацией, а $\ddot{z}$ зависимым ускорением.

Дифференцируя уравнение (5.83) один раз по времени, получим:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \dot{z}\ddot{z};$$

откуда

$$\ddot{z} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\dot{z}}. \tag{5.85}$$

Составляя энергию ускорений в координатах x, y, z, будем иметь:

$$S = \frac{1}{2} m \ (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2).$$

Мы должны выразить эту функцию только через те вторые производные координат, вариации которых независимые; поэтому исключим $\ddot{z}$, пользуясь равенством (5.85). Тогда получим окончательное выражение энергии ускорений:

$$S = \frac{1}{2} m \ (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{2} m \ \frac{(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})^2}{\dot{z}^2}. \tag{5.86}$$

Величины Q_x и Q_y найдем, пользуясь формулой аналогичной формуле элементарной работы, как коэффициенты при независимых вариациях $\delta \ddot{x}$, $\delta \ddot{y}$. Имеем:

$$\delta A = X \delta \ddot{x} + Y \delta \ddot{y} + Z \delta \ddot{z}. \tag{5.87}$$

Варьируя уравнение (5.85), получим:

$$\delta \ddot{z} = \frac{\dot{x} \delta \ddot{x} + \dot{y} \delta \ddot{y}}{\dot{z}}.$$

Заменив в (5.87) $\delta\ddot{z}$ найденным его выражением, будем иметь:

$$\delta A = \left(X + Z\frac{\dot{x}}{\dot{z}}\right)\delta\ddot{x} + \left(Y + Z\frac{\dot{y}}{\dot{z}}\right)\delta\ddot{y};$$

откуда

$$Q_x = X + Z\frac{\dot{x}}{\dot{z}}, \quad Q_y = Y + Z\frac{\dot{y}}{\dot{z}}. \tag{5.88}$$

На основании формул (5.86) и (5.88) уравнения движения (5.84), запишутся в виде:

$$m\left(\ddot{x} + \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\dot{z}^2}\dot{x}\right) = X + Z\frac{\dot{x}}{\dot{z}},$$

$$m\left(\ddot{y} + \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\dot{z}^2}\dot{y}\right) = Y + Z\frac{\dot{y}}{\dot{z}},$$

или, имея в виду (5.85),

$$m(\ddot{x}\dot{z} + \ddot{z}\dot{x}) = X\dot{z} + Z\dot{x}, \quad m(\ddot{y}\dot{z} + \ddot{z}\dot{y}) = Y\dot{z} + Z\dot{y}. \tag{5.89}$$

Присоединяя к последним уравнениям уравнение связи (5.83), мы получим систему трех совокупных дифференциальных уравнений, из которых могут быть определены x, y, z в функции времени t.

Для сравнения с предыдущим методом решим теперь ту же самую задачу методом уравнений Лагранжа с неопределенными множителями (5.24). Этих уравнений движения будет три, причем в данном случае они будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{y}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}. \tag{5.90}$$

Кинетическая энергия точки определится формулой $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, а обобщенные силы найдем, пользуясь выражением (5.87):

$$Q_x = X, \quad Q_y = Y, \quad Q_z = Z.$$

Уравнения (5.90) в данном случае принимают вид:

$$m\ddot{x} = X + 2\lambda\dot{x}, \quad m\ddot{y} = Y + \lambda\dot{y}, \quad m\ddot{z} = Z - 2\lambda\dot{z},$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{z}^2. \tag{5.91}$$

Получили систему четырех уравнений, позволяющих определить x, y, z, λ в функции t.

Чтобы убедиться, что уравнения (5.91), равносильны уравнениям (5.89), исключим из них λ. Имеем:

$$2\lambda = \frac{Z - m\ddot{z}}{\dot{z}}, \quad m\ddot{x} = X + \frac{Z - m\ddot{z}}{\dot{z}}\dot{x}, \; m\ddot{y} = Y + \frac{Z - m\ddot{z}}{\dot{z}}\dot{y}.$$

Умножая обе части двух последних уравнений на $\dot{z}$ и упрощая, мы и получим уравнения (5.89).

Заметим еще, что в задаче Аппеля неголономная связь (5.83) явно от времени не зависит и, кроме того, является однородной квадратичной функцией от скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Поэтому, если еще предположить, что активная сила $\vec{F}$ (X, Y, Z), действующая на точку, имеет потенциал, т. е. существует функция V (x, y, z) такая, что

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{5.92}$$

то в этом случае, как было отмечено в § 38, уравнения движения должны допускать интеграл энергии:

$$T + V = C = \text{const}.$$

В существовании этого интеграла можно убедиться и непосредственно, исходя, например, из уравнений движения (5.91).

В самом деле, умножая первые три уравнения (5.91) соответственно на $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ и затем складывая результаты, получим:

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} + 2\lambda\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2),$$

или, принимая во внимание (5.83) и (5.92),

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\,m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\frac{dV}{dt},$$

или

$$\frac{1}{2}m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = C. \tag{5.93}$$

Пример неголономного движения с нелинейной связью, более реальный в осуществлении, чем пример Аппеля, может дать, например, система состоящая из автомобиля или трактора с прицепом, движущаяся по поверхности земли с уравнением $f(x, y, z) = 0$, с постоянной по величине скоростью $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2$, независимо от профиля пути и различных возможных сопротивлений (система принимается за материальную точку с координатами x, y, z).

Не останавливаясь далее на описании механизмов при помощи которых достигается движение указанной выше системы с постоянной скоростью, заметим только, что такие механизмы действительно могут встречаться.

Следовательно, имеем реальное движение с неголономной нелинейной связью.

Мы надеемся, что предложенные в этой главе наиболее общие уравнения классической динамики будут иметь значения для дальнейших исследований в этой мало разработанной области аналитической механики.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. ТЕОРЕМЫ О СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ П. В. ВОРОНЦА.

В § 25 и 31 были рассмотрены лагранжевы уравнения для неконсервативных систем и динамические уравнения С. А. Чаплыгина и установлены методы интегрирования этих уравнений, аналогичные классическому методу Пуассона.

Здесь мы рассматриваем более общие динамические уравнения П. В. Воронца (4.11) (см. гл. IV) и устанавливаем некоторые теоремы о свойствах интегралов этих уравнений, из которых теоремы § 25 и 31 могут быть получены как частные случаи.

1. Пусть положение неголономной неконсервативной механической системы определяется координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а обусловленные неголономностью соотношения выражаются неинтегрируемыми соотношениями вида

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu}\dot{q}_\nu, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

где $B_{\nu\mu}$ — данные функции $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (для простоты мы ограничиваемся рассмотрением лишь случая, когда неголономные связи не зависят явно от времени). Уравнения П. В. Воронца для рассматриваемой механической системы могут быть записаны в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - E_\nu(L) = Q_\nu + \Delta_\nu, (\nu = m+1, \ldots, n), \tag{2}$$

$$\Delta_\nu = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\mu}\left[E_\rho(B_{\nu\mu}) - E_\nu(B_{\rho\mu})\right]\dot{q}_\rho,$$

$$E_\nu = \frac{\partial}{\partial q_\nu} + \sum_{i=1}^{m} B_{\nu i}\frac{\partial}{\partial q_i},$$

где L, Q_ν, Δ_ν — данные функции времени t координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и независимых скоростей $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_n$ (зависимые скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$ исключены при помощи уравнений (1)).

2. Величины $\dot{q}_\nu$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$ мы можем рассматривать как функции обобщенных импульсов $p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$ и наоборот.

Положим, что нам известен некоторый первый интеграл $\varphi(t; q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n) = \text{const}$ уравнений (1) и (2). Тогда, если ввести в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H(t; q_1, q_2, \ldots, q_n; p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot q_\nu - L,$$

то функция φ_0 должна удовлетворять тождественно условию:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \sum_{\nu=m+1}^{n} E_\nu(\varphi_0)\, \dot q_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_\nu} \left[E_\nu(L) + Q_\nu + \Delta_\nu\right] \equiv 0, \tag{3}$$

где $\varphi_0(t; q_1, q_2, \ldots, q_n; p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n)$ обозначает функцию, полученную из функции φ исключением скоростей $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n$ при помощи уравнений (1) и $p_\nu = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q_\nu}$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$.

Вводя избыточные переменные $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и полагая

$$K = \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_\nu} \dot u_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{n} \left[E_\nu(L) + Q_\nu + \Delta_\nu\right] u_\nu + \\ + \sum_{\mu=1}^{m} \left(\dot q_\mu - \sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu} \dot q_\nu\right) u_\mu, \tag{4}$$

мы можем заменить систему (2) и (1) лагранжевыми уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot u_\nu} - \frac{\partial K}{\partial u_\nu} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial u_\mu} = 0, \quad (\nu = m+1, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

из которых последние n уравнений являются вспомогательными и служат для определения переменных u_j.

В развернутом виде вспомогательная система n уравнений перепишется так:

$$\frac{d}{dt}\left\{u_\sigma\right\} - \sum_{\nu=m+1}^{n} \left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_\nu \partial q_\sigma} \dot u_\nu + \left[\frac{\partial E_\nu(L)}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial Q_\nu}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial q_\sigma}\right] u_\nu - \\ - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\sigma} \dot q_\nu u_\mu\right\} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_\nu \partial \dot q_\rho} \dot u_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{n} \left[\frac{\partial E_\nu(L)}{\partial \dot q_\rho} + \frac{\partial Q_\nu}{\partial \dot q_\rho} + \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial \dot q_\rho}\right] u_\nu - \\ - \sum_{\mu=1}^{m} B_{\rho\mu} u_\mu\right\} - \sum_{\nu=m+1}^{n} \left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_\nu \partial q_\rho} \dot u_\nu + \left[\frac{\partial E_\nu(L)}{\partial q_\rho} + \frac{\partial Q_\nu}{\partial q_\rho} + \\ + \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial q_\rho}\right] u_\nu - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\rho} \dot q_\nu u_\mu\right\} = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, m), \\ (\rho = m+1, \ldots, n). \tag{6'}$$

3. Вспомогательная система (6) обладает следующим замечательным свойством:

Теорема 1. *Если $\varphi(t;\ q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n;\ \dot q_1,\ \dot q_2,\dots,\dot q_n)=\mathrm{const}$ есть интеграл заданной системы уравнений (2), при связях (1), то система (6) удовлетворяется значениями*

$$u_\nu=\sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial^2H}{\partial p_\rho\,\partial p_\nu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot q_\rho}+\sum_{\mu=1}^{m}B_{\rho\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot q_\mu}\right),\quad (\nu=m+1,\ \dots,\ n)$$
$$u_i=-\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}+\sum_{\rho,\sigma=m+1}^{n}\frac{\partial^2H}{\partial p_\rho\,\partial p_\sigma}\,\frac{\partial^2L}{\partial\dot q_\sigma\,\partial q_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot q_\rho}+\sum_{\mu=1}^{m}B_{\rho\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot q_\mu}\right),\quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ m). \tag{7}$$

Приведем в основных чертах доказательство этого предложения. Вводя в равенства (7) функцию φ_0 вместо функции φ, мы можем эти равенства переписать так:

$$u_\nu=\frac{\partial\varphi_0}{\partial p_\nu},\ u_i=-\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_i},\quad (\nu=m+1,\ \dots,\ n;\ i=1,\ 2,\ \dots\ m). \tag{8}$$

Дифференцируя теперь первые $n-m$ равенств (8) по времени, заменяя $\dot p_\nu$ их значениями из уравнений (2), принимая при этом во внимание тождество (3), будем иметь:

$$\dot u_\nu=-\sum_{\rho=m+1}^{n}E_\rho(\varphi_0)\frac{\partial^2H}{\partial p_\rho\,\partial p_\nu}-\sum_{\rho,\sigma=m+1}^{n}\frac{\partial^2H}{\partial p_\rho\,\partial p_\nu}\left[\frac{\partial E_\sigma(L)}{\partial\dot q_\rho}+\frac{\partial Q_\sigma}{\partial\dot q_\rho}+\frac{\partial\Delta_\sigma}{\partial\dot q_\rho}\right]u_\sigma,\ (\nu=m+1,\dots,n), \tag{9}$$

где

$$E_\rho(\varphi_0)=E_\rho(\varphi)-\sum_{\sigma=m+1}^{n}E_\rho\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_\sigma}\right)u_\sigma. \tag{9'}$$

Подставляя найденные выражения для $\dot u_{m+1},\ \dots\ \dot u_n,\ u_1,\ \dots,\ u_n$ из (8) и (9) в уравнения (6′), принимая при этом во внимание соотношения

$$\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial^2L}{\partial\dot q_j\,\partial\dot q_\nu}\,\frac{\partial^2H}{\partial p_\nu\,\partial p_\rho}=\begin{cases}1 & \text{при } \rho=j\\ 0 & \text{при } \rho\neq j,\end{cases} \tag{10}$$

преобразуем их в следующие:

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_j}\right)+\sum_{\nu=m+1}^{n}\left\{\sum_{\rho=m+1}^{n}E_\rho(\varphi_0)\frac{\partial^2H}{\partial p_\rho\,\partial p_\nu}\,\frac{\partial^2L}{\partial\dot q_\nu\,\partial q_j}+\right.$$
$$+\sum_{\rho,\sigma=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi_0}{\partial p_\rho}\,\frac{\partial^2H}{\partial p_\sigma\,\partial p_\nu}\,\frac{\partial^2L}{\partial\dot q_\nu\,\partial q_j}\left[\frac{\partial E_\rho(L)}{\partial\dot q_\sigma}+\frac{\partial Q_\rho}{\partial\dot q_\sigma}+\frac{\partial\Delta_\rho}{\partial\dot q_\sigma}\right]-$$
$$\left.-\frac{\partial\varphi_0}{\partial p_\nu}\left[\frac{\partial E_\nu(L)}{\partial q_j}+\frac{\partial Q_\nu}{\partial q_j}+\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial q_j}\right]-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_j}\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\mu}\,\dot q_\nu\right\}=0. \tag{11}$$

Выполняя теперь в равенствах (11) дифференцирование по t, а затем имея в виду, что в силу уравнений $\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}$ $(\rho = m+1, \ldots\ n)$ и уравнений (1), скорости $\dot{q}_j$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ нужно рассматривать как функции времени t, координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и импульсов p_{m+1}, $p_{m+2}, \ldots, p_n$, получим тождества:

$$-\frac{\partial}{\partial q_j}\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \sum_{\nu=m+1}^{n} E_\nu(\varphi_0)\,\dot{q}_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi_0}{\partial p_\nu}\left[E_\nu(L) + Q_\nu + \Delta_\nu\right]\right\} = 0,$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, всякому первому интегралу уравнений Воронца соответствует решение (7) вспомогательной системы уравнений (6).

4. Из установленного свойства системы (6) непосредственно следует теорема, аналогичная теорема Пуассона.

Теорема 2. Допустим, что известен некоторый первый интеграл

$$f\,(t;\ q_1, q_2\ \ldots,\ q_n\ ;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n;\ u_1, u_2, \ldots\ ,\ u_n\ ;\ \dot{u}_{m+1}\ , \ldots, \dot{u}_n) = \text{const} \qquad (12)$$

расширенной системы уравнений (5) и (6). Если в этом интеграле заменить избыточные переменные $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $\dot{u}_{m+1}, \ldots, \dot{u}_n$ их значениями из равенств (7) и (9), в которых $\varphi = \text{const}$ есть интеграл системы (2) и (1), то равенство (12) будет выражать вообще некоторый новый интеграл системы (2) и (1).

Установленные теоремы дают способ, посредством которого, зная один интеграл расширенной системы (5) и (6) и один интеграл уравнений (2) и (1), можно найти второй интеграл системы (2) и (1); комбинируя этот новый интеграл с прежним интегралом расширенной системы, мы получили бы третий интеграл системы (2) и (1) и т. д., и таким образом могли бы отыскать в некоторых благоприятных случаях полную систему независимых интегралов уравнений (2) и (1).

