

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ордена ЛЕНИНА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

---

М. Г. СЛОБОДЯНСКИЙ, А. М. ПИВОВАРОВ

Кафедра теоретической механики

Утверждено  
Учебным управлением МЭИ  
в качестве учебного пособия  
для студентов

# СТАТИКА

(Конспект лекций и методические  
указания к решению задач)



## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Настоящий конспект лекций по статике соответствует утвержденной программе по курсу теоретической механики для студентов энергетического профиля и студентов-вечерников и заочников для самостоятельной проработки.*

*Каждый раздел конспекта иллюстрируется решением достаточно большого количества задач и при этом даются методические указания к их решению. Ряд задач взят из сборника задач по теоретической механике И. В. Мещерского.*

*Авторы благодарят рецензентов проф. В. Ф. Киселева и доцента А. Л. Дворникова за сделанные ими замечания по рукописи данного конспекта лекций.*

---

# СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Глава I. АКСИОМЫ СТАТИКИ

### § 1. Основные понятия и определения

В этом параграфе введем некоторые основные понятия и определения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

1°. *Механическим движением* называется перемещение тела в пространстве и во времени.

Для определения механического движения тела нужно указать тело отсчета (или систему координат), относительно которого определяется движение данного тела. В большинстве технических задач за тело отсчета принимают Землю. В частности, тело может находиться в состоянии покоя относительно выбранного (условно «неподвижного») тела отсчета (например, относительно Земли).

2°. *Статикой* называется раздел теоретической механики, в котором изучается состояние покоя абсолютно твердого тела или системы таких тел, находящихся под действием приложенных сил.

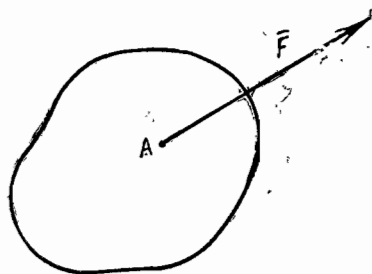


Рис. 1-1.

3°. *Силой* называется действие какого-либо тела на данное, вызывающее изменение механического движения тела. Опыт и наблюдения показывают, что сила определяется (характеризуется) величиной, направлением и точкой приложения. Поэтому силу можно условно изобразить на чертеже в виде вектора  $\vec{F}$ , приложенного в данной точке  $A$  тела (рис. 1-1). Величину вектора  $\vec{F}$  мы будем обозначать той же буквой  $F$ , но без черточки наверху.

4°. Абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается неизменным (рис. 1-2).

Очевидно, что абсолютно твердых тел в природе не существует и все тела изменяют свою форму и размеры под действием приложенных сил, то есть деформируются. Понятие абсолютно твердого тела есть, таким образом, абстрактное

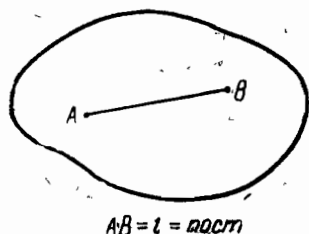


Рис. 1-2

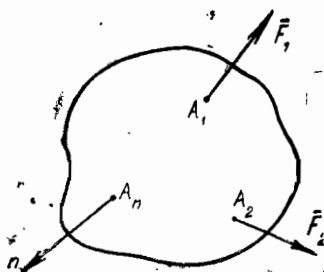


Рис. 1-3

понятие и вводится оно в механику по следующим двум причинам:

1) Во многих случаях деформации тел настолько малы, что ими можно при решении данной задачи пренебречь и рассматривать тела как абсолютно твердые.

2) В дальнейшем будет показано, что условия равновесия, которым должны удовлетворять силы, приложенные к абсолютно твердому телу, для того чтобы последнее находилось в состоянии покоя, являются также необходимыми условиями равновесия любого деформируемого тела и в том числе жидких и газообразных тел. Иначе говоря, выводы статики абсолютно твердого тела можно применить к изучению состояния покоя реальных физических тел (деформируемых, жидких, газообразных и т. д.).

5°. Совокупность сил  $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ , приложенных к телу, называется *системой сил* (рис. 1-3).

6°. Если под действием данной системы сил  $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$  абсолютно твердое тело находится в состоянии покоя, то говорят, что силы находятся в равновесии, а система сил называется *уравновешенной* или *системой эквивалентной нулю*:

$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim 0$ , где  $\sim$  — знак эквивалентности.

7°. Если под действием систем сил  $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ ,  $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n\}$  абсолютно твердое тело находится в состоя-

нии покоя, то говорят, что одна система сил уравнивается другой системой сил, то есть если

$$\{(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n), (\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n)\} \sim 0,$$

то

$$(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \text{ уравнивается } (\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n).$$

Если система сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  уравнивается одной силой  $\bar{P}$ , то последняя называется уравнивающей силой.

8°. Если две системы сил  $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n), (\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_n)$  порознь уравниваются третьей системой сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ , то эти системы сил называются эквивалентными, то есть если

$$\begin{aligned} (\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n) \text{ уравнивается } (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n), \\ (\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_n) \text{ уравнивается } (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n), \end{aligned}$$

то

$$(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n) \sim (\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_n).$$

Если система сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  эквивалентна одной силе  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim \bar{R}$ , то эта сила  $\bar{R}$  называется равнодействующей данной системы сил.

## § 2. Аксиомы статики

В основу статики можно положить следующие аксиомы, установленные опытом и наблюдением.

### 1. Аксиома о покое тела, находящегося под действием двух сил

Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя, под действием двух сил, необходимо и доста-

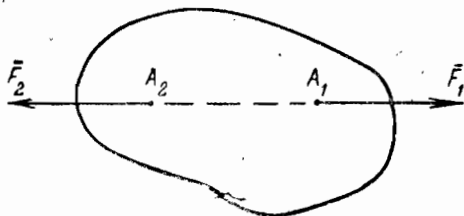


Рис. 1-4

точно, чтобы они были равны по величине, противоположны по направлению и действовали по одной прямой, соединяющей точки их приложения (рис. 1-4).

Из аксиомы I следует, что система двух сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$ , если силы удовлетворяют следующим условиям первой аксиомы:

$$1) \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

2) Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  направлены по одной прямой.

Рассмотрим несколько подробнее содержание первой аксиомы статики. Приложим к концам нерастянутого куска резины длины  $l$  (рис. 1-5) две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , удовлетворяющие

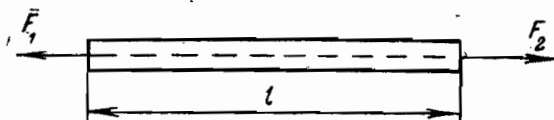


Рис. 1-5

условиям аксиомы I. Очевидно, что резина начнет деформироваться (удлиниться) и состояние покоя будет нарушено. Следовательно, условия аксиомы I не являются достаточными для того, чтобы деформируемое тело находилось в состоянии покоя, под действием двух сил.

