дроби, число пар необходимо увеличить. Порядок рекуррентного уравнения при этом возрастет.

Далее решаем уравнение, обозначенное как `S`, с использованием начальных значений (из самой же последовательности)

```
> simplify(rsolve({S,t(1)=3,t(2)=9,t(3)=19},t(n)));
```

$$2\,n^2+1$$

Зависимость найдена. В качестве примера мы взяли один из коэффициентов в выражении (3.51).

3.7. Уравнения движения с множителями связей

Задача 46. Невесомые стержни AO и BC шарнирно соединены в точке A. Стержень AO вращается на неподвижном шарнире O, стержень BC прикреплен к вертикальному ползуну B. В точке C сосредоточена масса m. Механизм [1] расположен в вертикальной плоскости (рис. 170). Дано: $AO = a$, $AC = b$, $AB = c$. Найти частоту малых колебаний системы около положения равновесия.

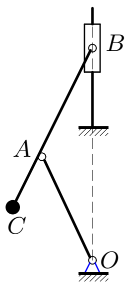

Рис. 170

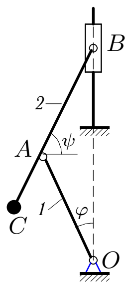

Рис. 171

Решение

Механизм имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ. Стержни AO и BC обозначим номерами 1 и 2. Предложим два способа решения задачи.

Способ 1.

[1] Вариант паллографа *О. Шлика* — прибора для записи вибраций корпуса корабля. В оригинальном паллографе вместо ползуна стоит качающаяся муфта, в которой скользит стержень BC. Прибор состоит из двух независимых частей. Здесь изучается часть, ответственная за горизонтальные колебания. См. *Николаи Е.Л.* Теоретическая механика. Ч.2. Динамика. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.

Кинетическая энергия механизма сосредоточена в точке C

$$T = \frac{mv_C^2}{2}.$$

Для определения скорости составим граф $O \xrightarrow[\varphi+\pi/2]{a} A \xrightarrow[\psi+\pi]{b} C$. Ему соответствуют два уравнения:

$$v_{Cx} = v_{Ox} - a\omega_{1z}\sin(\varphi+\pi/2) - b\omega_{2z}\sin(\psi+\pi),$$
$$v_{Cy} = v_{Oy} + a\omega_{1z}\cos(\varphi+\pi/2) + b\omega_{2z}\cos(\psi+\pi).$$

С учетом $v_{Ox} = v_{Oy} = 0$, $\omega_{1z} = \dot\varphi$, получаем отсюда следующие выражения для проекций скоростей точки C:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= -a\dot\varphi\cos\varphi + b\omega_{2z}\sin\psi, \\ v_{Cy} &= -a\dot\varphi\sin\varphi - b\omega_{2z}\cos\psi. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Угловую скорость ω_{2z}, входящую в эти выражения, выразим через $\dot\varphi$ с помощью графа $O \xrightarrow[\varphi+\pi/2]{a} A \xrightarrow[\psi]{c} B$. Получим

$$v_{Bx} = -a\dot\varphi\cos\varphi - c\omega_{2z}\sin\psi = 0.$$

С учетом геометрического соотношения $\psi = \arccos((a/c)\sin\varphi)$ находим

$$\omega_{2z} = -\frac{\dot\varphi a\cos\varphi}{\sqrt{c^2 - a^2\sin^2\varphi}}. \tag{3.56}$$

Для проверки этого значения положим $a = c$. В этом случае треугольник OAB становится равнобедренным и, очевидно, стержни AO и BC имеют равные по модулю, но противоположно направленные угловые скорости, $\omega_{2z} = -\dot\varphi$. Это следует также из (3.56).

После преобразований получаем кинетическую энергию

$$T = \frac{ma^2\dot\varphi^2}{2c^2}\left((b+c)^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\frac{\left(ab\cos\varphi - c\sqrt{c^2-a^2\sin^2\varphi}\right)^2}{c^2-a^2\sin^2\varphi}\right).$$

Обобщенная сила имеет вид

$$Q = \frac{-mgv_{Cy}}{\dot\varphi} = mga\sin\varphi\left(1 - \frac{ab\cos\varphi}{c\sqrt{c^2-a^2\sin^2\varphi}}\right).$$

Рассмотрим малые отклонения механизма от положения равновесия. Для того, чтобы уравнение Лагранжа было линейным по φ, $\dot\varphi$ и $\ddot\varphi$, необходимо линеризовать обобщенную силу Q, оставив только слагаемые первой степени по указанным переменным, а в выражении для кинетической энергии оставить и квадраты этих величин, так как в уравнение входят производные T по φ и $\dot{\varphi}$. Имеем

$$T = \frac{ma^2\dot{\varphi}^2(b+c)^2}{2c^2}, \quad Q = mga\varphi\frac{c^2-ab}{c^2}.$$

Уравнение Лагранжа примет вид

$$\ddot{\varphi}a(b+c)^2 + \varphi g(ab-c^2) = 0. \tag{3.57}$$

Это уравнение описывает малые колебания системы с частотой

$$k = \frac{\sqrt{g(b-c^2/a)}}{b+c}. \tag{3.58}$$

Очевидно, решение существует при $c < \sqrt{ab}$. Меняя размеры a, b, c можно в широких пределах менять собственную частоту колебаний. При $c^2 = ab$ частота обращается в ноль. Интересно заметить, что если стержни имеют одинаковую длину, т.е. $a = b + c$, то найденное критическое соотношение $c/a = (a-c)/c$ совпадает с соотношением золотого сечения.