5. Частные случаи. 1. Если система уравнений (2) и (1) не содержит явно времени t, а функция φ $(t;\ q_1, \ldots, q_n\ ;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \text{const}$ есть интеграл этих уравнений, то их интегралом будет также и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = C = \text{const}. \qquad (13)$$

Действительно, в этом случае расширенная система (5) и (6) всегда допускает интеграл вида

$$\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial K}{\partial\dot{u}_\nu}\dot{u}_\nu + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j - K = \text{const}. \qquad (14)$$

Если в равенстве (14) заменить $\dot{u}_{m+1}, \ldots, \dot{u}_n$, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ их значениями из (9) и (8), то равенство (14) будет выражать некоторый новый интеграл системы (2) и (1). Этому новому интегралу, на основании тождества (3) и соотношений (10), можно придать вид

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} = \text{const}. \qquad (15)$$

С другой стороны, как нетрудно видеть, имеет место равенство

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \sum_{\rho=m+1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_\rho\,\partial t}u_\rho, \qquad (16)$$

или, так как по предположению L явно от t не зависит,

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial t},$$

которое вместе с равенством (15) показывает, что $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\text{const}$ есть тоже интеграл системы уравнений (2) при наличии связей (1).

2) Если уравнения (2) и (1) не содержат явно координат $q_1, q_2,\ldots q_k$ $(\kappa \leqslant n)$, а функция $\varphi(t;\ q_1,\ q_2,\ldots q_n;\ \dot q_1,\ \dot q_2,\ldots,\ \dot q_n)=\text{const}$ есть интеграл этих уравнений, то их интегралами будут также и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}=C_\sigma=\text{const},\ (\sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ \kappa). \tag{17}$$

Действительно, беря частную производную по q_σ $(\sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ \kappa)$, от левой части тождества (3), получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\sigma}\right)+\sum_{\nu=m+1}^{n}E_\nu\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\sigma}\right)\dot q_\nu+\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\sigma}\right)\left[E_\nu\left(L\right)+Q_\nu+\Delta_\nu\right]=0,$$

$$(\sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ \kappa),$$

которое вместе с равенством $\frac{\partial\varphi_0}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}$ $(\sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ \kappa)$, вытекающим из вторых групп равенств (7) и (8) (имеющих место для $i=1,\ 2,\ldots n$), показывает, что $\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}=\text{const}$ есть тоже интеграл системы (2) и (1).

6. Рассмотрим, в частности, какую-нибудь голономную консервативную механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_{m+1},\ q_{m+2},\ \ldots,\ q_n$. Пусть движение этой системы определяется лагранжевыми уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\nu}-\frac{\partial L}{\partial q_\nu}=0,\qquad (\nu=m+1,\ \ldots,\ n). \tag{18}$$

Легко доказывается следующая теорема:

Теорема 3. Если $\varphi\ (t;\ q_\nu;\ \dot q_\nu)=const$ и $\psi\ (t;\ q_\nu;\ \dot q_\nu)=const$ *будут интегралами лагранжевой системы уравнений (18), то выражение*

$$\sum_{\nu,\rho=m+1}^{n}\frac{\partial^2H}{\partial p_\nu\,\partial p_\rho}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot q_\rho}\frac{\partial\psi}{\partial q_\nu}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_\nu}\frac{\partial\psi}{\partial\dot q_\rho}\right)+\sum_{\nu,\rho\,\sigma,j=m+1}^{n}\frac{\partial^2H}{\partial p_\rho\,\partial p_\nu}\,\frac{\partial^2H}{\partial p_\sigma\,\partial p_j}\,\frac{\partial^2L}{\partial q_\nu\partial\dot q_\sigma}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot q_j}\frac{\partial\psi}{\partial\dot q_\rho}-\frac{\partial\varphi}{\partial\dot q_\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\dot q_j}\right)=\text{const} \tag{19}$$

будет тоже интегралом этой системы.

Теорема 3 представляет собою не что иное, как классическую теорему Пуассона, выраженную в лагранжевых переменных q_ν, $\dot q_\nu$ для уравнений (18).

II. О ТЕОРЕМЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ С МНОЖИТЕЛЯМИ СВЯЗЕЙ

Значительный вклад в развитие теории уравнений динамики с множителями связей внес Г. К. Суслов, построивший уравнение в частных производных и обобщивший метод полного интеграла Гамильтона-Якоби на голономные консервативные системы (Г. К. Суслов, Теоретическая механика, стр. 461—474, 1946 г.). Однако, метод Г. К. Суслова—метод импульсивных множителей связей, как известно, вводит большее число постоянных интеграции, чем нужно для искомого движения.

Покажем, что если воспользоваться введенным в § 12 (гл. II) понятием полного интеграла уравнения в частных производных первого порядка с избыточными переменными, то метод полного интеграла Гамильтона-Якоби может быть обобщен на случай уравнений динамики с множителями связей для голономных консервативных систем и без введения лишних постоянных интеграции, доводя их число до надлежащего минимума.

1. Пусть связи, наложенные на голономную консервативную динамическую систему, положение которой определяется координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, заданы m конечными уравнениями вида

$$f_\alpha(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{20}$$

или им равносильными непроинтегрированными уравнениями вида

$$\dot{q}_\eta = \sum_{\nu=m+1}^{n+1} B_{\nu\eta}\, \dot{q}_\nu, \qquad (\dot{q}_{n+1} = \dot{t} = 1), (\eta = 1, 2, \ldots, m), \tag{21}$$

где $B_{\nu\eta}$ — данные функции $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$. Вследствие интегрируемости уравнений (21) $B_{\nu\eta}$ тождественно удовлетворяют соотношениям

$$E_\rho(B_{\nu\eta}) - E_\nu(B_{\rho\eta}) = 0, \quad (\rho, \nu = m+1, \ldots, n+1;\ \eta = 1, 2, \ldots, m); \tag{22}$$

оператор $E_\rho = \dfrac{\partial}{\partial q_\rho} + \sum\limits_{\eta=1}^{m} B_{\rho\eta} \dfrac{\partial}{\partial q_\eta}$ введен для сокращения.

Тогда уравнения движения рассматриваемой механической системы с неопределенными множителями λ, могут быть записаны в виде:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H_0}{\partial u_j}, \quad \dot{u}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} + \lambda_i, \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\dot{u}_\rho = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\rho} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_{\rho i}, \quad (\rho = m+1, \ldots, n), \tag{23}$$

где

$$H_0(t; q_1, \ldots, q_n; u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} u_j \dot{q}_j - L_0(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n),$$

$$u_j = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j}.$$

Уравнения (23) рассматриваются совместно с уравнениями связей (21), которые можно переписать так:

$$\frac{\partial H_0}{\partial u_\eta} = \sum_{\nu=m+1}^{n+1} B_{\nu\eta} \frac{\partial H_0}{\partial u_\nu}, \quad \left(\frac{\partial H_0}{\partial u_{n+1}} = 1\right), \quad (\eta = 1, 2, \ldots, m). \tag{24}$$

В силу уравнений (24) n импульсов u_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) связаны между собою m условиями; следовательно, независимых u_j будет только $n-m$.

Прежде чем перейти к доказательству интересующей нас теоремы для уравнений (23), придадим им несколько иной вид и установим некоторые соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

2. Обозначая через L результат исключения $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$ из выражения L_0 через посредство уравнений (21), получим

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\rho} + \sum_{i=1}^{m} B_{\rho i} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i}, \; (\rho = m+1, \ldots, n),$$

или

$$p_\rho = u_\rho + \sum_{i=1}^{m} B_{\rho i} u_i, \qquad (\rho = m+1, \ldots, n), \tag{25}$$

где через $p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho}$ обозначены независимые между собою импульсы.

Введем, кроме того, гамильтонову функцию

$$H(t;\, q_1, \ldots, q_n;\, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \sum_{\rho=m+1}^{n} p_\rho \dot{q}_\rho -$$
$$- L(t;\, q_1, \ldots q_n;\, \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n).$$

Тогда замечая, что выражение $H_0 - \sum_{i=1}^{m} B_{n+1,\,i}\, u_i$ есть результат исключения импульсов $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$ из функции H через посредство уравнений (25), имеем:

$$\begin{aligned}
&H_0 = H + \sum_{\eta=1}^{m} B_{n+1,\,\eta}\, u_\eta, \quad \frac{\partial H_0}{\partial u_\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \; (\rho = m+1, \ldots, n),\\
&\frac{\partial H_0}{\partial u_i} = \sum_{\nu=m+1}^{n+1} B_{\nu i} \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \; \left(\frac{\partial H}{\partial p_{n+1}} = 1\right), \; (i = 1, 2, \ldots, m),\\
&\frac{\partial H_0}{\partial q_j} = \frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{\eta=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n+1} \frac{\partial B_{\nu\eta}}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} u_\eta, \; (j = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{26}$$

Вводя в уравнения движения (23) вместо H_0 функцию H, мы можем переписать их так:

$$\dot{q}_i = \sum_{\nu=m+1}^{n+1} B_{\nu i} \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \dot{u}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{\eta=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n+1} \frac{\partial B_{\nu\eta}}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} u_\eta + \lambda_i,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \; \dot{u}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho} - \sum_{\eta=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n+1} \frac{\partial B_{\nu\eta}}{\partial q_\rho} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} u_\eta - \sum_{\eta=1}^{m} \lambda_\eta B_{\rho\eta},$$
$$(\rho = m+1, \ldots, n). \tag{27}$$

3. Покажем теперь, что теорема Гамильтона-Якоби может быть обобщена на случай уравнений движения с множителями связей для

голономных консервативных систем, т. е. что для уравнений (27) можно построить некоторое уравнение в частных производных первого порядка, зная полный интеграл которого возможно получить решение системы (27), или, что то же самое, системы (23).

Действительно, пусть S означает неизвестную функцию уравнения в частных производных вида

$$E_{n+1}(S)+H(t;\ q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n;\ p_{m+1},\ p_{m+2},\ \dots,\ p_n)=0, \quad (28)$$

где

$$E_{n+1}(S)=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{\eta=1}^{m}B_{n+1,\eta}\frac{\partial S}{\partial q_\tau},\quad p_\rho=E_\rho(S)\equiv\frac{\partial S}{\partial q_\rho}+\sum_{\eta=1}^{m}B_{\rho\eta}\frac{\partial S}{\partial q_\eta}. \quad (29)$$

Тогда можно доказать следующую теорему: *Если известен полный интеграл уравнения (28), т. е. известна функция*

$$S(t;\ q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n;\ a_{m+1},\ a_{m+2},\ \dots,\ a_n)+a_{n+1}$$

содержащая $n-m+1$ произвольных постоянных a_ρ, удовлетворяющая уравнению (28), то общее решение системы уравнений (27) и, следовательно, системы (23), получится из уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_\rho}=b_\rho,\quad E_\rho(S)=u_\rho+\sum_{\eta=1}^{m}B_{\rho\eta}u_\eta,\quad b_\rho=const,\ (\rho=m+1,\dots,n). \quad (30)$$

Доказательство. Дифференцируя первые $n-m$ уравнений (30) по времени, принимая при этом во внимания (27), мы получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_\rho\partial t}+\sum_{i=1}^{m}B_{n+1,i}\frac{\partial^2 S}{\partial a_\rho\partial q_i}+\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial a_\rho\partial q_\nu}+\sum_{i=1}^{m}B_{\nu i}\frac{\partial^2 S}{\partial a_\rho\partial q_i}\right)=0.$$

Покажем, что полученное равенство обращается в тождество, если переменные $p_\rho=u_\rho+\sum_{\eta=1}^{m}B_{\rho\eta}u_\eta$, входящие в H, заменить их значениями из уравнений (30). Выполняя эту замену, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_\rho\partial t}+\sum_{i=1}^{m}B_{n+1,i}\frac{\partial^2 S}{\partial a_\rho\partial q_i}+\sum_{\nu=m+1}^{n}\frac{\partial H}{\partial E_\nu(S)}\frac{\partial E_\nu(S)}{\partial a_\rho}=0,$$

$$(\rho=m+1,\ \dots,\ n). \quad (31)$$

Но левая часть этого равенства есть частная производная по a_ρ от левой части уравнения (28), в котором неизвестная функция заменена через полный интеграл S, а потому тождественно равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial a_\rho}\left\{E_{n+1}(S)+H\left[t;\ q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n;\ E_{m+1}(S),\ \dots,\ E_n(S)\right]\right\}\equiv 0,$$

$$(\rho=m+1,\ \dots,\ n);$$

следовательно, равенство (31) есть тождество.

Аналогичные рассуждения можно применить для доказательства того же положения относительно второй группы уравнений (30.) Дифференцируя по времени уравнения второй группы (30) и затем, заменяя в полученных равенствах $\dot{q}_j$ и $\dot{u}_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ их выражениями из уравнений (27), после простых преобразований получим:

$$E_{n+1} E_\rho(S) + E_\rho(H) + \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} E_\nu E_\rho(S) +$$
$$+ \sum_{\eta=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n+1} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \left[E_\rho (B_{\nu\eta}) - E_\nu (B_{\rho\eta})\right] u_\eta = 0. \qquad (32)$$

Так как по предположению уравнения связей (21) интегрируемы, то в силу (22) и соотношений $E_\nu E_\rho(S) = E_\rho E_\nu(S)$ $(\rho, \nu = m+1, \ldots, n+1)$, мы можем переписать равенства (32) так:

$$E_\rho E_{n+1}(S) + E_\rho(H) + \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} E_\rho E_\nu(S) = 0, \quad (\rho = m+1, \ldots, n). \qquad (33)$$

Покажем, что полученное равенство обращается в тождество, если величины $p_\rho = u_\rho + \sum_{\eta=1}^{m} B_{\rho\eta} u_\eta$, входящие в H, заменить их значениями из уравнений (30). Выполняя эту замену, получим:

$$E_\rho E_{n+1}(S) + E_\rho(H) + \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial H}{\partial E_\nu(S)} E_\rho E_\nu(S) = 0, (\rho = m+1, \ldots, n). \qquad (34)$$

Левая часть этого равенства есть операция E_ρ от левой части уравнения (28), в котором неизвестная функция заменена через полный интеграл S, а потому тождественно равна нулю, т. е.

$$E_\rho \{E_{m+1}(S) + H[t; q_1, q_2, \ldots, q_n; E_{m+1}(S), \ldots, E_n(S)]\} \equiv 0;$$

следовательно, равенство (34) есть тождество. Таким образом теорема полностью доказана.

Уравнения (30), число которых $2(n-m)$, содержат $2(n-m)$ произвольных постоянных a_ρ, b_ρ, что соответствует порядку системы (23). Добавив к уравнениям (30) уравнения (20) и (24), мы получим полную систему $2n$ уравнений для определения всех q_j, u_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ в функции времени t и $2(n-m)$ произвольных постоянных a_ρ, b_ρ. Ясно, что уравнения (30) представляют собою полную систему независимых интегралов уравнений движения (23), так как система (30) может быть решена относительно a_ρ, b_ρ, ибо якобиан

$$\left\| \frac{\partial}{\partial a_\rho} E_\nu(S) \right\| \neq 0.$$

Замечание. Из равенства (32) следует, между прочим, что для неголономных механических систем установленная здесь обобщенная теорема Гамильтона-Якоби не имеет места.

4. Приведем простой пример (см. Г. К. Суслов, теор. мех., стр. 470—471, 1946 г.) на применение рассмотренного здесь метода. Рассмотрим в вертикальной плоскости ZOX (ось OZ направлена по вертикали вверх) движение двух весомых точек масс m_1 и m_2 имеющих координаты (x_1, z_1) и (x_2, z_2) и подчиненных связям

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = a, \qquad (x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2. \qquad (35)$$

Будем определять положение системы координатами q, x_c, z_c, φ, следующим образом связанными с декартовыми координатами точек:

$$Mx_c = m_1x_1 + m_2x_2, \quad Mz_c = m_1z_1 + m_2z_2, \quad q = x_1 - x_2,$$

$$\varphi = arc\,\mathrm{tg}\frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2}, \quad M = m_1 + m_2. \tag{36}$$

Уравнения связей в этих переменных запишутся так:

$$f_1 = q\sec\varphi - l = 0, \qquad f_2 = Mx_c - a = 0. \tag{37}$$

Рассматриваемая система имеет две степени свободы; примем за независимые координаты $q_3 = z_c$, $q_4 = \varphi$; остальные координаты $q_1 = q$, $q_2 = x_c$ будут зависимыми.