Однако после того, как кусок резины получил некоторое удлинение  $\Delta l$ , он будет находиться в состоянии покоя под действием сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 1-6). Опыт показывает, что при этом силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  должны удовлетворять условиям первой аксиомы.

Следовательно, условия аксиомы I являются *необходимыми* (но не достаточными) для того, чтобы любое деформи-

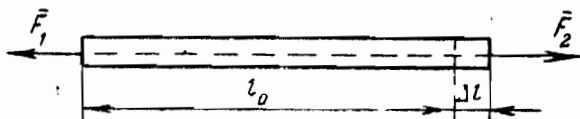


Рис. 1-6

руемое тело находилось в состоянии покоя, под действием двух сил, и лишь для абсолютно твердого тела эти условия являются также и достаточными.

## II. Аксиома о прибавлении или отбрасывании уравновешенной системы сил

Состояние механического движения или покоя абсолютно твердого тела не изменится, если к данной системе сил прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Если, например, на абсолютно твердое тело действует система сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim 0$  (рис. 1-7), то состояние покоя тела не будет нарушено, если приложить к нему уравновешенную систему сил  $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n)$ . Очевидно, что аксиома II применима лишь к абсолютно твердому телу. В самом деле, если к де-

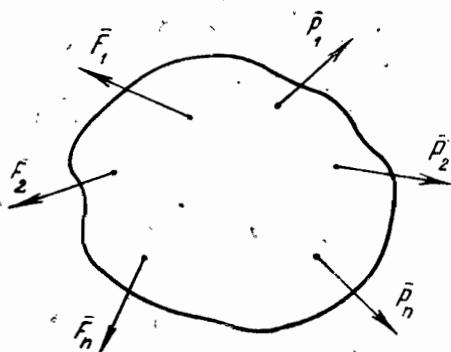


Рис. 1-7

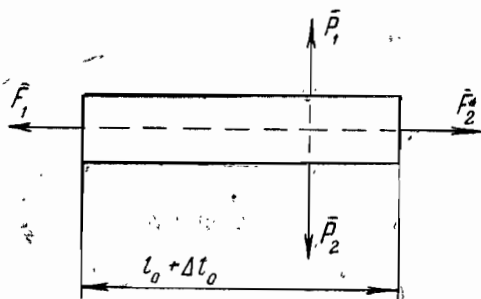


Рис. 1-8

формируемому телу (куску резины), находящемуся в состоянии покоя под действием сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , приложить уравновешенную систему сил  $(\bar{P}_1, \bar{P}_2) \sim 0$  (рис. 1-8), то состояние покоя куска резины будет нарушено.

Из первых двух аксиом статики можно получить важное следствие 1 о переносе силы в любую точку линии ее действия.

**Следствие 1.** Силу, приложенную к точке абсолютно твердого тела, можно переносить в любую точку линии ее действия.

*Доказательство.* Приложим в произвольной точке  $A_1$ , лежащей на линии действия силы  $\vec{F}$ , уравновешенную систему сил  $(\vec{F}', \vec{F}'') \sim 0$ , где  $\vec{F}' = -\vec{F}'' = \vec{F}$  (рис. 1-9). На основании второй аксиомы статики действие системы силы на абсолют-

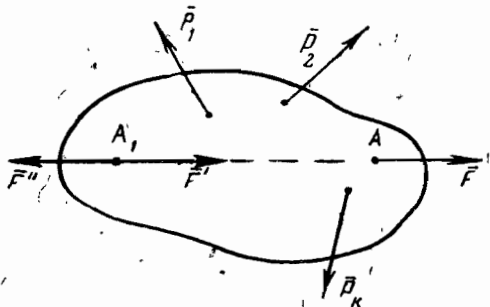


Рис. 1-9

но твердое тело при этом не изменится. По той же аксиоме статики можно отбросить уравновешенную на основании 1 аксиомы систему сил  $(\vec{F}, \vec{F}'') \sim 0$ .

Таким образом, получим  $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'') \sim \vec{F}'$ , то есть силу  $\vec{F}$  можно заменить силой  $\vec{F}'$ , равной  $\vec{F}$  и приложенной в произвольной точке  $A_1$  линии действия силы  $\vec{F}$ . Из этого следствия вытекает, что вектор силы  $\vec{F}$ , приложенной к абсолютно твердому телу, есть скользящий вектор.

Очевидно, что в случае деформируемого тела сила не может быть перенесена в другую точку линии ее действия, ибо при этом действие силы на тело изменится и состояние покоя тела будет нарушено.

### III. Аксиома параллелограмма сил

Две силы, приложенные к точке тела, можно заменить равнодействующей силой, приложенной в той же точке, которая определяется величиной и направлением диагонали параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1-10).



Таким образом, равнодействующая  $\vec{R}$  двух сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , приложенных в точке  $O$ , равна геометрической сумме сил и приложена в той же точке  $O$ . Это можно записать так

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R},$$

где

$$1) \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

2) сила  $\vec{R}$  приложена в точке  $O$ . Из сформулированных аксиом можно вывести следующее, часто применяемое следствие.

С л е д с т в и е 2. Если абсолютно твердое тело находится в состоянии покоя, под действием трех непараллельных сил,

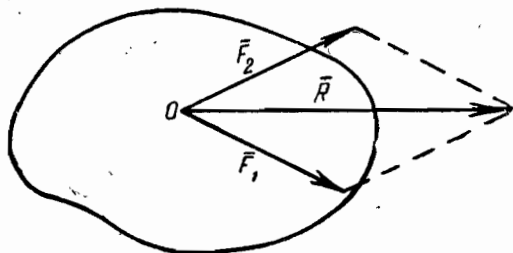


Рис. 1-10

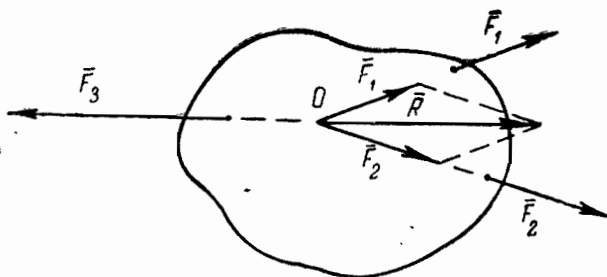


Рис. 1-11

лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

*Доказательство.* На основании первого следствия силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  могут быть перенесены в точку  $O$  (рис. 1-11) пересечения линии действия сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , и далее по аксиоме параллелограмма сил их можно заменить равнодействующей  $\vec{R}_{\text{ком}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  и приложенной в той же точке  $O$ .