Maple–программа этого решения дана на с. 381.

Способ 2. Множители Лагранжа.

В первом способе решения неявно присутствует вторая обобщенная координата — ψ. Она зависит от выбранной обобщенной координаты φ и легко выражается через нее. Более того, можно ввести еще одну координату y (рис. 172) и наложить на три координаты две связи

$$\begin{aligned} f_1 &= a\cos\varphi + c\sin\psi - y = 0,\\ f_2 &= a\sin\varphi - c\cos\psi = 0 \end{aligned} \tag{3.59}$$

С тремя обобщенными координатами механизм имеет три степени свободы: одна степень свободы (поворот вокруг опоры) у стержня AO и две — у стержня BC (поворот и вертикальное перемещение). Теперь надо решить задачу с тремя обобщенными координатами и двумя уравнениями связи, для которых справедливы уравнения [30]

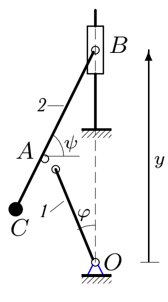

Рис. 172

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{2}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,3. \tag{3.60}$$

В данной задаче получается пять уравнений (3.59-3.60) для трех обобщенных координат $q_1 = \varphi$, $q_2 = \psi$, $q_3 = y$ и двух неопределенных множителей λ_1 и λ_2.

Вычислим кинетическую энергию через выбранные обобщенные скорости. Составим граф $C \xrightarrow[\psi]{b+c} B$. Ему соответствуют два уравнения:

$$v_{Bx} = v_{Cx} - (b+c)\omega_{2z}\sin\psi, \quad v_{By} = v_{Cy} + (b+c)\omega_{2z}\cos\psi.$$

С учетом $v_{Bx} = 0$, $v_{By} = \dot{y}$, $\omega_{2z} = \dot{\psi}$, получаем отсюда следующие выражения для проекций скоростей точки C:

$$v_{Cx} = (b+c)\dot{\psi}\sin\psi, \quad v_{Cy} = \dot{y} - (b+c)\dot{\psi}\cos\psi.$$

Получаем кинетическую энергию

$$T = mv_C^2/2 = m(\dot{\psi}^2(b+c)^2 + \dot{y}^2 - 2(b+c)\dot{\psi}\dot{y}\cos\psi)/2.$$

Мощность сил, действующих на систему, $N = -mgv_{Cy} = -mg(\dot{y} - (b+ + c)\dot{\psi}\cos\psi)$. Обобщенные силы имеют вид

$$Q_1 = \frac{\partial N}{\partial\dot{\varphi}} = 0, \; Q_2 = \frac{\partial N}{\partial\dot{\psi}} = mg(b+c)\cos\psi, \; Q_3 = \frac{\partial N}{\partial\dot{y}} = -mg.$$

Запишем уравнения (3.60)

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 a\sin\varphi - \lambda_2 a\cos\varphi = 0,\\
&m(b+c)\left(\ddot{\psi}(b+c) - \ddot{y}\cos\psi + \dot{y}\dot{\psi}\sin\psi - g\cos\psi\right) -\\
&\qquad\qquad -\lambda_1 c\cos\psi - \lambda_2 c\sin\psi = 0,\\
&m\ddot{y} - m(b+c)\ddot{\psi}\cos\psi + m\dot{\psi}^2(b+c)\sin\psi + mg + \lambda_1 = 0.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Полагая малыми углы φ, $\alpha = \pi/2 - \psi$, их скорости $\dot{\varphi}$, $\dot{\alpha}$, ускорения $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\alpha}$ и скорость $\dot{y}$, линеаризуем систему (3.61) и уравнения связи (3.59)

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 a\varphi - \lambda_2 a = 0,\\
&\ddot{\alpha}m(b+c)^2 + \alpha mg(b+c) + \alpha\lambda_1 c + \lambda_2 c = 0,\\
&mg + \lambda_1 = 0, \; a + c - y = 0, \; a\varphi - c\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Исключаем из системы (3.62) неопределенные множители, α и y, получаем уравнение колебаний (3.57). Оба способа дают один и тот же результат. Во втором способе не потребовалось использовать обратные тригонометрические функции и система уравнений получилась проще. В первом способе уравнение движения настолько громоздкое, что приводить его целиком не имеет смысла — ни проанализировать, ни попытаться его решить нет возможности. Заметим, что во втором способе решения допустим граф $O \xrightarrow[\varphi+\pi/2]{a} A \xrightarrow[\psi+\pi]{b} C$ по «разорванной цепи». Система уравнений получится другая, в ней вместо $\ddot{y}$ будет ускорение $\ddot{\varphi}$. Результат (уравнение малых колебаний) при этом не изменится.

Maple–программа этого решения дана на с. 383.