Дифференцируя уравнения (37) по времени и затем, разрешая полученные уравнения относительно зависимых скоростей $\dot q$ и $\dot x_c$, будем иметь:

$$\dot q = -q\,\dot\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi, \qquad \dot x_c = 0; \tag{38}$$

откуда

$$B_{31} = 0, \quad B_{41} = -q\,\mathrm{tg}\,\varphi, \quad B_{51} = 0, \quad B_{32} = 0, \; B_{42} = 0, \; B_{52} = 0. \tag{39}$$

Кинетический потенциал L_0 системы и импульсы u_1, u_2, u_3, u_4 для взятых координат определяются формулами:

$$L_0 = \frac{1}{2}M\,(\dot x_c^2 + \dot z_c^2) + \frac{m_1m_2}{2M}\sec^2\varphi\,(\dot q^2 + 2q\,\dot q\,\dot\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi + q^2\,\dot\varphi^2\sec^2\varphi) - Mgz_c, \tag{40}$$

$$u_1 = \frac{m_1m_2}{M}\sec^2\varphi\,(\dot q + q\,\mathrm{tg}\,\varphi\dot\varphi), \qquad u_2 = M\dot x_c, \; u_3 = M\dot z_c,$$

$$u_4 = \frac{m_1m_2}{M}\sec^2\varphi\,(q\dot q\,\mathrm{tg}\,\varphi + q^2\dot\varphi\sec^2\varphi). \tag{41}$$

Исключая из L_0 зависимые скорости $\dot q$, $\dot x_c$ при помощи уравнений (38), получим для кинетического потенциала L следующее выражение:

$$L = \frac{1}{2}M\dot z_c^2 + \frac{m_1m_2}{2M}q^2\,\dot\varphi^2\sec^2\varphi - Mgz_c, \tag{42}$$

Составим теперь уравнение в частных производных (28). Импульсы p_3, p_4 связаны с соответствующими скоростями равенствами

$$p_3 = M\dot z_c, \quad p_4 = \frac{m_1m_2}{M}q^2\dot\varphi\sec^2\varphi.$$

С помощью этих равенств гамильтонова функция H представляется так:

$\sum p_i \dot q_i - L$

$$H = \frac{p_3^2}{2M} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{p_4^2}{2q^2}\cos^2\varphi + Mgz_c. \tag{43}$$

В соответствии с формулами (29) и (39), мы получим следующие выражения для независимых импульсов p_3, p_4 и $E_{4+1}(S)$ через частные производные:

$$p_3 = \frac{\partial S}{\partial z_c}, \; p_4 = \frac{\partial S}{\partial\varphi} - q\,\mathrm{tg}\,\varphi\frac{\partial S}{\partial q}, \quad E_{4+1}(S) = \frac{\partial S}{\partial t}; \tag{44}$$

следовательно, искомое уравнение (28) напишется так:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2M}\left(\frac{\partial S}{\partial z_c}\right)^2-\frac{1}{2q^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial S}{\partial\varphi}-q\sin\varphi\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+$$
$$+Mgz_c=0. \qquad (45)$$

Чтобы найти полный интеграл этого уравнения, заметим, что переменная t в него не входит; следовательно, данное уравнение можно разбить на несколько других, а именно:

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-h,\quad \frac{1}{q}\left(\cos\varphi\frac{\partial S}{\partial\varphi}-q\sin\varphi\frac{\partial S}{\partial q}\right)=a_4,$$
$$\frac{1}{2M}\left(\frac{\partial S}{\partial z_c}\right)^2=-Mgz_c+h-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)a_4^2, \qquad (46)$$

где h, a_4 — произвольные постоянные. Из равенств (46) находим полный интеграл

$$S=-ht+\frac{2}{3}M\sqrt{2g}\left[-z_c+\frac{2h-\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)a_4^2}{2gM}\right]^{\frac{3}{2}}+$$
$$+a_4q\varphi\sec\varphi+a_5. \qquad (47)$$

Интегралами канонической системы с множителями связей (которая нами здесь не выписана), согласно формулам (30), будут:

$$\frac{\partial S}{\partial h}=\tau,\quad \frac{\partial S}{\partial a_4}=b_4,\quad \frac{\partial S}{\partial z_c}=u_3,\quad \frac{\partial S}{\partial\varphi}-q\,\mathrm{tg}\,\varphi\frac{\partial S}{\partial q}=u_4-q\,\mathrm{tg}\,\varphi\cdot u_1,$$

т. е. в данном случае:

$$-t+\sqrt{\frac{2}{g}}\left[-z_c+\frac{2h-\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)a_4^2}{2gM}\right]^{\frac{1}{2}}=\tau,$$
$$-M\sqrt{2g}\left[-z_c+\frac{2h-\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)a_4^2}{2gM}\right]^{1/2}=u_3, \qquad (48)$$
$$q\varphi\sec\varphi-a_4\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left[-z_c+\frac{2h-\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)a_4^2}{2gM}\right]^{\frac{1}{2}}=b_4,$$
$$a_4q\sec\varphi=u_4-\mathrm{tg}\,\varphi\,u_1,$$

где τ и b_4 — произвольные постоянные. Присоединив к уравнениям (48) уравнения связей (37) и два уравнения типа (24) (которые здесь имеют вид: $u_1=0$, $u_2=0$), мы получим полную систему восьми уравнений для определения переменных q, x_c, z_c, φ, u_1, u_2, u_3, u_4 в функции времени t и определения произвольных постоянных h, a_4, b_4, τ, воспользовавшись, конечно, начальными данными.

III. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ С МНОЖИТЕЛЯМИ СВЯЗЕЙ ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ.

В § 19 (гл. II) мы рассмотрели уравнения движения с множителями связей для голономных консервативных систем и доказали применимость к этим уравнениям классической теоремы Пуассона.

Вопрос о применении теоремы Пуассона к уравнениям динамики с множителями связей для голономных консервативных систем исследовался К. Г. Якоби и И. В. Мещерским (И. В. Мещерский, О теореме Пуассона при существовании условных уравнений, Труды VIII съезда русских естествоиспыт. и врачей, 1890 г.). Оба автора применяли иные сравнительно с предлагаемыми нами методы и полученные ими результаты формулируются иначе, чем в § 19. При этом у обоих авторов для применения теоремы Пуассона необходимо оказывалось, чтобы все условные уравнения и исходные интегралы уравнений движения удовлетворяли некоторым определенным условиям.

Здесь мы рассматриваем уравнения динамики с множителями связей для неголономных неконсервативных систем и устанавливаем некоторые теоремы о свойствах интегралов этих уравнений, из которых теорема § 19 (гл. II) получается как частный случай.

1. Пусть положение неголономной неконсервативной механической системы определяется координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а обусловленные неголономностью соотношения выражаются неинтегрируемыми уравнениями вида

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu}\, \dot{q}_\nu, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{49}$$

где $B_{\nu\mu}$ — данные функции $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Так как уравнения (49) неинтегрируемые, то величины

$$E_\rho (B_{\nu\mu}) - E_\nu (B_{\rho\mu}), \qquad (\rho, \nu = 1, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

не могут быть одновременно нулями; оператор $E_\rho = \dfrac{\partial}{\partial q_\rho} + \sum\limits_{i=1}^{m} B_{\rho i} \dfrac{\partial}{\partial q_i}$ введен для сокращения.

Тогда уравнения движения рассматриваемой механической системы, содержащие неопределенные множители λ, могут быть представлены в виде:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H_0}{\partial u_j}, \quad \dot{u}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial u_i} + Q_i + \lambda_i, \ (j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\dot{u}_\rho = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\rho} + Q_\rho - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_{\rho i}, \ (\rho = m+1, m+2, \ldots, n), \tag{50}$$

где H_0 и Q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ данные функции времени t, координат q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, импульсов $u_j = \dfrac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, а L_0 $(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ — кинетический потенциал системы, составленный без учета неголономных связей (49).

Уравнения (50) рассматриваются совместно с уравнениями (51), которые можно переписать так:

$$\frac{\partial H_0}{\partial u_\mu} = \sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu} \frac{\partial H_0}{\partial u_\nu}, \; (\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Вводя избыточные переменные $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ и полагая

$$R = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H_0}{\partial u_j} p_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H_0}{\partial q_j} - Q_j \right) s_j + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho i}\, s_\rho - s_i \right) \lambda_i, \tag{52}$$

мы можем заменить систему (50) каноническими уравнениями

$$\dot{q}_j = \frac{\partial R}{\partial p_j}, \quad \dot{u}_j = -\frac{\partial R}{\partial s_j}, \quad \dot{s}_j = \frac{\partial R}{\partial u_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial R}{\partial q_j},$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{53}$$

из которых последние $2n$ уравнений являются вспомогательными и служат для определения избыточных координат $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n$ и избыточных импульсов $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$.

В развернутом виде вспомогательная система уравнений перепишется так:[1]

$$\dot{s}_j - \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 H_0}{\partial u_\sigma\, \partial u_j} p_\sigma - \sum_{\sigma=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_\sigma\, \partial u_j} - \frac{\partial Q_\sigma}{\partial u_j} \right) s_\sigma - \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho i}\, s_\rho - \right.$$
$$\left. - s_i \right) \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_j} = 0, \; (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$\dot{p}_j + \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 H_0}{\partial u_\sigma\, \partial q_j} p_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_\sigma\, \partial q_j} - \frac{\partial Q_\sigma}{\partial q_j} \right) s_\sigma + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho i}\, s_\rho - \right.$$
$$\left. - s_i \right) \frac{\partial \lambda_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial B_{\rho i}}{\partial q_j} s_\rho \lambda_i = 0. \tag{54}$$

2. Допустим, что нам известен некоторый первый интеграл $\varphi(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ u_1\ u_2,\ \ldots,\ u_n) = \text{const}$ уравнений движения (50). Тогда функция φ должна удовлетворят тождественно условию:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial H_0}{\partial u_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial H_0}{\partial q_j} \right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} Q_j +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} - \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\rho} \right) \lambda_i \equiv 0. \tag{55}$$

Вспомогательная система уравнений (54) обладает следующим весьма интересным свойством:

---

[1] Как известно, множители λ_i определяются как функции от t, q_σ, u_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n)$ при помощи уравнений связей (51); для этой цели нужно продифференцировать каждое из равенств (51) по времени и подставить вместо $\dot{q}_\sigma$ и $\dot{u}_\sigma$ $(\sigma = 1,\ \ldots,\ n)$ их выражения из уравнений (50), тогда мы получим m уравнений для определения m множителей λ_i как функции от $t,\ q_\sigma,\ u_\sigma$ (явный вид этих функций за ненадобностью не выписан).

Теорема 1. *Если* $\varphi(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) = \text{const}$ *есть интеграл системы уравнений (50), то вспомогательная система (54) удовлетворяется значениями*

$$s_j = \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}, \quad p_j = -\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}, \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{56}$$

Действительно, заменяя в уравнениях (54) величины s_j и p_j их выражениями из (56), имея при этом в виду уравнения (50), получим тождества:

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \equiv 0, \qquad \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \equiv 0, \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, всякому интегралу заданной системы уравнений (50) соответствует частное решение (56) вспомогательной системы (54).

3. Из установленного свойства системы уравнений (50) и (54) непосредственно следует такое предложение:

Теорема 2. *Если известен некоторый первый интеграл*

$$f(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_n;\ s_1,\ \ldots,\ s_n;\ p_1,\ \ldots,\ p_n) = \text{const}$$

расширенной системы (53) и в этом интеграле заменить избыточные переменные s_j, p_j ($j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) их значениями из равенств (56), в которых $\varphi = \text{const}$ есть интеграл системы (50), то равенство

$$f\left(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ u_1,\ \ldots\ u_n\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_n};\ -\frac{\partial\varphi}{\partial q_1},\ \ldots,\ -\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}\right) = \text{const} \tag{57}$$

будет выражать вообще некоторый новый интеграл системы (50).

Теорема 2 дает способ, посредством которого, зная один интеграл расширенной системы (53) и один интеграл уравнений (50), при помощи одного только дифференцирования можно получить второй интеграл системы уравнений (50); комбинируя этот новый интеграл с прежним интегралом расширенной системы, мы получили бы третий интеграл системы (50) и т. д., и таким образом могли бы отыскать в некоторых благоприятных случаях полную систему независимых интегралов уравнений (50).

4. **Частные случаи.** 1) Если H_0 и Q_j ($j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) не содержат явно времени t, а функция $\varphi(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_n) = \text{const}$ есть интеграл уравнений движения (50), то их интегралом будет также и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \text{const}. \tag{58}$$

Действительно, в этом случае расширенная система (53) всегда допускает первый интеграл вида

$$R = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H_0}{\partial u_j}p_j + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H_0}{\partial q_j} - Q_j\right)s_j + \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{\rho=m+1}^{n}B_{\rho i}\,s_\rho - s_i\right)\lambda_i = \text{const}. \tag{59}$$

Если в равенстве (59) заменить s_j, p_j ($j = 1,\ \ldots,\ n$) их значениями из (56), то равенство (59), согласно теореме 2, будет выражать вообще новый интеграл системы уравнений (50). Этому новому интегралу на основании тождества (55) можно придать вид $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \text{const}$.

Таким образом, если $\varphi(t;\ q_j;\ u_j) = \text{const}$ *есть интеграл уравнений* *движения (50), которые не содержат явно времени, то интегралами этих уравнений будут также* $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\text{const}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\text{const}$ *и т. д.*

Если же функция φ *явно от времени* t *не зависит, то* $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$, *и тогда выражение (58) уже не будет интегралом уравнений (50).*

2) *Если* H_0, Q_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ *и уравнения (49) не содержат явно координаты* q_k, *а функция* $\varphi(t;\, q_1, \ldots, q_n, u_1, \ldots, u_n)=\text{const}$ *есть интеграл уравнений (50), то их интегралом будет также и равенство*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}=\text{const}.$$

В справедливости этого предложения можно убедиться, например, путем вычисления частной производной по q_k от левой части тождества (55). Действительно, беря частную производную по q_k от левой части (55), получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right)\frac{\partial H_0}{\partial u_j}-\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right)\frac{\partial H_0}{\partial q_j}\right|+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right)Q_j+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right)-\sum_{\rho=m+1}^{n}B_{\rho i}\frac{\partial}{\partial u_\rho}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right)\right]\lambda_i=0,$$

которое показывает, что $\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}=\text{const}$ есть тоже интеграл уравнений движения (50).

5. В силу уравнений (51) импульсы u_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ связаны между собою m условиями, поэтому независимых u_j будет только $n-m$.

Обозначая через L результат исключения $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_m$ из L_0 через посредство уравнений (49), получим

$$\frac{\partial L}{\partial\dot q_\rho}=\frac{\partial L_0}{\partial\dot q_\rho}+\sum_{i=1}^{m}B_{\rho i}\frac{\partial L_0}{\partial\dot q_i},\quad(\rho=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n),$$

или

$$r_\rho=u_\rho+\sum_{i=1}^{m}B_{\rho i}u_i,\quad(\rho=m+1,\ \ldots,\ n),\tag{A}$$

где через

$$r_\rho=\frac{\partial L}{\partial\dot q_\rho},\quad(\rho=m+1,\ \ldots,\ n)\tag{B}$$

обозначены независимые между собою импульсы.

Пусть Φ есть произвольная функция от $t, q_1, \ldots, q_n, r_{m+1}, \ldots, r_n$, причем переменные $q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n, r_{m+1}, r_{m+2}, \ldots, r_n$ связаны уравнениями (49) и (B).

Обозначая через φ результат исключения величин $r_{m+1}, \ldots, r_n$ из функции Φ через посредство уравнений (A), получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_\rho}=\frac{\partial\Phi}{\partial r_\rho},\quad\frac{\partial\varphi}{\partial u_\mu}=\sum_{\rho=m+1}^{n}B_{\rho\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial r_\rho},\quad(\rho=m+1,\ \ldots,\ n;\ \mu=1,\ 2,\ \ldots,\ m);$$

отсюда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_\mu} = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\rho}, \quad (\mu=1,\ 2,\ \dots,\ m). \tag{60}$$

Соотношения (60), имеющие место для функции $\varphi\ (t;\ q_j;\ u_j)$, которая получена из произвольной функции $\Phi\ (t;\ q_i;\ r_\rho)$ при наличии неинтегрируемых уравнений (49) и зависимостей (А), позволяют доказать для уравнений движения (50) ряд теорем.