Из первой аксиомы статики теперь следует, что для того, чтобы сила  $\vec{R}$  уравнивалась силой  $\vec{F}_3$ , необходимо, чтобы линия ее действия также проходила через точку  $O$ , то есть линии действия сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  пересекаются в одной точке.

Первые 3 аксиомы статики, а также следствия из них относятся к отдельно взятому абсолютно твердому телу. Для изучения состояния покоя системы тел служат следующие 3 аксиомы.

#### IV. Аксиома действия и противодействия

Действие всегда равно и прямо противоположно противодействию, то есть если тело 1 действует на тело 2 с некоторой силой  $\vec{F}_{2,1}$ , то тело 2 действует на тело 1 с такой же по величине и противоположной по направлению силой  $\vec{F}_{1,2}$  (рис. 1-12), то есть 1)  $F_{1,2} = -F_{2,1}$ ; 2) силы  $\vec{F}_{1,2}$  и  $\vec{F}_{2,1}$  действуют по одной прямой.

Заметим, что силы  $\vec{F}_{1,2}$  и  $\vec{F}_{2,1}$  нельзя рассматривать как уравновешенную систему сил, ибо они приложены к различ-

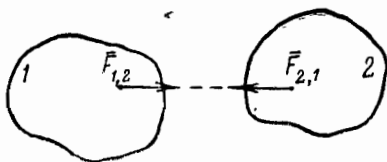


Рис. 1-12

ным телам. Эта аксиома дает нам возможность установить зависимость между силами, действующими на отдельные тела системы тел.

*Связи.* Если на перемещение твердого тела не наложено никаких ограничений, то оно называется свободным.

Если же на перемещение твердого тела со стороны других тел наложены ограничения, то оно называется несвободным, а наложенные ограничения на перемещения твердого тела называются связями.

Например, если шар веса  $P$  лежит на горизонтальном столе, то на перемещение шара наложено ограничение; он не может перемещаться вертикально вниз (рис. 1-13). Связь можно отбросить и заменить ее реакцией  $N$ , приложенной к

шару в точке  $A$ , равной весу шара  $P$  и направленной вертикально вверх (рис. 1-14).

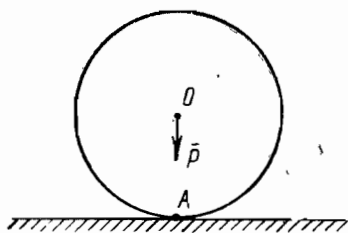


Рис. 1-13

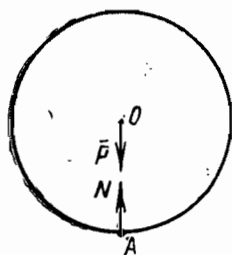


Рис. 1-14

### V. Аксиома связи

Связь можно отбросить и заменить ее силой (эта сила называется реакцией).

Рассмотрим важнейшие виды связей, встречающиеся в технических задачах.

1<sup>0</sup>. *Соприкосновение двух негладких тел в какой-либо точке.* Наиболее общим видом связи, встречающимся в технических задачах, является соприкосновение двух негладких тел в какой-либо точке  $A$  (рис. 1-15). На этом рисунке отмечена геометрическая точка  $A$  соприкосновения поверхностей тел  $1$  и  $2$  и материальные точки  $A_1$  и  $A_2$ , совпадающие с точкой  $A$  и принадлежащие телам  $1$  и  $2$  соответственно. Благодаря указанному соприкосновению двух тел со стороны второго тела наложено ограничение на перемещение первого тела, то есть на тело  $1$  наложена связь. Согласно аксиоме связи, можно отбросить связь и заменить ее реакцией  $\bar{R}_{1,2}$ , приложенной в точке  $A_1$  твердого тела  $1$  (рис. 1-16).

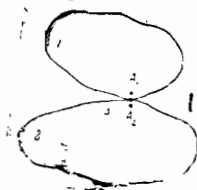


Рис. 1-15

По аксиоме действия и противодействия к точке  $A_2$  второго тела приложена сила  $\bar{R}_{2,1} = -\bar{R}_{1,2}$ . В общем случае соприкосновения негладких (шероховатых) поверхностей тел  $1$  и  $2$  реакция  $\bar{R}_{1,2}$  не направлена по общей нормали  $n$  к поверхностям тел в точке их соприкосновения.

2<sup>0</sup>. *Соприкосновение двух абсолютно гладких тел* (рис. 1-17). В том случае, когда поверхности соприкасающихся тел абсолютно гладкие или хотя бы одна из этих поверхностей

абсолютно гладкая, реакция  $\bar{N}_{1,2}$  будет направлена по общей нормали  $n$  в точке соприкосновения  $A$  двух тел (рис. 1-18).

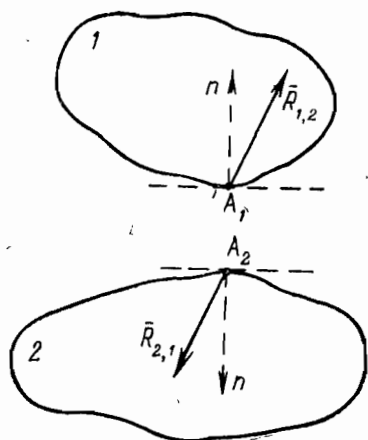


Рис. 1-16

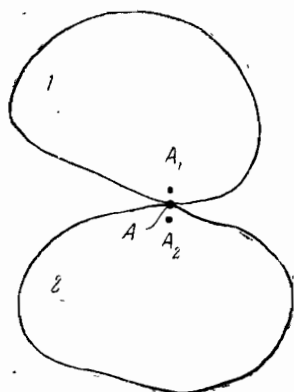


Рис. 1-17

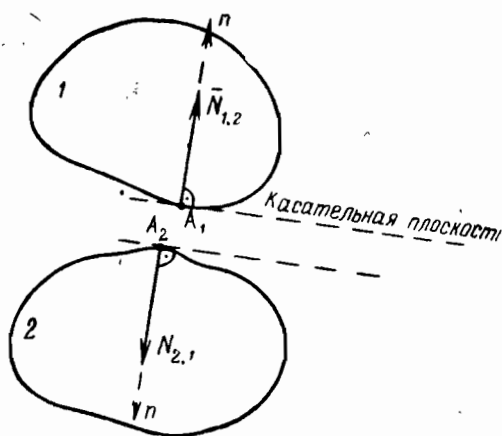


Рис. 1-18

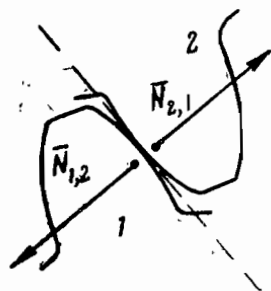


Рис. 1-19

Реакция  $\bar{N}_{1,2}$  называется поэтому нормальной реакцией. По аксиоме действия и противодействия

$$\bar{N}_{1,2} = -\bar{N}_{2,1}.$$

Рассмотрим некоторые примеры связи вида 2<sup>0</sup>.