Из равенств (56) и соотношений (60) непосредственно вытекает такое предложение:

Теорема 3. *Вспомогательные переменные $s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_n$, определяемые формулами (56), в которых $\varphi\ (t;\ q_j;\ u_j) = \mathrm{const}$ есть интеграл уравнений движения (50), связаны между собою m условиями вида*

$$s_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu}\, s_\rho\,, \ (\mu=1,2,\dots,m), \tag{61}$$

где $B_{\rho\mu}$ — коэффициенты уравнений связей (49).

Таким образом, из $2\,n$ величин $s_j,\ p_j\ (j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$, определяющих частное решение вспомогательной системы уравнений (54), независимых будет только $2n-m$.

6. Допустим в частности, что рассматриваемая неголономная механическая система—консервативная и, следовательно, обобщенные силы $Q_j\ (j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ в уравнениях (50) удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial Q_\sigma}{\partial q_j} = 0, \qquad \frac{\partial Q_j}{\partial u_\sigma} = 0,\ (j,\sigma = 1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{62}$$

При помощи соотношений (61) легко доказывается следующая теорема:

Теорема 4. *Если $s_j,\ p_j$ и $s_j',\ p_j'\ (j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ — два частных решения вспомогательной системы уравнений (54), в которых обобщенные силы $Q_j\ (j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ удовлетворяют условиям (62), то эти два частных решения связаны между собою зависимостью вида*

$$\sum_{j=1}^{n}\left(s_j p_j' - p_j s_j'\right) + \int \sum_{i=1}^{m}\ \sum_{\rho,\sigma=m+1}^{n}\left[\,E_\sigma(B_{\rho i}) - E_\rho(B_{\sigma i})\,\right] s_\rho s_\sigma' \lambda_i\, dt = \mathrm{const}. \tag{63}$$

Теорема 5. *Если $\varphi\ (t;\ q_j;\ u_j) = \mathrm{const}$ и $\psi\ (t;\ q_j;\ u_j) = \mathrm{const}$ — два первых интеграла уравнений движения неголономной консервативной системы (50), то равенство*

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial\psi}{\partial u_j} - \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\right) + \int\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{\rho,\sigma=m+1}^{n}\left[E_\sigma(B_{\rho i}) - E_\rho(B_{\sigma i}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial u_\rho}\frac{\partial\psi}{\partial u_\sigma}\cdot \lambda_i\, \mathrm{dt} = \mathrm{const} \tag{64}$$

будет тоже интегралом этих уравнений движения.

Доказательство. Так как $\varphi(t;\ q_j;\ u_j) = \mathrm{const}$ и $\psi(t;\ q_j;\ u_j) = \mathrm{const}$ суть первые интегралы уравнений (50), то имеем, согласно формулам (56), два частных решения вспомогательной системы (54):

$$s_j = \frac{\partial\varphi}{\partial u_j},\ p_j = -\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}, \quad s_j' = \frac{\partial\psi}{\partial u_j},\ p_j' = -\frac{\partial\psi}{\partial q_j}, \qquad (j=1,\ 2,\dots,\ n).$$

Подставляя найденные выражения для s_j p_j, s'_j, p'_j в равенство (63), преобразуем его в (64), что доказывает нашу теорему.

7. В частности, если уравнения связей (49) интегрируемы и, следовательно, коэффициенты $B_{\nu\mu}$ тождественно удовлетворяют соотношениям вида

$$E_\rho(B_{\nu\mu}) - E_\nu(B_{\rho\mu}) = 0, \quad (\rho, \nu = m+1, \ldots, n; \; \mu = 1, 2, \ldots, m,),$$

то в равенстве (64) интеграл пропадет; в этом случае получим:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial\psi}{\partial u_j} - \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\right) \equiv (\varphi, \psi) = \text{const}, \tag{65}$$

а это не что иное, как ранее установленная (глав. II, § 19) теорема Пуассона для уравнений динамики с множителями связей в случае голономных консервативных систем.

8. Вернемся к задаче Г. К. Суслова (стр. 149 приложен.) и решим ее, применяя метод интегрирования, основанный на применении классической теоремы Пуассона (65).

Составим гамильтоновы уравнения движения системы с множителями связей. Функция L_0, импульсы u_1, u_2, u_3, u_4 и коэффициенты $B_{\nu\mu}$ определяются прежними формулами (40), (41) и (39). С помощью этих формул функция H_0 представится так:

$$H_0 = \frac{1}{2M}\left(u_2^2 + u_3^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(u_1^2 - \frac{2u_1u_4}{q}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{u_4^2}{q^2}\cos^2\varphi\right) + $$
$$+ Mgz_c. \tag{66}$$

Уравнения (24) для взятого случая принимают вид

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0. \tag{67}$$

Имея функцию H_0 и принимая во внимание уравнения связей (38), мы получим уравнения движения системы в виде:

$$\dot q = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(u_1 - \frac{u_4}{q}\sin\varphi\cos\varphi\right), \quad \dot x_c = \frac{u_2}{M}, \quad \dot z_c = \frac{u_3}{M},$$

$$\dot\varphi = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(-\frac{u_1}{q}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{u_4}{q^2}\cos^2\varphi\right), \quad \dot u_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{u_1u_4}{q^2}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{u_4^2}{q^3}\cos^2\varphi\right) + \lambda_1, \qquad \dot u_2 = \lambda_2, \quad \dot u_3 = -Mg,$$

$$\dot u_4 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(\frac{u_1u_4}{q}\cos 2\varphi + \frac{u_4^2}{q^2}\sin\varphi\cos\varphi\right) + q\,\mathrm{tg}\varphi\,\lambda_1. \tag{68}$$

Присоединив к этим уравнениям уравнения связей (38) или (67), будем иметь полную систему десяти уравнений для определения десяти неизвестных q, x_c, z_c, φ, u_1, u_2, u_3, u_4, λ_1, λ_2.

Легко убедиться, что уравнения (68) допускают первые интегралы:

$$\psi_1 = u_3 t + \frac{1}{2}Mgt^2 - Mz_c = c_1, \quad \psi_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)u_4 t - q^2\varphi\sec^2\varphi = c_2. \tag{69}$$

Применяя к этим интегралам формулу (65), мы не получим нового интеграла, так как скобки Пуассона обращаются тождественно в нуль т. е.

$$(f_1, f_2) \equiv 0.$$

Но уравнения движения (68) и уравнения связей (67) не содержат явно времени t, поэтому, применяя к интегралам (69) формулу (58), мы получим следующие интегралы:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = u_3 + Mgt = c_3, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) u_4 = c_4. \tag{70}$$

Четыре интеграла (69) и (70), вместе с уравнениями связей (37) и (67), позволяют определить неизвестные q, x_c, z_c, φ, u_1, u_2, u_3, u_4 в функции t и четырех произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4. Это, очевидно, и будут те самые интегралы, которые можно получить непосредственным интегрированием уравнений движения (68).

IV. О ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ С МНОЖИТЕЛЯМИ СВЯЗЕЙ.

Уравнения динамики с множителями связей, кроме лишних координат содержат столько же лишних неизвестных функций—неопределенных множителей, поэтому их интегрирование значительно сложнее, чем интегрирование соответствующих уравнений динамики в избыточных координатах (см. гл. II, уравнения (2.20) и (2.59), свободных от множителей связей. Но зато движение системы определяется этими уравнениями полнее: становятся известными не только движение системы, но и реакции, оказываемые связями на систему.

Поскольку уравнения динамики с множителями связей необходимы и имеют приложения в механике, то возникла необходимость в развитии теорий, имеющих отношение к изучению свойств этих уравнений: их интеграции, изучения их интегралов и т. д.

В разработке теории этих уравнений, как известно, приняли участие Якоби, И. В. Мещерский, Г. К. Суслов и др.

В предыдущих разделах данной работы мы показали, что метод полного интеграла Гамильтона—Якоби может быть обобщен на случай уравнений динамики с множителями связей для голономных консервативных систем и без введения лишних постоянных интеграции, а также доказали (безусловную) применимость к этим уравнениям обычной теоремы Пуассона.

Здесь мы показываем, что теорема Якоби о преобразовании канонических уравнений Гамильтона может быть обобщена на случай уравнений динамики с множителями связей для голономных консервативных систем. Кроме того, здесь дается новое (более простое) доказательство обобщенной теоремы Гамильтона—Якоби о полном интеграле, установленной выше (см. стр. 146—149 прилож.) и приводится пример на применение этой теоремы к связанным задачам динамики.

I. Применение принципа Остроградского—Гамильтона.

Пусть связи, наложенные на голономную консервативную систему, положение которой определяется координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, заданы m конечными уравнениями вида

$$f_\alpha \ (t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \tag{71}$$

или им равносильными непроинтегрированными уравнениями вида

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\nu=m+1}^{n+1} B_{\nu\mu}\dot{q}_\nu, (\mu = 1, 2, \ldots, m), (\dot{q}_{n+1} = \dot{t} = 1) \qquad (72)$$

и, следовательно,

$$\delta q_\mu = \sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu}\delta q_\nu, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \qquad (73)$$

где $B_{\nu\mu}$ — данные функции $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$. Вследствии интегрируемости уравнений (72) коэффициенты $B_{\nu\mu}$ тождественно удовлетворяют соотношениям

$$E_\rho(B_{\nu\mu}) - E_\nu(B_{\rho\mu}) = 0, \qquad (\rho, \nu = m+1, \ldots, n+1), \qquad (74)$$

$$E_\rho = \frac{\partial}{\partial q_\rho} + \sum_{i=1}^{m} B_{\rho i}\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Тогда уравнения движения рассматриваемой механической системы содержащие неопределенные множители λ, могут быть записаны в виде:

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H_0}{\partial u_\rho}, \quad \dot{u}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} + \lambda_i, (\rho = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\dot{u}_\nu = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\nu} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_{\nu i}, \qquad (\nu = m+1, \ldots, n); \qquad (75)$$

где

$$H_0(t; q_1, \ldots, q_n; u_1, \ldots u_n) = \sum_{\rho=1}^{n} u_\rho \dot{q}_\rho -$$

$$- L_0(t; q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n), \quad u_\rho = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\rho}.$$

Уравнения (75) рассматриваются совместно с уравнениями связей (72), которые можно переписать так:

$$\frac{\partial H_0}{\partial u_\mu} = \sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu}\frac{\partial H_0}{\partial u_\nu} + B_{n+1,\mu}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \qquad (76)$$

Принцип Остроградского — Гамильтона непосредственно применяется к голономным системам. Пользуясь уравнением, выражающем этот принцип,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\rho=1}^{n} u_\rho\dot{q}_\rho - H_0\right)dt = 0 \qquad (77)$$

и вычисляя вариации, мы видим, что соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\rho=1}^{n}\left(\dot{q}_\rho\delta u_\rho - \dot{u}_\rho\delta q_\rho\right) - \delta H_0\right]dt = 0$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\rho=1}^{n}\left(\dot q_\rho\,\delta u_\rho-\dot u_\rho\,\delta q_\rho\right)-\delta H_0+\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_\mu\left(\delta q_\mu-\sum_{\nu=m+1}^{n}B_{\nu\mu}\delta q_\nu\right)\right]dt=0 \tag{78}$$

эквивалентно $2n$ уравнениям движения (75). Таким образом, выражение принципа Остроградского—Гамильтона (77) эквивалентно гамильтоновой системе уравнений (75).

2. Канонические преобразования.

Покажем, что уравнения (75) обладают тем свойством, что они не изменяют своего вида при некоторых преобразованиях переменных q_ρ, u_ρ $(\rho=1, 2, \ldots, n)$.

Введем вместо переменных q_ρ, u_ρ $(\rho=1, 2, \ldots, n)$ новые переменные Q_ρ, P_ρ $(\rho=1, 2, \ldots, n)$ с помощью некоторого преобразования. Пусть каждая группа переменных q_ρ, t и Q_ρ, t подчинена m дифференциальным интегрируемым связям вида:

$$\dot q_\mu=\sum_{\nu=m+1}^{n+1}B_{\nu\mu}\dot q_\nu,\quad \dot Q_\mu=\sum_{\nu=m+1}^{n+1}A_{\nu\mu}\dot Q_\nu,\qquad (\dot q_{n+1}=\dot Q_{n+1}=\dot t=1),$$

$$(\mu=1, 2, \ldots, m), \tag{79}$$

где $B_{\nu\mu}$ — данные функции от q_ρ, t, а $A_{\nu\mu}$ — от Q_ρ, t. В конечной форме уравнения этих связей следующие:

$$f_\alpha(t;\, q_1, q_2, \ldots, q_n)=0,\quad \varphi_\alpha(t;\, Q_1, Q_2, \ldots Q_n)=0, (\alpha=1, 2, \ldots, m). \tag{80}$$

Так как форма уравнений (75) непосредственно вытекает из выражения (77), то для сохранения прежней формы у преобразованных уравнений необходимо, чтобы принцип Остроградского—Гамильтона в новых переменных Q_ρ, P_ρ имел тоже самое выражение, т. е. чтобы уравнение (77) (при наличии связей (79)) после преобразования имело вид:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\rho=1}^{n}P_\rho\dot Q_\rho-R\right)dt=0, \tag{81}$$

где R, выраженная в переменных Q_ρ, P_ρ, играет роль функции Гамильтона для преобразованных уравнений.

Для удовлетворения этого условия необходимо и достаточно, чтобы подинтегральные функции в формулах (77) и (81) различались между собою на производную по времени от произвольной функции $V(t;\, q_1, q_2, \ldots, q_n;\, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$, т. е. чтобы

$$\sum_{\rho=1}^{n}u_\rho\dot q_\rho-H_0=\sum_{\rho=1}^{n}P_\rho\dot Q_\rho-R+\frac{dV}{dt}. \tag{82}$$

Действительно,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{dV}{dt}dt=\delta\left|V\right|_{t_0}^{t_1}=0,$$

так как на пределах интегрирования функция V имеет постоянные значения, вариации которых равны нулю. Умножая равенство (82) на dt, и заменяя затем в этом равенстве зависимые dq_μ и dQ_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$) их выражениями, найденными из уравнений (79), будем иметь:

$$\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(u_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}u_\mu\right)dq_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{n}\left(P_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu\mu}P_\mu\right)dQ_\nu +$$

$$+\left(R - H_0 + \sum_{\mu=1}^{m} B_{n+1,\mu}u_\mu - \sum_{\mu=1}^{m} A_{n+1,\mu} P_\mu\right)dt = \sum_{\nu=m+1}^{n} E_\nu^q(V)\, dq_\nu +$$

$$+\sum_{\nu=m+1}^{n} E_\nu^Q(V)\, dQ_\nu + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{n+1,\mu}\frac{\partial V}{\partial q_\mu} + \sum_{\mu=1}^{m} A_{n+1,\mu}\frac{\partial V}{\partial Q_\mu}\right)dt. \tag{83}$$

Сравнивая в правой и левой частях этого равенства коэффициенты при одинаковых dq_ν, dQ_ν, dt (которые между собою независимые), получим:

$$u_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}u_\mu = \frac{\partial V}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}\frac{\partial V}{\partial q_\mu} \equiv E_\nu^q(V), \quad (\nu = m+1, \ldots, n),$$

$$P_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu\mu}P_\mu = -\frac{\partial V}{\partial Q_\nu} - \sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu\mu}\frac{\partial V}{\partial Q_\mu} \equiv -E_\nu^Q(V), \tag{84}$$

$$R = H_0 + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{n+1,\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial q_\mu} - u_\mu\right) + \sum_{\mu=1}^{m} A_{n+1,\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial Q_\mu} + P_\mu\right). \tag{85}$$

Формулы (84) и (85), при наличии первых групп уравнений (80) и (79) (или, что тоже самое, уравнений (71) и (76)), дают возможность найти выражения старых переменных q_ρ, u_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, n$) через новые Q_ρ, P_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, n$) при таком каноническом преобразовании, при котором гамильтонова система уравнений (75) переходит также в гамильтонову систему (с неопределенными множителями μ):

$$\dot{Q}_\rho = \frac{\partial R}{\partial P_\rho}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial R}{\partial Q_i} + \mu_i, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m),$$

$$\dot{P}_\nu = -\frac{\partial R}{\partial Q_\nu} - \sum_{i=1}^{m} \mu_i A_{\nu i}, \quad (\nu = m+1, \ldots, n). \tag{86}$$

К этим уравнениям должны быть присоединены уравнения связей, т. е. вторая группа уравнений (80) или (79), причем последние можно переписать так:

$$\frac{\partial R}{\partial P_\mu} = \sum_{\nu=m+1}^{n} A_{\nu\mu}\frac{\partial R}{\partial P_\nu} + A_{n+1,\mu}, \quad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{87}$$

Таким образом, мы получаем следующее предложение:

Теорема. *Если переменные q_ρ, u_ρ преобразованы и новые переменные Q_ρ, P_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, n$), причем старые и новые переменные* *связаны уравнениями* (84) *и, кроме того, соотношениями* (80), *то дифференциальные уравнения движения для новых переменных также будут иметь гамильтонову форму с множителями связей* (86), *при этом новая функция Гамильтона* R *определяется формулой* (85).

Это преобразование, как видно из формул (84) и (85), зависит от выбора произвольной функции $V\ (t;\ q_\rho;\ Q_\rho)$, а также от выбора коэффициентов $A_{\nu\mu}$ интегрируемых дифференциальных связей (79).

В частном случае, когда положение рассматриваемой механической системы в новых переменных определяется независимыми координатами $Q_{m+1}, Q_{m+2}, \dots, Q_n$ и, следовательно, функция R зависит только от переменных $Q_{m+1}, Q_{m+2}, \dots, Q_n, P_{m+1}, \dots, P_n, t$, *а* все $A_{\nu\mu}=0$ $(\nu=m+1, \dots, n;\ \mu=1, 2, \dots, m)$, уравнения (86) делаются обычными каноническими уравнениями Гамильтона:

$$\dot{Q}_\nu=\frac{\partial R}{\partial P_\nu}, \quad \dot{P}_\nu=-\frac{\partial R}{\partial Q_\nu}, \qquad (\nu=m+1, \dots, n). \tag{88}$$

В этом случае формулы (84) и (85), принимающие вид:

$$u_\nu+\sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}u_\mu=\frac{\partial V}{\partial q_\nu}+\sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}\frac{\partial V}{\partial q_\mu}\equiv E_\nu^q(V),\ \overset{\bullet}{P}_\nu=-\frac{\partial V}{\partial Q_\nu}, \tag{89}$$

$$(\nu=m+1 \dots n),\quad V(t;\ q_1, q_2, \dots, q_n;\ Q_{m+1}, \dots, Q_n),$$

$$R=H_0+\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{\mu=1}^{m}\left(\frac{\partial V}{\partial q_\mu}-u_\mu\right)B_{n+1,\mu}, \tag{90}$$

определяют преобразования переменных q_ρ, u_ρ $(\rho=1, 2, \dots, n)$ в переменные Q_ν, P_ν $(\nu=m+1, \dots, n)$, при которых система гамильтоновых уравнений с множителями связей (75) переходит в каноническую систему уравнений (без множителей связей) (88), и наоборот.

3. Другое доказательство теоремы Гамильтона—Якоби для уравнений динамики с множителями связей.

Произволом выбора функции V и коэффициентов $A_{\nu\mu}$ уравнений (79) можно воспользоваться, например, чтобы дать другое доказательство обобщенной теоремы Гамильтона—Якоби, установленной выше (см. стр. 146—149 прилож.). Заметим прежде некоторые соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

Обозначая через L результат исключения зависимых скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$ из функции L_0 через посредство уравнений (72), будем иметь:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}=\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\nu}+\sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\mu}, \quad (\nu=m+1, \dots, n),$$

или

$$p_\nu=u_\nu+\sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}u_\mu, \qquad (\nu=m+1, \dots, n), \tag{91}$$

где через $p_\nu=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}$ обозначены независимые между собою импульсы.

Введем, кроме того, гамильтонову функцию

$$H(t;\ q_1, \dots, q_n;\ p_{m+1}, \dots, p_n) = \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot{q}_\nu -$$

$$- L(t;\ q_1,\ q_2, \dots, q_n;\ \dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n). \tag{92}$$

Тогда имея в виду, что выражение $H_0 - \sum_{\mu=1}^{m} B_{n+1,\mu}\, u_\mu$ есть результат исключения импульсов p_ν $(\nu = m+1, \dots, n)$ из функции H при помощи уравнений (91), можем написать:

$$H_0(t;\ q_\rho;\ u_\rho) - \sum_{\mu=1}^{m} B_{n+1,\mu}\, u_\mu = H(t;\ q_\rho;\ p_\nu). \tag{93}$$

Перейдем теперь к доказательству интересующей нас теоремы для уравнений движения (75).

Выберем произвольную функцию V и коэффициенты $A_{\nu\lambda}$ так, чтобы равенство (85) имело возможно простой вид; положим, например, $R = 0$ и $A_{\nu\mu} = 0$ $(\nu = m+1, \dots, n;\ \mu = 1, 2, \dots, m)$.

Из предположения $A_{\nu\mu} = 0$ следует, как мы видели, что положение механической системы в новых переменных определяется независимыми координатами $Q_{m+1}, Q_{m+2}, \dots, Q_n$.

Но если мы предположили $R = 0$ и $A_{\nu\mu} = 0$, то в силу формул (90) и (93) величина V, рассматриваемая как функция от $t, q_1, q_2, \dots, q_n, Q_{m+1}, \dots, Q_n$, удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{n+1,\mu} \frac{\partial V}{\partial q_\mu} + H(t;\ q_1, q_2, \dots, q_n;\ p_{m+1}, \dots, p_n) = 0,$$

$$p_\nu = u_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}\, u_\mu, \quad (\nu = m+1, \dots, n), \tag{94}$$

т. е. когда V, рассматриваемая как функция переменных $q_1, q_2, \dots, q_n, t$, которые связаны между собою первой группой уравнений (79), удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{n+1,\mu} \frac{\partial V}{\partial q_\mu} + H\left[t;\ q_1, q_2, \dots, q_n;\ E^q_{m+1}(V), \dots, E^q_n(V)\right] = 0. \tag{95}$$

Следовательно, функция V является одним из полных интегралов уравнения (95).

Допустим, что нам известен полный интеграл этого уравнения в частных производных с избыточными переменными, т. е. известно решение, содержащее $n-m$ произвольных постоянных наряду с аддитивной постоянной (см. § 12, гл. II). Пусть эти постоянные будут $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n, a_{n+1}$, так что полный интеграл имеет вид:

$$V(t;\ q_1, q_2, \dots, q_n;\ a_{m+1}, \dots, a_n) + a_{n+1}.$$

Преобразуем переменные $q_1, q_2, \dots, q_n, u_1, u_2, \dots, u_n$ первоначальной системы уравнений (75) в новые переменные $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$

$\ldots, a_n, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n$ при помощи преобразования определяемого формулами (89) с производящей функцией $V(t;\ q_\rho;\ a_\nu)$. Эти формулы в принятых обозначениях новых переменных, принимают вид:

$$E^q_\nu(V) \equiv \frac{\partial V}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}\frac{\partial V}{\partial q_\mu} = u_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} B_{\nu\mu}u_\mu,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_\nu} = -b_\nu, \ (\nu = m+1, \ldots, n), \tag{96}$$

где $B_{\nu\mu}$— коэффициенты уравнений (79) (или (72)).

Так как функция V удовлетворяет уравнению (95), то функция R преобразованной системы будет равна нулю и, следовательно, новыми каноническими уравнениями движения системы будут:

$$\dot{a}_\nu = 0, \qquad \dot{b}_\nu = 0, \ (\nu = m+1, \ldots, n), \tag{97}$$

так что $a_{m+1}, \ldots, a_n, b_{m+1}, \ldots, b_n$ в течении всего движения системы сохраняют постоянные значения. Отсюда вытекает ранее установленная (стр. 146—149, прилож.) обобщенная теорема Гамильтона—Якоби: *Если известен полный интеграл уравнения (95), т. е. известна функция*

$$V(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n) + a_{n+1},$$

содержащая $n - m + 1$ произвольных постоянных a_ν, удовлетворяющая уравнению (95), то общее решение системы уравнений движения (75) (с множителями связей), получится из уравнений (96).

Уравнения (96) содержат $2(n-m)$ произвольных постоянных a_ν, b_ν, что соответствует порядку системы уравнений (75). Присоединив к уравнениям (96) уравнения (71) и (76), мы получим полную систему $2n$ уравнений для определения всех q_ρ, u_ρ $(\rho=1, 2, \ldots, n)$ в функции времени t и $2(n-m)$ произвольных постоянных a_ρ, b_ρ.

В частности, если уравнения связей (71) не зависят явно от времени и, следовательно, величины $B_{n+1,\mu}=0$, то обобщенное уравнение Гамильтона—Якоби (95), переходит в следующее:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left[t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ E^q_{m+1}(V), \ldots, E^q_n(V)\right] = 0. \tag{98}$$

Ясно, что если $V(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n;\ a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n) + a_{n+1}$ есть полный интеграл этого уравнения, то уравнения (96) будут интегралами уравнений движения (75).

4. Пример. Для иллюстрации применения метода полного интеграла к связанным задачам динамики, рассмотрим простую задачу, в решении которой метод уравнений Лагранжа второго рода и основанные на них теории аналитической динамики, оказываются практически непригодными (или по меньшей мере практически нецелесообразными).

В качестве такого примера рассмотрим *движение тяжелой точки удерживаемой на поверхности гладкого цилиндра с горизонтальной осью.* Примем направленную вверх вертикаль за ось OZ, а ось OY направим параллельно образующим цилиндра, нормальное сечение которого задано уравнением

$$f(x, z) = \sin\frac{x+z}{a} + \frac{z-x}{a} - \ln\frac{z}{a} = 0, \quad (z > 0;\ a > 0); \tag{99}$$

через x, y, z будем обозначать декартовы координаты движущейся точки M. Требуется исследовать движение тяжелой точки M с массой $m = 1$, удерживаемой цилиндром.

Точка M имеет две степени свободы; возьмем за обобщенные координаты y и z; тогда x будет лишней (зависимой) координатой.

Кинетическая энергия T_0 и потенциальная энергия V_0 точки M определятся формулами:

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right), \quad V_0 = gz, \quad L_0 = T_0 - V_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - gz. \tag{100}$$

Для того, чтобы написать уравнения Лагранжа второго рода, необходимо сначала найти выражение кинетического потенциала L в функции y, z, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Дифференцируя уравнение (99) по времени и решая полученное равенство относительно зависимой скорости $\dot{x}$, получим:

$$\dot{x} = \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2z}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)\dot{z}, \quad \alpha = \frac{x+z}{2a}. \tag{101}$$

Исключая при помощи этого равенства из L_0 скорость $\dot{x}$, будем иметь:

$$L = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2z}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)^2\right]\dot{z}^2 - gz. \tag{102}$$

Чтобы можно было составить уравнения Лагранжа второго рода (или союзные им гамильтоновы уравнения), необходимо из L исключить также и лишнюю координату x при помощи уравнения (99). Мы видим, что в данной элементарной задаче метод лагранжевых уравнений второго рода встречает большие трудности и по существу оказывается непригодным.

Для решения этой задачи воспользуемся методом уравнений в избыточных координатах, например, лагранжевыми уравнениями первого рода или союзными им гамильтоновыми уравнениями с множителями связей (75). Покажем, что вводя лишние неизвестные, мы упрощаем решение рассматриваемой задачи.

Примем x за лишнюю, а y и z за независимые координаты. Тогда имея функцию L_0 и вычисляя H_0, нетрудно составить уравнения движения системы в форме (75). Однако, не будем выписывать этих уравнений. Для решения задачи воспользуемся методом полного интеграла Гамильтона-Якоби в избыточных переменных.

Коэффициенты B_{21}, B_{31} и B_{41}, как видно из уравнения (101), имеют значения:

$$B_{21} = 0, \quad B_{31} = \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2z}\operatorname{cosec}^2\alpha, \quad B_{41} = 0. \tag{103}$$

Импульсы u_1, u_2, u_3 связаны с соответсвующими скоростями равенствами:

$$u_1 = \dot{x}, \quad u_2 = \dot{y}, \quad u_3 = \dot{z} \tag{104}$$

и уравнение (101) принимает вид

$$u_1 = \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{a}{2z} \operatorname{cosec}^2 \alpha\right) u_3. \tag{105}$$

Составим теперь уравнение в частных производных (95). Независимые импульсы p_2 и p_3 связаны с соответствующими скоростями равенствами:

$$p_2 = \dot{y}, \quad p_3 = D\dot{z}, \quad D = 1 + \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{a}{2z} \operatorname{cosec}^2 \alpha\right)^2. \tag{106}$$

С помощью этих равенств функция H (92), определится формулой:

$$H = \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2D} p_3^2 + gz, \tag{107}$$

причем, в соответствии с формулами (91) и (103), импульсы p_2 и p_3 связаны с импульсами u_1, u_2, u_3, следующими соотношениями:

$$p_2 = u_2, \quad p_3 = u_3 + \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{a}{2z} \operatorname{cosec}^2 \alpha\right) u_1. \tag{108}$$

Искомое уравнение в частных производных (95), определяющее характеристическую функцию V, напишется так:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2D}\left[\frac{\partial V}{\partial z} + \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{a}{2z} \operatorname{cosec}^2 \alpha\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right]^2 + gz = 0. \tag{109}$$

Чтобы найти полный интеграл этого уравнения (в избыточных переменных), заметим, что переменные t и y в него не входят; поэтому полагая

$$V = -ht + a_2 y + W(x, z),$$

где h и a_2 произвольные постоянные, получаем для определения функции W, уравнение:

$$\frac{1}{2D} [E_3(W)]^2 = h - \frac{1}{2} a_2^2 - gz, \tag{110}$$

где

$$E_3(W) = \frac{\partial W}{\partial z} + \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{a}{2z} \operatorname{cosec}^2 \alpha\right)\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \alpha = \frac{x + z}{2a}. \tag{111}$$

Полный интеграл этого уравнения определяется равенством

$$W = \int \sqrt{(2h - a_2^2 - 2gz) D}\, dz + c. \tag{112}$$

В справедливости можно убедиться непосредственной проверкой. Действительно, вследствии интегрируемости уравнения связи (101), имеем:

$$E_3(W) = \frac{dW}{dz}.$$

Составляя от обеих частей равенства (112) оператор E_3, получим:

$$E_3(W) = \frac{dW}{dz} = \sqrt{(2h - a_2^2 - 2gz)\,D}. \tag{113}$$

Заменяя теперь в уравнении (110) величину $E_3(W)$ ее значением (113), убеждаемся, что это уравнение тождественно удовлетворяется.

Следовательно,

$$V = -ht + a_2 y + \int \sqrt{(2h - a_2^2 - 2gz)\,D}\,dt + c. \tag{114}$$

Интегралы гамильтоновых уравнений движения с множителями связей (которые за ненадобностью здесь не выписаны), согласно формулам (96), будут:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -t + \int \frac{\sqrt{D}\,dz}{\sqrt{2h - a_2^2 - 2gz}} = \tau, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = y - a_2 \int \frac{\sqrt{D}\,dz}{\sqrt{2h - a_2^2 - 2gz}} = b_2, \tag{115}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = a_2 = u_2, \quad E_3(W) = \sqrt{(2h - a_2^2 - 2gz)\,D} = u_3 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2z}\operatorname{cosec}^2\alpha\right) u_1, \tag{116}$$

где τ и b_2 — произвольные постоянные. Присоединив к уравнениям (115) и (116) уравнения (99) и (105), мы получим полную систему шести уравнений для определения неизвестных x, y, z, u_1, u_2, u_3 в функции времени t и определения произвольных постоянных h, a_2, τ, b_2, воспользовавшись, конечно, начальными данными.

Замечание 1. Последний интеграл системы (116) есть не что иное как интеграл энергии ($H_0 = h = \text{const}$); этот интеграл нетрудно было бы получить непосредственно из дифференциальных уравнений движения точки M.

Замечание 2. Полученному решению можно придать другой более простой вид. Для этого введем в рассмотрение длину дуги σ нормального сечения цилиндра (99). Тогда можно написать

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{D}\,dz$$

и решение (115) представится в виде:

$$t + \tau = \int \frac{d\sigma}{\sqrt{2h - a_2^2 - 2gz}}, \quad y = a_2(t + \tau) + b_2. \tag{117}$$

Ясно, что к уравнениям (117) нужно присоединить уравнение связи (99).