а) *Соприкосновение зубьев зубчатых колес* (рис. 1-19). Если поверхности зубьев зубчатых колес абсолютно гладкие, то мы имеем пример связи вида 2<sup>0</sup>. Действие зубчатого колеса 2 на зубчатое колесо 1 можно заменить реакцией  $\bar{N}_{1,2}$ , направленной по нормали к поверхности соприкасающихся зубьев.

б) *Шарнирная связь*. Частным случаем связи вида 2<sup>0</sup> является шарнирная связь. Конструкция шарнирной связи показана на рис. 1-20. Поверхность болта (пальца) 2 находится в соприкосновении с поверхностью отверстия тела 1. Если диаметр отверстия  $d_1$  несколько больше диаметра пальца  $d_2$  ( $d_1 > d_2$ ), то соприкосновение поверхностей пальца и отверстия будет иметь место в какой-либо точке А, как показано на рис. 1-20. При этом, если эти поверхности абсолютно гладкие, то реакция  $\bar{N}_{1,2}$  направлена по общей нормали и ее линия действия про-

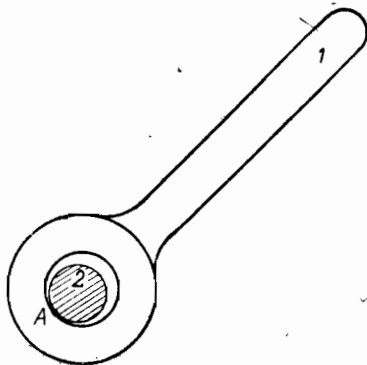


Рис. 1-20

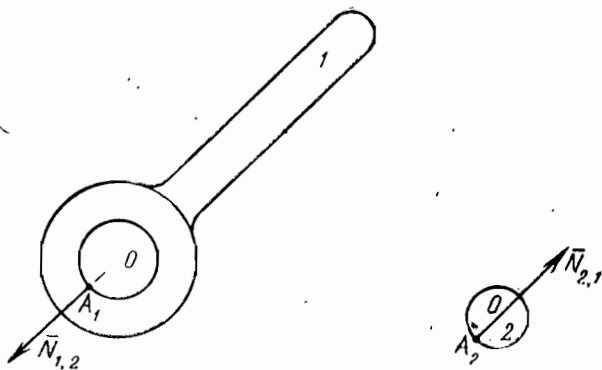


Рис. 1-21

ходит через центр отверстия  $O$  (рис. 1-21). Так как положение точки  $A$  на поверхности отверстия зависит от расположе-

ния внешних сил, приложенных к телам, и оно заранее неизвестно, то линия действия реакции  $\bar{N}_{1,2}$  заранее неизвестна.

Таким образом, в случае шарнирной связи направление реакции  $\bar{N}_{1,2}$  не может быть заранее указано, ибо оно зависит от расположения внешних сил. Шарнирную связь схематически изображают на чертеже в виде кружочка, как показано на рис. 1-22, причем направление реакции  $\bar{R}_{1,2} = -\bar{R}_{2,1}$  заранее неизвестно.

Неподвижное шарнирное соединение, когда болт прикреплен к неподвижному телу, схематически изображается в виде

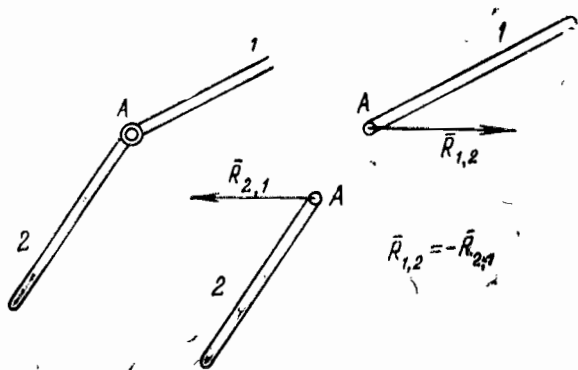


Рис. 1-22'

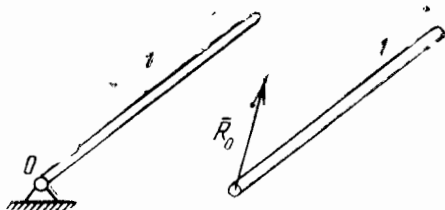


Рис. 1-23

кружочка и треугольника, как показано на рис. 1-23, причем направление реакции  $\bar{R}_0$  заранее неизвестно. Шарнирная связь может быть осуществлена также в виде конструкции, состоящей из трех тел, как показано на рис. 1-24. Поверхность болта находится в соприкосновении с поверхностями отверстий в стержнях 1 и 2 так, что болт взаимодействует с

каждым из двух тел 1 и 2 в отдельности, причем направления реакции  $\vec{R}_{1,3}$  и  $\vec{R}_{2,3}$  заранее неизвестны (рис. 1-25).

в) *Соприкосновение острия с поверхностью.* Частным случаем связи вида 2<sup>0</sup> является также соприкосновение острия с

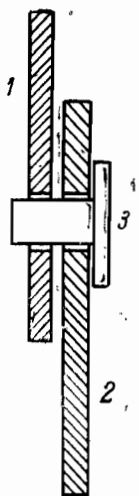


Рис. 1-24

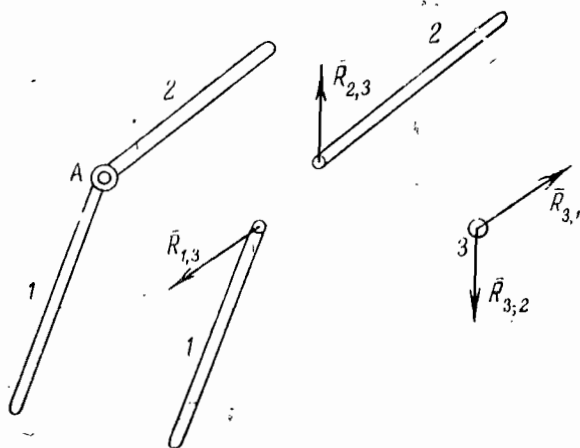


Рис. 1-25

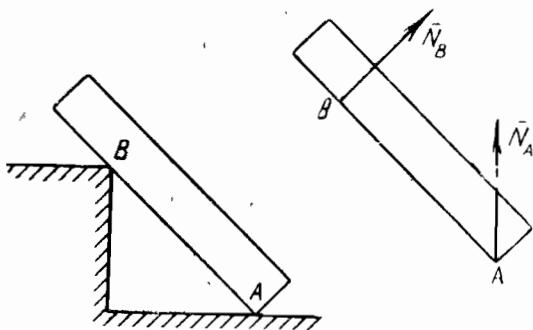


Рис. 1-26

гладкой поверхностью, если острие рассматривать как окружность весьма малого радиуса. Реакции в этом случае направлены по общей нормали, как показано на рис. 1-26.