V. ЗАМЕЧАНИЯ О МЕТОДЕ ИЗБЫТОЧНЫХ (ЗАВИСИМЫХ) КООРДИНАТ В МЕХАНИКЕ.

Один из основных методов решения всякой проблемы математики или механики состоит в том, что число неизвестных, определяющих решение этой проблемы, приводится к наименьшему и дифференциальные уравнения составляются для этой наименьшей системы независимых неизвестных. Классическим примером этого метода являются уравнения Лагранжа второго рода для динамики. Однако, этот метод не является единственно возможным, а главное он не является практически единственно целесообразным для решения всякой проблемы динамики, как это может показаться на первый взгляд.

Дело в том, что существует очень много динамических задач, при решении которых возникает необходимость и оказывается целесообразным сохранение большего числа переменных параметров чем это необходимо для определения конфигурации системы, т. е. можно показать, что вводя „лишние" неизвестные, мы упрощаем решение задачи.

На возможность такого рода связанных задач механики, (т. е. задач, в которых неизвестные связаны условными уравнениями), указывал еще Лагранж в своей „Аналитической механике" (см. том I, стр. 232, изд. 1936 г.), предлагая для решения проблем механики, наряду с методом обобщенных координат, метод неопределенных множителей. Именно, относительно созданного им метода обобщенных координат, он пишет (стр. 232): „Но хотя разрешение задачи можно всегда довести до указанной стадии, так как все дело сводится к тому, чтобы пользуясь условными уравнениями, исключить столько переменных, сколько позволяют эти уравнения, ..., тем не менее могут встретиться такие случаи, когда этот путь может оказаться слишком затруднительным и когда во избежание излишнего осложнения расчета может оказаться целесообразным сохранение большего числа переменных. В этих случаях условные уравнения, которые остались еще неудовлетворенными, должны быть использованы для исключения в общей формуле некоторых из вариаций...; однако вместо действительного исключения можно применить и метод множителей",....

Но уравнения динамики с множителями связей, хотя и решают задачу до конца, неудобны тем, что кроме лишних координат, содержат столько же лишних неизвестных функций—неопределенных множителей, которые нужны только для нахождения реакций связей; если же речь идет только о нахождении собственно движения системы, как это и бывает обычно в аналитической механике, то множители связей являются паразитическими. С другой стороны, как мы видели, присутствие множителей связей усложняет формулировку теорем об интегрировании этих уравнений (теоремы Гамильтона-Якоби, теории канонических преобразований и т. п.) даже для голономных механических систем.

Поскольку в механике связанные задачи имеются и поскольку их решение методом уравнений Лагранжа второго рода может оказаться весьма затруднительным и практически нецелесообразным (или невозможным), то возникла необходимость изыскания, других методов для составления уравнений движения таких голономных механических систем.

При этом естественно попытаться найти такие уравнения движения для этих систем, на базе, которых можно было бы построить ряд стройных и законченных теорий аналитической динамики, как и для уравнений Лагранжа второго рода.

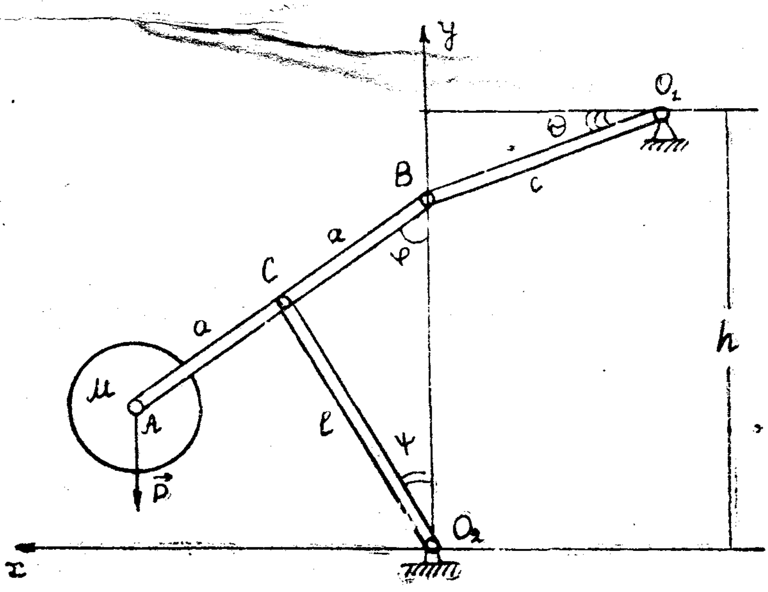
Задаче о разыскании такого типа уравнений движения и их дальнейшему развитию посвящена вторая глава нашей работы: „Динамика голономных механических систем в избыточных (зависимых) координатах".

Характерная особенность полученных там уравнений движения состоит в том, что хотя они составлены в зависимых координатах, но не содержат лагранжевых множителей связей, т. е. содержат меньше неизвестных чем уравнения Лагранжа первого рода, которыми до сих пор пользовались при решении подобных задач. Более того, оказалось возможным получить в избыточных координатах теорию канонических уравнений, теорию Гамильтона-Якоби, теорию Пуассона, теорию интегральных инвариантов, теорию последнего множителя и др., и таким образом обобщить всю классическую аналитическую динамику голономных систем путем изложения ее в избыточных координатах, придав изучаемому материалу законченный вид.

Далее, в виде дополнения ко второй главе работы, приведем несколько примеров связанных динамических задач, в решении которых метод уравнений Лагранжа второго рода действительно оказывается бессильным и, следовательно, возникает необходимость пользоваться методом избыточных координат, т. е. пользоваться либо лагранжевыми уравнениями первого рода, либо уравнениями движения без множителей связей, теория которых разработана в настоящей работе.

I. В качестве первого примера рассмотрим *колебания сложного маятника* (см. § 8, стр. 25—28), дающего возможность получить колебания сколь угодно малой частоты (выше были составлены только уравнения движения, но не дано их решения). Этот маятник состоит из массивного тела M веса P, имеющего форму цилиндра, прикрепленного к концу стержня AB, соединенного шарнирно в точках B и C с коромыслами BO_1 и CO_2; оси O_1 и O_2 неподвижны.

Обозначим массу цилиндра через m, его радиус инерции относительно оси A через ρ; пусть $AC = CB = a$, $BO_1 = c$, $CO_2 = l$. В равновесном положении маятника стержень AB и коромысло CO_2 вертикальны, а коромысло BO_1 горизонтально, поэтому $a + l = h$. Требуется исследовать движение маятника, пренебрегая массами стержней AB, BO_1 и CO_2.



черт. 4.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы; за обобщенную координату возьмем угол $\varphi = q_3$, образованный стержнем AB

с вертикалью. Попробуем составить сначала уравнение движения в форме Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}-\frac{\partial L}{\partial q_3}=0, \quad L=T-V. \tag{118}$$

Для этого нужно вычислить живую силу T и потенциальную энергию V системы, выразив их через переменные q_3 и $\dot{q}_3$. С этой целью введем вспомогательные углы $\theta=q_1$ и $\psi=q_2$, образованные коромыслами BO_1 и CO_2 соответственно с горизонталью и вертикалью. Эти избыточные координаты q_1 и q_2 связаны с основной координатой q_3 уравнениями:

$$\begin{aligned} f_1 &= c\cos q_1+a\sin q_3-l\sin q_2-c=0,\\ f_2 &= c\sin q_1+a\cos q_3+l\cos q_2-h=0. \end{aligned} \tag{119}$$

Выберем координатные оси так, как указано на чертеже. Обозначая через x и y декартовы координаты центра тяжести A цилиндра, для величин T и V будем иметь:

$$T=\frac{1}{2}m\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\rho^2\dot{q}_3^2), \quad V=mgy. \tag{120}$$

Далее находим:

$$x=l\sin q_2+a\sin q_3, \quad y=l\cos q_2-a\cos q_3;$$

откуда

$$\dot{x}=l\dot{q}_2\cos q_2+a\dot{q}_3\cos q_3, \quad \dot{y}=-l\dot{q}_2\sin q_2+a\dot{q}_3\sin q_3.$$

Подставляя найденные значения для $\dot{x}$, $\dot{y}$, y, в (120), получим:

$$L=\frac{1}{2}m\,[l^2\dot{q}_2^2+2al\dot{q}_2\dot{q}_3\cos(q_2+q_3)+(a^2+\rho^2)\,\dot{q}_3^2]-$$
$$-P\,(l\cos q_2-a\cos q_3). \tag{121}$$

Мы должны L представить как функцию только q_3 и $\dot{q}_3$. Для этого исключим из уравнений связей (119) координату q_1; имеем, после элементарных вычислений:

$$2a\,(h\cos q_3+c\sin q_3)+2l\,(h\cos q_2-c\sin q_2)-2al\cos\,(q_2+q_3)=$$
$$=a^2+l^2+h^2. \tag{122}$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получим:

$$\dot{q}_2=\frac{a}{l}\,\frac{c\cos q_3-h\sin q_3+l\sin\,(q_2+q_3)}{h\sin q_2+c\cos q_2-a\sin\,(q_2+q_3)}\,\dot{q}_3. \tag{123}$$

Подставляя найденное значение для $\dot{q}_2$ в формулу (121), мы получим следующее значение для функции L:

$$L=\frac{m}{2}\left\{a^2\frac{[c\cos q_3-h\sin q_3+l\sin\,(q_2+q_3)]^2}{[h\sin q_2+c\cos q_2-a\sin\,(q_2+q_3)]^2}+\right.$$
$$+2a^2\cos\,(q_2+q_3)\,\frac{a\cos q_3-h\sin q_3+l\sin\,(q_2+q_3)}{h\sin q_2+c\cos q_2-a\sin\,(q_2+q_3)}+$$
$$\left.+(a^2+\rho^2)\right\}\dot{q}_3^2-P\,(l\cos q_2-a\cos q_3). \tag{124}$$

Остается еще из функции L, определяемой формулой (124), исключить избыточную координату q_2 при помощи уравнения связи (122).

Только тогда мы получим требуемое выражение для кинетического потенциала L: после этого возможно составить дифференциальное уравнение движения маятника в форме (118). Мы видим, что в данной элементарной задаче метод уравнений Лагранжа второго рода приводит к весьма сложным вычислениям и по существу оказывается практически малопригодным. (Выражение для функции L получается на 1 2 страницы, а уравнение движения более чем на 2 стр. — становится необозримым). Об интегрировании уравнения движения маятника при пользовании этим методом также говорить не приходится.

Таким образом, в применении к связанным задачам механики метод уравнений Лагранжа второго рода и, следовательно, основанные на нем все основные достижения (теории) классической аналитической динамики, оказываются практически малопригодными или по меньшей мере нецелесообразными.

Решим рассматриваемую задачу методом уравнений в избыточных координатах (см. §§ 6—14, гл. II). Уравнений движения в форме (2.20) будет одно:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_3} - E_3(L) = 0, \quad L = T - V, \tag{125}$$

где

$$E_3(L) = \frac{\partial L}{\partial q_3} + B_{31}\frac{\partial L}{\partial q_1} + B_{32}\frac{\partial L}{\partial q_2}, \tag{126}$$

причем избыточные координаты q_1 и q_2 связаны с основной координатой q_3 уравнениями (119). Кинетический потенциал L, определяемый формулой (121), мы должны выразить теперь только через те скорости, которые соответствуют независимым координатам, т. е. через $\dot q_3$ (сами же координаты могут содержаться в L). Для этого продифференцируем по времени уравнения (119), а затем решим полученные уравнения относительно $\dot q_1$ и $\dot q_2$, будем иметь:

$$\dot q_1 = \frac{a}{c}\,\frac{\sin(q_2 + q_3)}{\cos(q_1 - q_2)}\,\dot q_3, \quad \dot q_2 = \frac{a}{l}\,\frac{\cos(q_1 + q_3)}{\cos(q_1 - q_2)}\,\dot q_3, \tag{127}$$

и, следовательно,

$$B_{31} = \frac{a\sin(q_2 + q_3)}{c\cos(q_1 - q_2)}, \quad B_{32} = \frac{a\cos(q_1 + q_3)}{l\cos(q_1 - q_2)}. \tag{128}$$

Для кинетического потенциала L, получим такое выражение:

$$L = \frac{m}{2\cos^2(q_1 - q_2)}\,[a^2\cos^2(q_1 + q_3) + 2a^2\cos(q_1 + q_3)\cos(q_2 + q_3)\cos(q_1 - q_2) + (a^2 + \rho^2)\cos^2(q_1 - q_2)]\,\dot q_3^2 - P(l\cos q_2 - a\cos q_3). \tag{129}$$

Имея L в форме (129), теперь нетрудно составить уравнение движения (125). В развернутом виде это уравнение (за ненадобностью) мы здесь не выписываем (оно приведено на стр. 27).

Для решения задачи воспользуемся методом полного интеграла Гамильтона-Якоби в избыточных переменных (см. § 13).

Импульс p_3 для взятых координат определится формулой:

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot q_3} = mD\dot q_3, \tag{130}$$

$mD\dot q_3$

где через D обозначено выражение:

$$D=\frac{a^2\cos^2(q_1+q_3)+2a^2\cos(q_1+q_3)\cos(q_2+q_3)\cos(q_1-q_2)}{\cos^2(q_1-q_2)}+(a^2+\rho^2). \tag{131}$$

С помощью этих равенств функция Гамильтона H (см. стр. 31, формула (2.56)) представится так:

$$H=\frac{1}{2mD}p_3^2+P(l\cos q_2-a\cos q_3). \tag{132}$$

Так как H не зависит явно от времени, то для решения задачи получаем уравнение в частных производных, определяющее характеристическую функцию W:

$$\frac{1}{2mD}[E_3(W)]^2+P(l\cos q_2-a\cos q_3)=\lambda, \tag{133}$$

где λ — произвольная постоянная, а $E_3(W)$ означает такое выражение:

$$E_3(W)=\frac{\partial W}{\partial q_3}+\frac{a\sin(q_2+q_3)}{c\cos(q_1-q_2)}\frac{\partial W}{\partial q_1}+\frac{a\cos(q_1+q_3)}{l\cos(q_1-q_2)}\frac{\partial W}{\partial q_2}. \tag{134}$$

Нетрудно найти полный интеграл уравнения в избыточных переменных (133). Искомый интеграл имеет вид:

$$W=\int\sqrt{2m[\lambda-P(l\cos q_2-a\cos q_3)]D}\,dq_3+c. \tag{135}$$

В справедливости можно убедиться непосредственной проверкой. Действительно, вследствии интегрируемости связей (127), имеем:

$$\frac{\partial\dot q_1}{\partial\dot q_3}=\frac{\partial q_1}{\partial q_3}=B_{31}=\frac{a\sin(q_2+q_3)}{c\cos(q_1-q_2)},\quad \frac{\partial\dot q_2}{\partial\dot q_3}=\frac{\partial q_2}{\partial q_3}=B_{32}=\frac{a\cos(q_1+q_3)}{l\cos(q_1-q_2)};$$

поэтому формулу (134) можно переписать так:

$$E_3(W)=\frac{\partial W}{\partial q_3}+\frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial q_3}+\frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial q_3}=\frac{dW}{dq_3}.$$

Составляя от обеих частей равенства (135) оператор E_3, получим:

$$E_3(W)=\frac{dW}{dq_3}=\sqrt{2m[\lambda-P(l\cos q_2-a\cos q_3)]D}. \tag{136}$$

Заменяя в уравнении (133) $E_3(W)$ его выражением (136) убеждаемся, что это уравнение тождественно удовлетворяется; что и требовалось доказать.

Согласно общей теории (см. гл. II), интегралы канонических уравнений движения маятника в избыточных координатах (эти уравнения здесь нами не выписаны, так как они нужны только для проверки решения) будут:

$$\frac{\partial W}{\partial\lambda}=\int\frac{m\sqrt{D}\,dq_3}{\sqrt{2m[\lambda-P(l\cos q_2-a\cos q_3)]}}=t-t_0, \tag{137}$$

$$E_3(W)=\sqrt{2m[\lambda-P(l\cos q_2-a\cos q_3)]D}=p_3, \tag{138}$$

где t_0 — произвольная постоянная. Интеграл (137), должен рассматриваться совместно с уравнениями связей (119). Таково общее (точное) решение задачи о колебании сложного маятника.

Замечание. Интеграл (138) представляет собою не что иное как интеграл энергии; этот интеграл легко мог бы быть получен непосредственно из уравнений движения маятника в избыточных координатах ($H=\lambda$).

Все формулы упрощаются в одном частном случае, а именно в том, когда рассматриваются малые колебания сложного маятника. Примем угол $\varphi=q_3$ за величину первого порядка малости. Чтобы выяснить порядок углов $\psi=q_2$ и $\theta=q_1$, обратимся к уравнениям (119). Полагая в этих уравнениях:

$$\sin q_3=q_3,\quad \cos q_3=1-\frac{1}{2}q_3^2,\quad \sin q_2=q_2,\quad \cos q_2=1-\frac{1}{2}q_2^2,$$

$$\sin q_1=q_1,\quad \cos q_1=1-\frac{1}{2}q_1^2,$$

и имея в виду, что $h=l+a$, находим:

$$aq_3-lq_2-\frac{1}{2}cq_1^2=0,\quad cq_1-\frac{1}{2}aq_3^2-\frac{1}{2}lq_2^2=0.$$

Второе из этих уравнений показывает, что q_1 — величина второго порядка малости. Отбрасывая на этом основании в первом уравнении член, содержащий q_1^2, получим с точностью до величин второго порядка малости:

$$q_2=\frac{a}{l}q_3, \tag{139}$$

т. е. q_2 — величина первого порядка малости.

Как видно, дифференциал $dq_3=\dot{q}_3dt$ является величиной второго порядка малости. Вычисляя поэтому функцию D с точностью до величины первого порядка малости (включительно), а выражение $P\,(l\cos q_2-$ $-a\cos q_3)$ с точностью до второго порядка малости (включительно), будем иметь:

$$D=4a^2+\rho^2,\quad P\,(l\cos q_2-a\cos q_3)=P\,(l-a)+\frac{Pa}{2l}\,(l-a)\,q_3^2. \tag{140}$$

На основании этих формул интеграл (137) перепишется в виде:

$$\int\frac{m\sqrt{4a^2+\rho^2}\,dq_3}{\sqrt{2m\left[\lambda-P\,(l-a)-P\frac{a}{2l}\,(l-a)\,q_3^2\right]}}=t-t_0,$$

или, вычисляя интеграл,

$$\sqrt{\frac{ml\,(4a^2+\rho^2)}{Pa\,(l-a)}}\;arc\sin\frac{q_3\sqrt{Pa\,(l-a)}}{\sqrt{2l\,[\lambda-P\,(l-a)]}}=t-t_0;$$

откуда

$$q_3=A\sin\left(\sqrt{\frac{ga\,(l-a)}{l\,(4a^2+\rho^2)}}\,t+\beta\right), \tag{141}$$

где A и β — произвольные постоянные:

$$A=\sqrt{\frac{2l\,[\lambda-P\,(l-a)]}{Pa\,(l-a)}},\quad \beta=-t_0\sqrt{\frac{ga\,(l-a)}{l\,(4a^2+\rho^2)}}. \tag{142}$$

Величина ω, определенная формулой

$$\omega^2 = \frac{ga(l-a)}{l(4a^2+\rho^2)} \tag{143}$$

есть частота малых колебаний сложного маятника. Мы видим, что распоряжаясь параметрами l и a, можно сделать эту частоту как угодно малой.

2. Для второго примера рассмотрим *движение тяжелой точки, удерживаемой на поверхности гладкого цилиндра с вертикальной осью.*

Примем направленную вверх вертикаль за ось OZ и пусть нормальное сечение цилиндра задано уравнением вида

$$\sin\frac{x+y}{a} = \frac{x-y}{a} + \ln\frac{y}{a}, \quad (y>0, \quad a>0), \tag{144}$$

где x, y, z — декартовы координаты точки M, a — постоянная (линейная) величина. Требуется исследовать движение весомой точки M с массой, равной единице, удерживаемой цилиндром.

Точка M имеет две степени свободы; примем y и z за обобщенные координаты; тогда x будет зависимой (избыточной) координатой. Живая сила точки M определится равенством

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right). \tag{145}$$

Так как точка M подвергается действию только силы тяжести, то для активной силы существует потенциал, причем потенциальная энергия определится формулой

$$V = gz. \tag{146}$$

Для того, чтобы составить уравнения Лагранжа второго рода, необходимо прежде всего найти выражение живой силы T в функции от y, z, $\dot{y}$, $\dot{z}$. С этой целью продифференцируем уравнение (144) по времени, затем полученное равенство решим относительно скорости $\dot{x}$; имеем:

$$\dot{x} = \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2y}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)\dot{y}, \quad \alpha = \frac{x+y}{2a}. \tag{147}$$

Вводя это значение $\dot{x}$ в формулу (145), получим:

$$T = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2y}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)^2\right]\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2.$$

Для кинетического потенциала L получим выражение:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2y}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)^2\right]\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2 - gz. \tag{148}$$

Чтобы можно было составить уравнения Лагранжа второго рода (или союзные им гамильтоновы уравнения), необходимо из L исключить также и „лишнюю“ координату x при помощи уравнения (144). Эта операция исключения x сопряжена с большими трудностями. Мы видим, что в рассматриваемой задаче метод лагранжевых уравнений второго рода встречает значительные трудности и по существу оказывается непригодным.

Решим эту задачу пользуясь методом уравнений в избыточных координатах (см. главу вторую). Снова примем x за лишнюю, а y и z за независимые координаты. Для решения задачи будем иметь два уравнения вида:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - E_y(L) = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - E_z(L) = 0, \tag{149}$$

где

$$E_y(L) = \frac{\partial L}{\partial y} + B_{21}\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2y}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)\frac{\partial L}{\partial x},$$

$$E_z(L) = \frac{\partial L}{\partial z} + B_{31}\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial z}, \tag{150}$$

так как коэффициенты B_{21} и B_{31}, определяемые уравнением (147) имеют значения:

$$B_{21} = \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2y}\operatorname{cosec}^2\alpha, \quad B_{31} = 0, \quad \alpha = \frac{x-y}{2a}. \tag{151}$$

Имея кинетический потенциал L в форме (148), легко можно составить уравнения движения (149). Не выписывая их в развернутом виде, дадим решение задачи пользуясь теоремой Гамильтона-Якоби в избыточных координатах.

Импульсы p_2 и p_3 для взятых координат определяются равенствами:

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \left[1 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2y}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)^2\right]\dot{y} = D\dot{y}, \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}, \tag{152}$$

где

$$D = 1 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2y}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)^2.$$

Далее, вычисляя функцию Гамильтона H, получим:

$$H = \frac{1}{2D}p_2^2 + \frac{1}{2}p_3^2 + gz. \tag{153}$$

Так как импульсы p_2 и p_3 через частные производные выражаются формулами:

$$p_2 = E_y(S) = \frac{\partial S}{\partial y} + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2y}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)\frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_3 = E_z(S) = \frac{\partial S}{\partial z}, \tag{154}$$

то искомое уравнение в частных производных, определяющее характеристическую функцию S, напишется так:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2D}\left[\frac{\partial S}{\partial y} + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2y}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)\frac{\partial S}{\partial x}\right]^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + gz = 0. \tag{155}$$

Чтобы найти полный интеграл этого уравнения, заметим, что переменная t в него не входит; следовательно, данное уравнение можно разбить на несколько других, а именно:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = -gz + h - \frac{1}{2}a_3^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{D}}\left[\frac{\partial S}{\partial y} + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{a}{2y}\operatorname{cosec}^2\alpha\right)\frac{\partial S}{\partial x}\right] = a_3, \tag{156}$$

где h и a_3 — произвольные постоянные. Из равенств (156) находим полный интеграл

$$S=-ht+\frac{1}{3g}\left[2h-a_3^2-2gz\right]^{\frac{3}{2}}+a_3\int\sqrt{D}\,dy. \tag{157}$$

Интегралами канонических уравнений движения в избыточных координатах (которые здесь не выписаны), согласно общей теории, будут:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial h}&=-t+\frac{1}{g}\left[2h-a_3^2-2gz\right]^{\frac{1}{2}}=b_2,\\ \frac{\partial S}{\partial a_3}&=-\frac{a_3}{g}\left[2h-a_3^2-2gz\right]^{\frac{1}{2}}-\int\sqrt{D}\,dy=b_3,\end{aligned}\right\} \tag{158}$$

$$E_y(S)=\frac{dS}{dy}=a_3\sqrt{D}=p_2,\quad \frac{\partial S}{\partial z}=-\sqrt{2h-a_3^2-2gz}=p_3, \tag{159}$$

где b_2 и b_3 — произвольные постоянные. Эти интегралы должны рассматриваться совместно с уравнением связи (144). Таково решение задачи о движении тяжелой точки, удерживаемой на поверхности гладкого цилиндра (144) с вертикальными образующими.

Замечание. Найденному решению можно дать простое истолкование, если ввести в рассмотрение длину дуги σ нормального сечения цилиндра (144). Действительно, можем написать:

$$d\sigma=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{D}dy$$

и, следовательно,

$$\int\sqrt{D}dy=\sigma.$$

Поэтому решение (158) можно представить в виде:

$$z=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2,\quad \sigma=c_3t+c_4. \tag{160}$$

Здесь

$$c_1=-gb_2,\quad c_2=\frac{1}{2g}(h-a_3^2-g^2b_2^2),\quad c_3=a_3,\quad c_4=b_3+a_3b_2.$$

Как видно, уравнения (160) тождественны с уравнениями движения свободно падающей тяжелой точки отнесенной к прямоугольным осям, лежащим в вертикальной плоскости, в которой находится начальная скорость и одна из осей совпадает с направленной вверх вертикалью. Это значит, что если тяжелая точка вынуждена двигаться по гладкому цилиндру с вертикальными образующими, то ее траектория будет такой кривой, которая после развертывания цилиндра на плоскость обращается в дугу параболы, имеющей осью образующую цилиндра. Ясно, что к уравнениям (160) нужно присоединить уравнение связи (144).

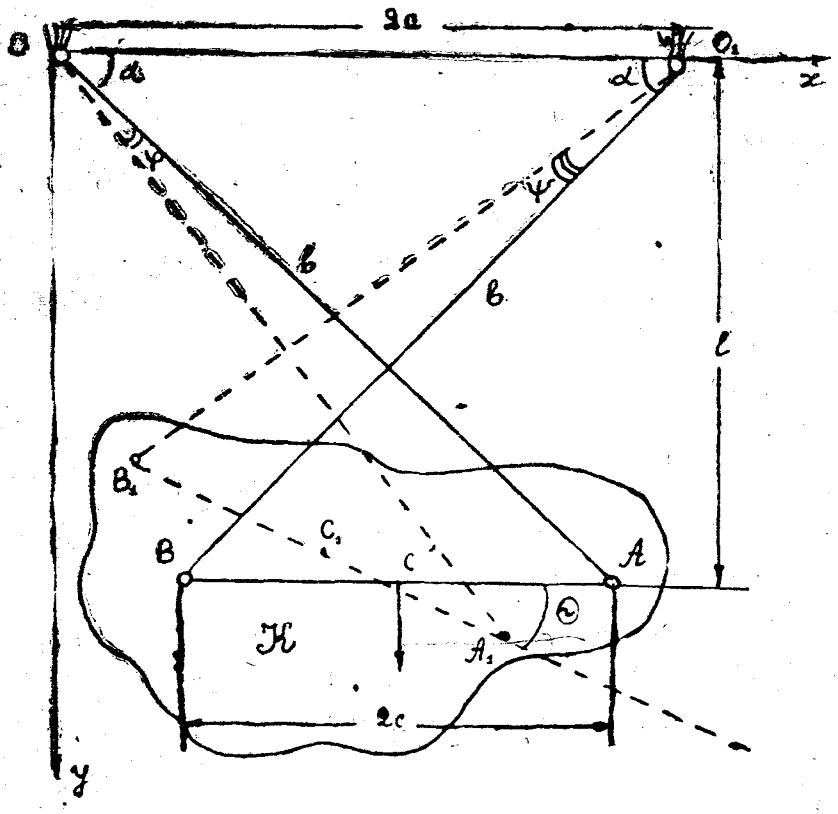
3. Для третьего примера рассмотрим *один механизм Чебышева* (Чебышев П. А. — „Об одном механизме." Собр. сочинен. т. II. См. также работу Лурье А. И. — „К теории приближенных прямолинейно—направляющих механизмов. „Журнал прикл. физ. II, 1926 г.). Твердое тело K подвешено к неподвижным точкам O и O_1 при помощи двух равных и перекрещивающихся стержней OA и O_1B, причем

центр тяжести C тела расположен в середине отрезка AB. В положении равновесия прямая AB горизонтальна, а стержни OA и O_1B составляют угол α с горизонтом.

Обозначим массу тела через m, его радиус инерции относительно оси C (перпендикулярной к плоскости движения) через ρ; пусть:

$$OO_1 = 2a, \quad OA = O_1B = b, \quad AC = CB = c.$$

Предполагая, что система выведена из положения равновесия, исследуем ее движение около этого положения, пренебрегая массами стержней OA и O_1B.



черт 5

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы; за обобщенную координату возьмем угол $\varphi = q_3$ — поворота стержня OA от его первоначального положения. Попробуем сначала составить уравнение движения системы в форме Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0, \quad L = T - V. \tag{161}$$

Для этого нужно вычислить живую силу T и потенциальную энергию V системы, выразив их через переменные q_3 и $\dot{q}_3$. Пользуясь теоремой Кёнига, получим:

$$T = \frac{1}{2}m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\,m\rho^2\,\dot{\theta}^2, \quad V = -mgy, \tag{162}$$

где x, y — координаты центра тяжести тела, а $\theta = q_2$ — вспомогательная (избыточная) координата. Далее, имеем:

$$x = b\cos(\alpha + q_3) - c\cos q_2, \quad y = b\sin(\alpha + q_3) - c\sin q_2, \tag{163}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = b^2\dot{q}_3^2 + c^2\dot{q}_2^2 - 2bc\dot{q}_2\dot{q}_3\cos(\alpha + q_3 - q_2). \tag{164}$$

Кроме того, необходимо установить зависимость между q_2 и q_3. С этой целью введем в рассмотрение еще вспомогательный угол $\psi = q_1$. Тогда, проектируя замкнутый многоугольник $OA_1B_1O_1O$ на оси Ox и Oy, получим:

$$f_1 = b\cos(\alpha + q_3) - 2c\cos q_2 + b\cos(\alpha - q_1) - 2a = 0,$$

$$f_2 = b\sin(\alpha + q_3) - 2c\sin q_2 - b\sin(\alpha - q_1) = 0. \tag{165}$$

Исключая из уравнений (165) $\alpha - q_1$, найдем после некоторых упрощений:

$$ab\cos(\alpha + q_3) + bc\cos(\alpha + q_3 - q_2) - 2ac\cos q_2 = a^2 + c^2. \tag{166}$$

Дифференцируя это равенство по времени и решая полученное уравнение относительно $\dot{q}_2$, будем иметь:

$$\dot{q}_2 = \frac{b}{c}\,\frac{a\sin(\alpha + q_3) + c\sin(\alpha + q_3 - q_2)}{2a\sin q_2 + b\sin(\alpha + q_3 - q_2)}\,\dot{q}_3. \tag{167}$$

На основании формул (162), (163) и (164) кинетический потенциал L определится формулой

$$L = \frac{m}{2}\left[b^2\dot{q}_3^2 - 2bc\dot{q}_3\dot{q}_2\cos(\alpha + q_3 - q_2) + (c^2 + \rho^2)\dot{q}_2^2\right] +$$

$$+ mg\left[b\sin(\alpha + q_3) - c\sin q_2\right]. \tag{168}$$

Чтобы можно было составить уравнение Лагранжа (161), необходимо еще из функции L, определяемой формулой (168), исключить лишние переменные q_2 и $\dot{q}_2$ при помощи уравнений (166) и (167). Если бы даже нам и удалось это сделать с формально-математической стороны, то все равно это было бы бесполезно, так как мы получили бы необозримое уравнение, об интегрировании которого и говорить не приходится. Итак, мы видим, что в рассматриваемой задаче метод лагранжевых уравнений второго рода практически малопригоден.