Сформулированные IV и V аксиомы дают возможность выделить из системы отдельные тела или группы тел или отдельные части, заменив действия остальных частей реакциями.

Следующая, VI аксиома дает возможность применить к любой выделенной части системы тел первые 3 аксиомы статики абсолютно твердого тела и все следствия из них.

### VI. Аксиома отвердевания

Если система материальных точек или тел находится в состоянии покоя под действием данной системы сил, то состояние покоя не нарушится, если на систему тел наложить дополнительные связи или если она отвердеет (станет абсолютно твердым телом).

Поясним содержание этой аксиомы на простых примерах. Если деформируемый стержень  $AB$  находится в равновесии под действием двух сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , то состояние покоя не изменится, если стержень отвердеет.

Допустим теперь, что система состоит из двух стержней  $OA$  и  $OB$ , соединенных шарниром  $O$  (рис. 1-27). При некото-

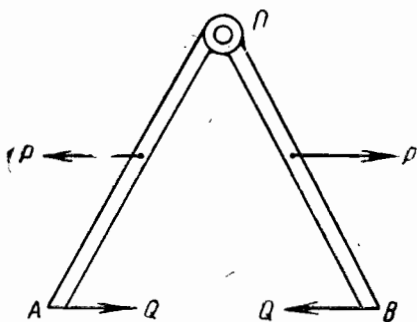


Рис. 1-27

ром соотношении между силами  $P$  и  $Q$  рассматриваемая система тел будет находиться в состоянии покоя. На основании аксиомы отвердевания состояние покоя системы не будет нарушено, если наложить на нее дополнительные связи, например, соединить стержни  $OA$  и  $OB$  стержнем  $CD$ , как показано на рис. 1-28, или если вся система тел отвердеет.

Шестой аксиоме можно дать другую формулировку, если учесть, что, согласно этой аксиоме, система деформируемых



тел и абсолютно твердое тело, возникшее из них в результате отвердевания этих тел, находятся в состоянии покоя под действием одной и той же системы сил: если система точек или тел находится в состоянии покоя под действием данной системы сил, то абсолютно твердое тело под действием той

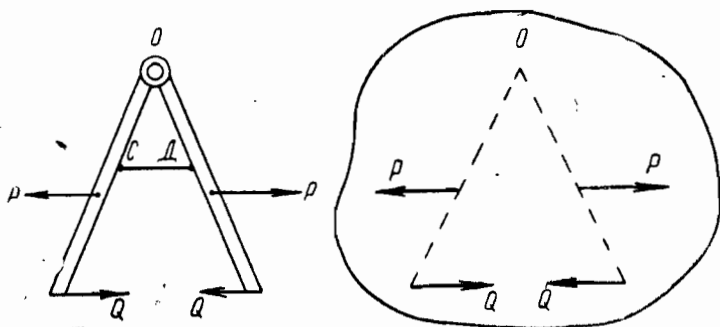


Рис. 1-28

же системы сил также будет находиться в состоянии покоя.

Отсюда следует, что условия равновесия системы сил, приложенных к абсолютно твердому телу, являются также необходимыми (но недостаточными) условиями равновесия любого тела или системы тел, находящейся под действием той же системы сил.

Пользуясь аксиомой отвердевания, можно рассматривать выделенные тела или группы тел, или части системы тел как абсолютно твердые тела и применить к ним первые 3 аксиомы статики и все следствия из них.

### § 3. Методика решения задач статики

Первые 3 аксиомы статики, как это будет показано в дальнейшем, дают возможность найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять силы, приложенные к отдельно взятому (свободному) абсолютно твердому телу, чтобы оно находилось в состоянии покоя.

Однако при решении задач статики нам приходится рассматривать системы несвободных деформируемых тел, на которые наложены связи. Чтобы иметь возможность применить к таким системам тел условия равновесия сил, приложенных к свободному абсолютно твердому телу, служат последующие 3 аксиомы статики.

Действительно, пользуясь  $V$  аксиомой, можно освободиться от внешних связей, заменяя их реакциями, и тем самым сделать систему тел свободной. Пользуясь той же аксиомой связи и аксиомой действия и противодействия, можно систему тел *расчлени*ть на отдельные тела или выделить из нее отдельные группы тел, или отдельные части, заменяя связи реакциями. Далее на основании аксиомы отвердевания можно рассматривать указанные тела, группы тел или части системы тел как свободные абсолютно твердые тела и применить к ним условия *равновесия* системы сил, приложенных к отдельно взятому свободному абсолютно твердому телу.

На основании изложенного можно сформулировать следующую методику решения задач статики, состоящую из трех этапов.

1. *Освобождение от внешних связей.* Освобождаем рассматриваемую систему тел от внешних связей, заменяя их реакциями, согласно аксиоме связей.

2. *Расчленение.* Освобожденную от внешних связей систему тел расчленяем на отдельные тела или выделяем из системы отдельные группы тел, или отдельные части системы и действие тел и групп тел друг на друга заменяем силами, согласно аксиоме связи и равенства действия и противодействия. В частности, за одну из групп тел можно взять всю систему тел.

3. *Равновесие.* Рассматриваем состояние покоя выделенных тел, групп тел или частей системы тел, считая их отвердевшими, согласно аксиоме отвердевания, и применяя к ним условия *равновесия* сил, приложенных к свободному абсолютно твердому телу.

Рассмотрим ряд конкретных задач.

**Задача 1-1.** Система состоит из невесомых стержней  $AC$  и  $BC$ , соединенных между собой шарниром в точке  $C$  и прикрепленных к вертикальной стене шарнирами  $A$  и  $B$ . В середине горизонтального стержня  $BC$  действует вертикальная сила  $P=100$  кг;  $\alpha=45^\circ$  (рис. 1-29). Найти реакции, приложенные к стержням в точках  $A$  и  $B$ . (Заметим, что по условию задачи весом стержней можно пренебречь и считать их невесомыми).

**Решение.** Применим изложенную выше методику решения задач статики.

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). В рассматриваемую систему тел входят стержни  $AC$  и  $BC$ , следовательно, вертикальная стена является внешней связью. Ос-

вобождаемся от внешних связей и заменяем действие стены реакциями  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$ . При этом, так как связи в точках  $A$  и  $B$  шарнирные (например, к стене прикреплены болты в точках

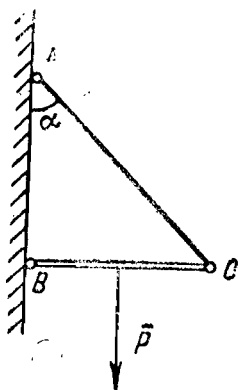


Рис. 1-29

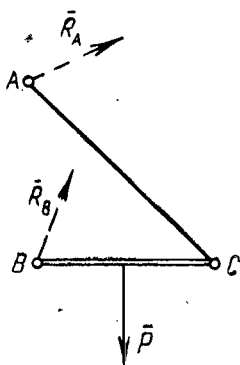


Рис. 1-30

$A$  и  $B$  и в стержнях имеются отверстия), то направления реакции  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$  заранее неизвестны (на рис. 1-30 эти реакции изображены пунктиром).

2) *Расчленение* (второй шаг). Для определения искомых реакций  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$  расчленим систему тел, освобожденную от внешних связей на отдельные тела, заменяя связи реакциями

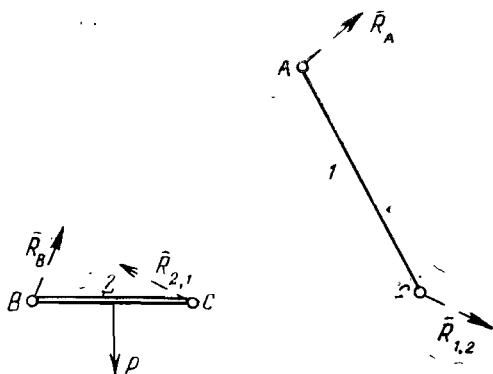


Рис. 1-31

и используя аксиому действия и противодействия (рис. 1-31). При этом мы рассматриваем шарнирную связь в точке  $C$  как

соединение двух тел, например, в точке  $\bar{C}$  тела 2 прикреплен болт, а в точке  $C$  тела 1 имеется отверстие. Направление реакции в точке  $C$  не может быть заранее указано в общем случае (на рисунке эта реакция показана пунктиром), однако из аксиомы действия и противодействия следует, что реакция  $\bar{R}_{1,2}$ , приложенная к первому телу, равна по величине и противоположна по направлению реакции  $\bar{R}_{2,1}$ , приложенной ко второму телу  $\bar{R}_{1,2} = -\bar{R}_{2,1}$ .

3. *Равновесие* (третий шаг). Теперь, рассматривая выделенные тела 1 и 2, на основании аксиомы отвердевания, как абсолютно твердые, мы можем к ним применить условия рав-

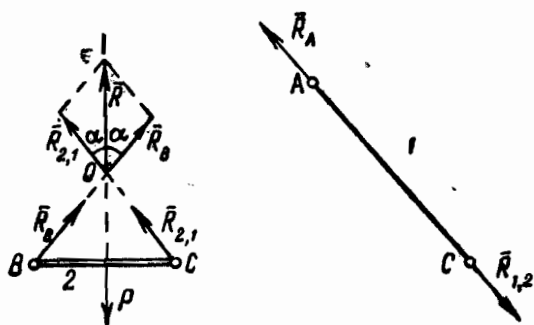


Рис. 1-32

новесия, вытекающие из первых трех аксиом статики. В самом деле, так как тело 1 находится под действием двух сил в состоянии покоя, то из первой аксиомы статики следует, что:

- 1) силы  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_{1,2}$  равны по величине, противоположны по направлению, то есть  $\bar{R}_A = -\bar{R}_{1,2}$  и
- 2) действуют по одной прямой  $AC$  (рис. 1-32). Причем мы пока не знаем, будут ли силы  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_{1,2}$  растягивающими или сжимающими.

Далее направление силы  $\bar{R}_{2,1}$  определяется по аксиоме действия и противодействия  $\bar{R}_{2,1} = -\bar{R}_{1,2}$ .

Рассмотрим теперь равновесие системы сил, приложенных к телу 2. На основании следствия 2 из первых трех аксиом для того, чтобы стержень  $BC$  находился в состоянии покоя, под действием трех непараллельных сил, необходимо, чтобы линии действия сил пересекались в одной точке: следовательно, линия действия силы  $\bar{R}_B$  должна проходить через точку

О пересечения линии действия сил  $\bar{R}_{2,1}$  и  $P$ . Переноса далее силы  $\bar{R}_{2,1}$  и  $\bar{R}_B$  в точку  $O$  (на основании следствия 1 о переносе силы в любую точку линии ее действия) и заменяя их равнодействующей  $\bar{R}$  по аксиоме параллелограмма сил, мы получим тело, находящееся в состоянии покоя под действием двух сил  $\bar{R}$  и  $\bar{P}$ .

По первой аксиоме статики теперь находим

$$\bar{R} = -\bar{P}.$$

Далее непосредственно из чертежа находим

$$\bar{R}_{1,2} = -\bar{R}_B$$

и

$$R_B = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{100}{2 \cos 45^\circ} \approx 71 \text{ кг},$$

откуда

$$R_{2,1} = R_{1,2} = R_A = R_B \approx 71 \text{ кг}.$$

**Примечание.** Как мы видели, в общем случае нельзя указать направления реакции  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$ , однако если на стержень  $AC$  действуют лишь 2 силы, то реакции направлены вдоль стержня по прямой  $AC$ . Поэтому в дальнейшем в по-

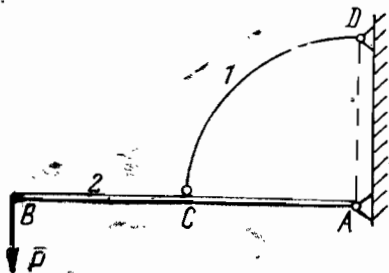


Рис. 1-33

добных случаях будем направлять искомые реакции по стержню. При этом нужно иметь в виду, что это справедливо только тогда, когда на стержень действуют лишь 2 силы, ибо, например, реакция  $\bar{R}_B$  уже не будет направлена по стержню  $BC$ , так как на этот стержень действует система, состоящая из большего числа сил.

**Задача 1-2.** Невесомые балка  $AB$  и криволинейный стержень  $CD$  соединены между собой и вертикальной стеной при помощи шарниров. Балка  $AB$  горизонтальна. К ней в точке  $B$  приложена вертикальная сила  $P$ . Определить реакции в точках  $A$ ,  $C$  и  $D$ , если  $AD=AC=BC$  (рис. 1-33).

### Решение.

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Балку и стержень освобождаем от внешних связей в точках  $A$  и  $D$  и заменяем связи реакциями  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_D$ . Направление этих реакций неизвестно. На рис. 1-34 они указаны пунктирными стрелками.