Однако решение этой задачи легко можно получить либо пользуясь методом полного интеграла Гамильтона-Якоби для уравнений динамики с множителями связей (аналогично тому как это было сделано в прилож. IV, n° 4), либо пользуясь методом полного интеграла Гамильтона-Якоби для канонических уравнений динамики в избыточных переменных без множителей связей (аналогично тому как это было сделано в двух предыдущих задачах).

Решим (как более простым) вторым способом. Покажем, что вводя лишние неизвестные мы упрощаем решение задачи.

Примем q_3 за независимую, а q_1 и q_2 за избыточные (лишние) координаты, связанные с q_3 уравнениями (165). Дифференцируя эти уравнения по времени и затем разрешая полученные равенства относительно зависимых скоростей $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$, будем иметь:

$$\dot{q}_1 = \frac{\sin(\alpha + q_3 - q_2)}{\sin(\alpha + q_2 - q_1)}\,\dot{q}_3, \quad \dot{q}_2 = \frac{a}{2c}\,\frac{\sin(2\alpha + q_3 - q_1)}{\sin(\alpha + q_3 - q_1)}\,\dot{q}_3; \tag{169}$$

откуда

$$B_{31}=\frac{\sin(\alpha+q_3-q_2)}{\sin(\alpha+q_2-q_1)},\quad B_{32}=\frac{b}{2c}\,\frac{\sin(2\alpha+q_3-q_1)}{\sin(\alpha+q_2-q_1)}.\tag{170}$$

Исключая из (168) зависимую скорость $\dot{q}_2$ при помощи (169), получим преобразованную формулу кинетического потенциала:

$$L=\frac{1}{2}\,mb^2D\,\dot{q}_3^2+mg\,[b\sin(\alpha+q_3)-c\sin q_2],\tag{171}$$

где

$$D=1-\frac{\cos(\alpha+q_3-q_2)\sin(2\alpha+q_3-q_1)}{\sin(\alpha+q_2-q_1)}+$$

$$+\frac{c^2+\rho^2}{4c^2}\,\frac{\sin^2(2\alpha+q_3-q_1)}{\sin^2(\alpha+q_2-q_1)}.\tag{172}$$

Имея функцию L в форме (171), легко составить уравнение движения системы в избыточных координатах; это уравнение имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_3}-E_3(L)=0,\quad E_3(L)=\frac{\partial L}{\partial q_3}+B_{31}\,\frac{\partial L}{\partial q_1}+B_{32}\,\frac{\partial L}{\partial q_2}.\tag{173}$$

Для интегрирования этого уравнения (не выписывая его в развернутом виде) воспользуемся обобщенной теоремой Гамильтона-Якоби в избыточных переменных. Вычисляя импульс p_3, получим:

$$p_3=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_3}=mb^2D\,\dot{q}_3,$$

и гамильтонова функция H, определится формулой

$$H=\frac{1}{2mb^2D}\,p_3^2-mg\,[b\sin(\alpha+q_3)-c\sin q_2].\tag{174}$$

Так как H не зависит явно от времени, а импульс p_3 через частные производные выражается формулой:

$$p_3=E_3(W)=\frac{\partial W}{\partial q_3}+\frac{\sin(\alpha+q_3-q_2)}{\sin(\alpha+q_2-q_1)}\,\frac{\partial W}{\partial q_1}+\frac{b}{2c}\,\frac{\sin(2\alpha+q_3-q_1)}{\sin(\alpha+q_2-q_1)}\,\frac{\partial W}{\partial q_2},\tag{175}$$

то искомое уравнение в частных производных, определяющее характеристическую функцию W, запишется в виде:

$$\frac{1}{2mb^2D}\Big[\,E_3(W)\,\Big]^2-mg\,[b\sin(\alpha+q_3)-c\sin q_2]=h,\tag{180}$$

где h—произвольная постоянная. Нетрудно найти полный интеграл уравнения (180); искомый интеграл имеет вид:

$$W=b\int\sqrt{2m\,\{h+mg\,[b\,\sin(\alpha+q_3)-c\,\sin q_2]\}\,D}\,dq_3+C.\tag{181}$$

Интегралы канонических уравнений движения системы в избыточных переменных (которые здесь не выписаны), будут:

$$\frac{\partial W}{\partial h}=b\int\frac{m\sqrt{D}\,dq_3}{\sqrt{2m\,\{h+mg\,[b\,\sin(\alpha+q_3)-c\,\sin q_2]\}}}=t-t_0,\tag{182}$$

$$E_3\,(W)=b\sqrt{2m\{h+mg[b\,\sin(\alpha+q_3)-c\,\sin q_2]\}D}=p_3,\tag{183}$$

где t_0 — произвольная постоянная. Интеграл (182) должен рассматриваться совместно с уравнениями связей (165). Таково общее решение задачи о движении системы около положения равновесия.

Замечание 1. Интеграл (183) представляет собою не что иное как интеграл энергии ($H = h = \text{const}$); этот интеграл легко мог бы быть получен непосредственно из уравнений движения системы в избыточных координатах.

Замечание 2. Так как маятник K имеет одну степень свободы, а кинетический потенциал L (171) не зависит явно от времени, то рассмотренную задачу о колебании маятника, можно было бы решить элементарным путем—при помощи интеграла энергии.

4. Допустим теперь, что рассмотренный выше маятник K установлен на упругом фундаменте (или является частью какого—либо механизма), совершающем вертикальные колебания по закону:

$$\xi = A \sin(\omega t + \beta), \tag{184}$$

где A, ω и β — некоторые постоянные. Требуется исследовать колебания маятника относительно фундамента.

В этом случае на маятник K, кроме его веса mg, будет действовать сила инерции от переносного движения, т. е. сила

$$Q = -m\ddot{\xi} = m\omega^2 A \sin(\omega t + \beta). \tag{185}$$

Поэтому потенциальная энергия маятника, определится формулой:

$$V = -mgy - m\omega^2 Ay \sin(\omega t + \beta) =$$

$$= -m[g + \omega^2 A \sin(\omega t + \beta)][b \sin(\alpha + q_3) - c \sin q_2]. \tag{186}$$

Для кинетического потенциала L, вместо формулы (171), получим в данном случае следующее выражение:

$$L = \frac{1}{2} mb^2 D^2 \dot{q}_3^2 + m[g + \omega^2 A \sin(\omega t + \beta)][b \sin(\alpha + q_3) - c \sin q_2]. \tag{187}$$

Так как L явно зависит от времени, то дифференциальные уравнения движения маятника не допускают интеграла энергии, а поэтому решить рассматриваемую задачу элементарным путем затруднительно. Что касается метода, основанного на уравнениях Лагранжа второго рода, то применение этого метода в данной задаче попрежнему практически нецелесообразно.

Однако, эта задача попрежнему могла бы быть решена при помощи теоремы о полном интеграле в избыточных переменных.

Действительно, в данном случае для решения задачи, на основании метода полного интеграла в избыточных переменных получаем уравнение в частных производных, определяющее главную функцию S, в виде:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2mb^2 D}\Big[E_3(S)\Big]^2 - m[g + \omega^2 A \sin(\omega t + \beta)][b \sin(\alpha + q_3) - c \sin q_2] = 0, \tag{188}$$

где

$$E_3(S) = \frac{\partial S}{\partial q_3} + \frac{\sin(\alpha + q_3 - q_2)}{\sin(\alpha + q_2 - q_1)} \frac{\partial S}{\partial q_1} + \frac{b}{2c} \frac{\sin(2\alpha + q_3 - q_1)}{\sin(\alpha + q_2 - q_1)} \frac{\partial S}{\partial q_2}.$$

Если найти полный интеграл $S(t;\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ a_3) + a_4$ этого уравнения (на чем мы здесь не останавливаемся), то решение задачи представится в виде:

$$\frac{\partial S}{\partial a_3} = b_3 = \mathrm{const}, \quad E_3(S) = p_3. \tag{189}$$

К уравнениям (189), нужно присоединить уравнения связей (166).

5. Как известно, лагранжевы уравнения первого и второго рода до сих пор являются почти единственным и наиболее мощным методом решения проблем динамики. Возможность приведения динамической задачи к числу уравнений, равному числу степеней свободы, выгодно выделяют уравнения Лагранжа второго рода среди остальных методов динамики.

Однако, несмотря на особую теоретическую и практическую ценность уравнений Лагранжа второго рода и всех основанных на них теорий классической аналитической динамики, эти уравнения и теории страдают одним существенным дефектом, а именно: их применение к связанным задачам механики часто оказывается слишком затруднительным и с практической точки зрения нецелесообразным.

Что касается метода уравнений Лагранжа первого рода, то хотя этот метод применим и к связанным задачам динамики, но эти уравнения представляют то неудобство, что они вводят слишком большое число лишних неизвестных функций (неопределенных множителей связей). Вследствие чего усложняется формулировка теорем, относящихся к интегрированию этих уравнений (см. приложения II, III, IV и § 19). На наш взгляд, метод лагранжевых множителей—наименее удачный раздел всей аналитической динамики.

Наличие же обширного класса связанных задач динамики, несколько простых примеров которых были приведены выше, естественно ставит вопрос о необходимости изыскания других методов для составления уравнений движения таких голономных механических систем.

Метод избыточных координат, которым мы пользуемся во второй главе настоящей работы по существу представляет собою соединение обоих классических методов Лагранжа. Ясно, что применяя метод избыточных координат, мы не обязательно должны сохранять все лишние координаты. Если от части лишних координат легко можно освободиться (без лишнего осложнения расчета), то это следует сделать. Поэтому особая ценность, метода уравнений в избыточных координатах (свободных от множителей связей), с практической точки зрения заключается в том, что число лишних координат, с учетом практической целесообразности, приводится к наименьшему и дифференциальные уравнения движения составляются для этой наименьшей системы избыточных координат. Тогда как метод уравнений Лагранжа второго рода обязательно требует исключения всех лишних (зависимых) координат, что в значительной мере в известных случаях, как мы видели, усложняет решение многих задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . стр. 3

Глава I. Об аналитической динамике в неголономных координатах.

§ 1. Указание способа 8
§ 2. Канонические уравнения динамики в неголономных координатах 9
§ 3. Теорема Пуассона в неголономных координатах 11
§ 4. Теорема Гамильтона—Якоби в неголономных координатах . 12
§ 5. Канонические преобразования 13

Глава II. Динамика голономных механических систем в избыточных (зависимых) координатах.

§ 6. Предварительные замечания. Избыточные координаты 17
§ 7. Уравнения движения для голономных механических систем с избыточными координатами 18
§ 8. Примеры. Паллограф как система с избыточными координатами 22
§ 9. Связанные механические системы с циклическими координатами 28
§ 10. Канонические уравнения движения системы в избыточных координатах 31
§ 11. Теорема Пуассона для голономных систем с избыточными координатами 33
§ 12. О полном интеграле уравнения в частных производных первого порядка с избыточными переменными 35
§ 13. Теорема Гамильтона - Якоби для голономных систем с избыточными координатами 37
§ 14. Об интегрируемости уравнения Гамильтона—Якоби в избыточных координатах 40
§ 15. Приложение теории последнего множителя к уравнениям динамики в избыточных координатах 4
§ 16. Канонические преобразования уравнений движения в избыточных координатах 4
§ 17. Действие по Остроградскому—Гамильтону для несвободного движения в избыточных координатах 4
§ 18. Относительный интегральный инвариант 5
§ 19. Теорема Пуассона для уравнений динамики, содержащих неопределенные множители 5

Глава III. Об Интеграции уравнений движения голономных неконсервативных систем.

§ 20. Введение . . . .
§ 21. Распространение метода Рауса на голономные неконсервативные механические системы . . . .
§ 22. Приведение системы дифференциальных уравнений к форме Лагранжа . . . .

§ 23. О методах интегрирования системы диффе[illegible] нений с циклическими переменными, анал[illegible] Гамильтона – Якоби . . . . [illegible]

§ 24. Обобщение теоремы Пуассона на случай голономных [illegible] сервативных систем . . . . [illegible]

§ 25. Теорема о свойствах интегралов лагранжевых уравнений для неконсервативных систем, аналогичная классической теореме Пуассона 74

§ 26. Уравнения движения для голономных неконсервативных систем с линейными интегралами 78

Глава IV. О механических системах с линейными неголономными связями.

§ 27. Неголономные механические системы 83

§ 28. Некоторые типы уравнений движения механических систем с линейными неголономными связями 86

§ 29. Циклические координаты. Распространение метода Рауса на неголономные механические системы. 92

§ 30. Обобщение теоремы Пуассона на случай неголономных механических систем 96

§ 31. Теорема о свойствах интегралов уравнений Чаплыгина . . . 101

§ 32. Обобщение теоремы Пуассона на случай любой системы дифференциальных уравнений 110

Глава V. Наиболее общие уравнения классической динамики.

§ 33. Введение 115

§ 34. Уравнения движения механической системы в декартовых координатах 118

§ 35. Уравнения движения системы в обобщенных координатах с множителями связей 122

§ 36. Наиболее общие уравнения динамики без множителей связей . 124

§ 37. О принципе минимума функции R 129

§ 38. Другая форма наиболее общих уравнений динамики 129

§ 39. Кривизна траектории неголономной системы в функции обобщенных координат 131

§ 40. Примеры неголономных систем с нелинейными связями . . . 136

Приложения

I. Теорема о свойствах интегралов динамических уравнений П. В. Воронца 141

II. О теореме Гамильтона—Якоби для уравнений динамики с множителями связей 146

III. О некоторых свойствах интегралов уравнений динамики с множителями связей для неголономных систем 152

IV. О преобразовании уравнений динамики с множителями связей . 158

V. Замечания о методе избыточных (зависимых) координат в механике 167

Михаил Федорович ШУЛЬГИН

Ответ. редактор доц. П. А. ЦИТОВИЧ
Тех. редактор В. С. КОГАН

РЧ 20873 Сдано в набор 5.VII. 1958. Подписано в печать 20.X.1958. Объем 12 печ. ли

г. Самарканд, типография им. Чкалова. Заказ № 2328. Тираж 500.

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
7	9 сверху	виде была	виде (без раздела „приложения") была
27	3 снизу	$mal\dot{q}_2\dot{q}_3$	$+mal\dot{q}_2\dot{q}_3$
35	8 „	$\frac{\partial q_\sigma}{\partial q_\nu}=\frac{dq_\sigma}{dq_\nu}=B_{\nu\sigma}$	$\frac{\partial q_\sigma}{\partial q_\nu}=B_{\nu\sigma}$
37	13 сверху	$+\frac{q_2^2+q_3^2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}$	——————
41	1 снизу	$B_{\nu\sigma}$	$B_{\nu\mu}$
48	13 сверху	(2.18)	(2.118)
53	15 „	H	H_0
92	13 снизу	$(\nu=1, \ldots, n)$	$(\nu=m+1, \ldots, n)$
108	17 „	Пуссона.	Пуассона
121	2 сверху	$\dot{x}_l$	$\ddot{x}_l$
124	17 „	q_m	q_n
128	9,17 „	X	X_l
129	23 „	R	$\overline{R}$
141	8 снизу	$\sum\limits_{\nu=m+1}^{n}$	$\sum\limits_{\rho=m+1}^{n}$
142	12 „	$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\nu}$	$\frac{\partial K}{\partial \dot{u}_\nu}$
147	10 „	$\frac{\partial H_0}{\partial p_\nu}$	$\frac{\partial H}{\partial p_\nu}$
151	7 „	$-\operatorname{tg}\varphi\cdot u_1$	$-q\operatorname{tg}\varphi\cdot u_1$
154	1 „	$(t;\ q_j;\ u_j)$	$\varphi(t;\ q_j;\ u_j)$
157	1 „	$\psi_1=$ $\psi_2=$	$\varphi_1=$ $\varphi_2=$
161	2 „	и новые	в новые

Михаил Федорович ШУЛЬГИН

Ответ. редактор доц. П. А. ЦИТОВИЧ
Тех. редактор В. С. КОГАН

РЧ 20873 Сдано в набор 5.VII. 1958. Подписано в печать 20.X.1958. Объем 12 печ. ли

г. Самарканд, типография им. Чкалова. Заказ № 2328. Тираж 500.