2) *Расчленение* (второй шаг). Систему расчленяем на два тела: балку  $AB$  и стержень  $CD$ , освобождаем их от связей

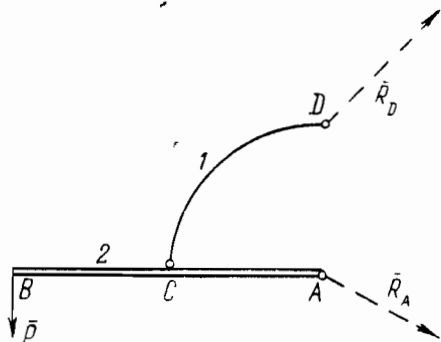


Рис. 1-34

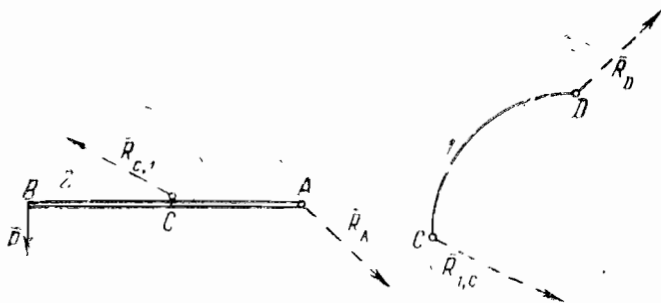


Рис. 1-35

в точке  $C$ , заменяя связи реакциями  $R_{1,C}$ ,  $R_{C,1}$ , которые соответственно приложены к стержню  $CD$  в точке  $C$  и балке  $AB$  в точке  $C$ . Направление этих реакций пока неизвестно. На рисунке 1-35 они указаны пунктирными стрелками. Эти реакции, согласно аксиоме равенства действия и противодействия, равны по величине и направлены по одной прямой в противо-

положные стороны, то есть  $\vec{R}_{C,1} = -\vec{R}_{1,C}$  (болт считаем наглухо скрепленным с балкой  $AB$ ).

3) *Равновесие* (третий шаг). Каждое из выделенных тел рассматриваем как абсолютно твердое. Тело  $1$  находится в покое под действием двух сил, следовательно, эти силы, со-

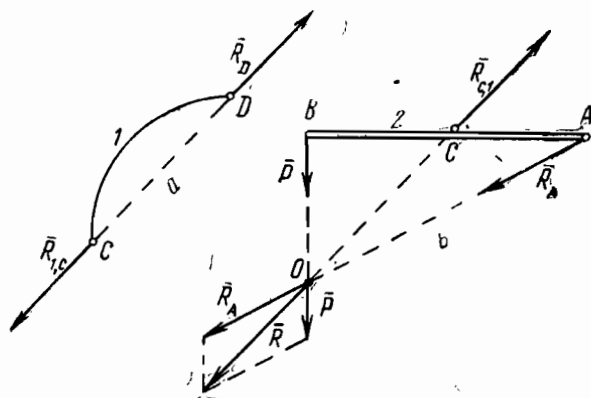


Рис. 1-36

гласно аксиоме 1, равны по величине, направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1-36a).

Второе тело находится в покое под действием трех непараллельных сил  $P$ ,  $R_{C,1}$ ,  $R_B$ , лежащих в одной плоскости; согласно следствию 2, линии их действия пересекаются в одной точке  $O$  (рис. 1-36b).

Перенесем силы  $P$  и  $R_A$  по линиям их действия в точку  $O$  пересечения этих линий и заменим эти силы одной силой  $R$ , тогда балка  $AB$  будет находиться в состоянии покоя под действием двух сил  $\vec{R}$  и  $\vec{R}_{C,1}$ , которые, согласно аксиоме 1, будут равны по величине, направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1-36b). Из этого же рисунка, применяя теорему синусов, находим ( $\alpha = \angle OAB$ )

$$\frac{R_A}{\sin 45^\circ} = \frac{P}{\sin (45^\circ - \alpha)} = \frac{R_{C,1}}{\cos \alpha},$$

отсюда

$$R_A = P \frac{\sin 45^\circ}{\sin (45^\circ - \alpha)} = \frac{P}{\cos \alpha - \sin \alpha},$$

$$R_{C,1} = P \frac{\cos \alpha}{\sin (45^\circ - \alpha)} = \frac{P\sqrt{2}}{1 - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Из условий задачи  $AD=AC=BC$  и рисунка получим

$$\sin \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Подставляя эти значения в выражения для  $R_A$  и  $R_{C,1}$ , найдем

$$R_A = P\sqrt{5}, \quad R_{C,1} = R_{1,C} = 2P\sqrt{2}.$$

**Задача 1-3.** Горизонтальный стержень  $BC$  и криволинейный стержень  $AC$  соединены между собой и с вертикальной стеной при помощи шарниров (рис. 1-37). На шарнирный

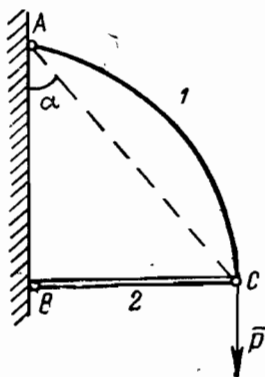


Рис. 1-37

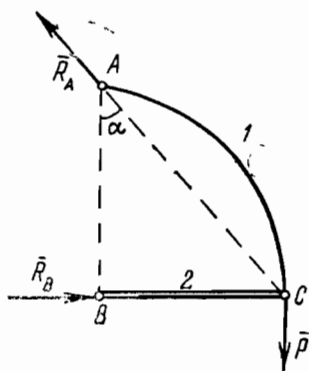


Рис. 1-38

болт  $C$  действует вертикальная сила  $P$ ;  $\angle BAC = \alpha$ . Определить реакции в шарнирах  $A$  и  $B$ , считая стержни невесомыми.

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Для рассматриваемой системы тел стена является внешней связью. Освободимся от внешних связей и заменим их реакциями в точках  $A$  и  $B$  (рис. 1-38). При этом, хотя связи в точках  $A$  и  $B$  шарнирные и направления реакции  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$  в общем случае заранее неизвестны, но так как стержни  $AC$  и  $BC$  невесомые и каждый из них находится под действием лишь двух сил, приложенных к его концам, то реакции должны быть направлены по линиям  $AC$  и  $BC$  соответственно (см. задачи 1-1 и 1-2). Если же стержни весомые или к ним приложены дополнительные силы, то направления реакции заранее неизвестны.



2) *Расчленение* (второй шаг). Представим себе конструкцию шарнира  $C$ , состоящую из трех тел: болта  $C$  и стержней 1 и 2 (рис. 1-39), причем сила  $\vec{P}$  приложена к болту  $C$ . Расчленим эту систему на отдельные тела и заменим связи реакциями  $\vec{R}_{1,C} = -\vec{R}_{C,1}$ ;  $\vec{R}_{2,C} = -\vec{R}_{C,2}$ , пользуясь аксиомой связи и аксиомой действия и противодействия.

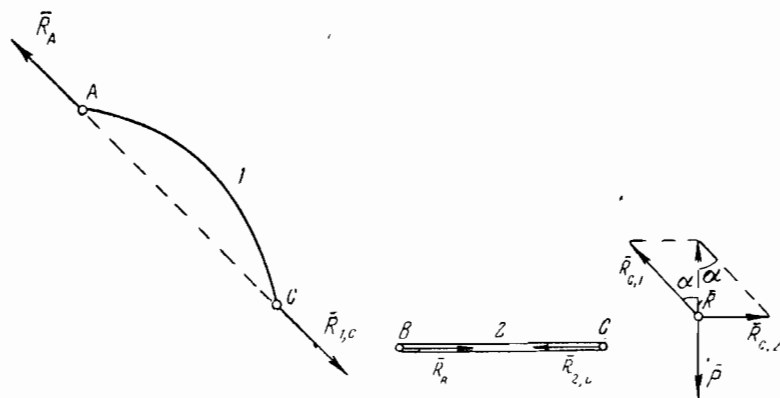


Рис. 1-39

3) *Равновесие* (третий шаг). Рассмотрим равновесие сил, приложенных к болту  $C$ . Заменяя силы  $\vec{R}_{C,1}$  и  $\vec{R}_{C,2}$  равнодействующей  $\vec{R} = \vec{R}_{C,1} + \vec{R}_{C,2}$  и учитывая, что сила  $\vec{R}$  должна уравниваться силой  $\vec{P}$ , находим по первой аксиоме статики  $\vec{R} = -\vec{P}$ . Из чертежа теперь находим,

$$R_{C,2} = P \operatorname{tg} \alpha; \quad R_{C,1} = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

Из условия равновесия остальных тел получим

$$R_A = R_{C,1}; \quad R_B = R_{2,C}.$$

Примечание 1. Указанную задачу можно решить иначе, считая, что болт  $C$  наглухо скреплен со стержнем  $BC$ . Расчленим систему на отдельные тела 1 и 2 (рис. 1-40) и рассмотрим равновесие сил, приложенных к этим телам. Реакции  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_C$  направлены по прямой  $AC$ ; сила  $\vec{R}_B$  должна уравниваться равнодействующей  $R_1$  сил  $R_C$  и  $P$ , приложенных к телу 2 (рис. 1-41). Откуда

$$R_B = R_1 = P \operatorname{tg} \alpha; \quad R_A = R_C = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

Мы видим, что значения реакции в шарнирах  $A$  и  $B$  не изменились и не зависят от конструкции шарнирной связи в точке  $C$ .

Примечание 2. Так как в результате рассмотрения равновесия тел  $1$  и  $2$  мы установили направления реакции



Рис. 1-40

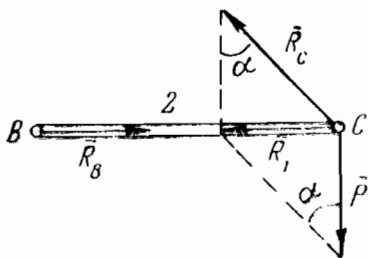


Рис. 1-41

$\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$ , то вместо рассмотрения равновесия болта  $C$  или тела  $2$  (рис. 1-39) можно рассмотреть равновесие группы тел, в данном случае всей системы тел (рис. 1-38). Для этого рассматриваем ее по аксиоме отвердевания как отвердевшую и, перенеся силы в точку  $C$ , заменяем  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$  равнодействующей силой  $\vec{R} = -\vec{P}$ . В результате получим найденные выше значения для реакции  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$ .

**Задача 1-4.** Два невесомых криволинейных стержня  $AC$  и  $BC$  соединены между собой шарниром  $C$  и прикреплены к двум неподвижным опорам шарнирами  $A$  и  $B$  (трехшарнир-

ная арка). На шарнирный болт  $C$  действует вертикальная сила  $\bar{P}$ . Определить реакции в точках  $A$  и  $B$ . Размеры указаны на рис. 1-42.

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Отбросим внешние связи (опоры в точках  $A$  и  $B$ ) и заменим их реакциями  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$ . В общем случае действия произвольной

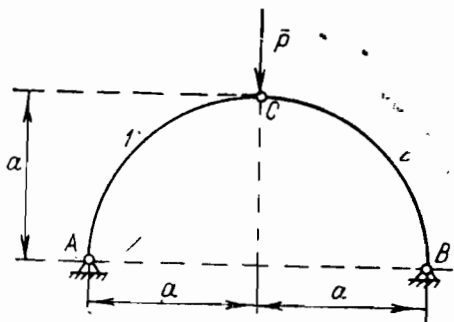


Рис. 1-42

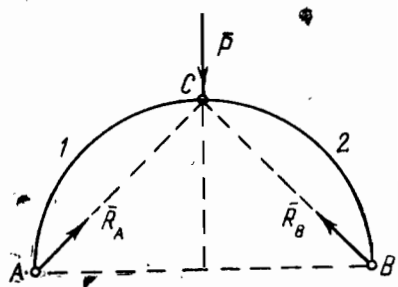


Рис. 1-43

системы сил мы не можем заранее указать направления реакции  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$ . Однако в данном случае очевидно, что, как и в предыдущих задачах, на каждую из арок  $AC$  и  $BC$  действуют по 2 силы, приложенные к концам арок, и, следовательно, реакции  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$  направлены по линиям  $AC$  и  $BC$  соответственно (рис. 1-43).

2) *Расчленение* (второй шаг). Расчленим систему на отдельные тела и заменим связи реакциями (рис. 1-44), считая

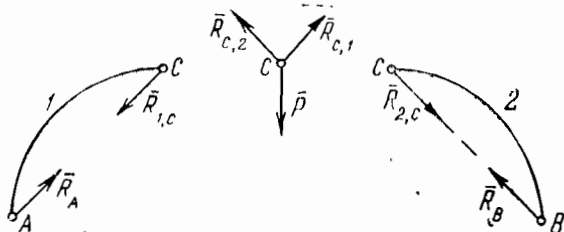


Рис. 1-44

узел (болт)  $C$  как отдельное тело, к которому приложена сила  $P$ .

3) *Равновесие* (третий шаг). По первой аксиоме статики сила  $\bar{R}_A$  направлена по линии  $AC$  и сила  $\bar{R}_B$  по линии  $BC$ .

Эти силы можно найти либо из рассмотрения равновесия узла  $C$ , либо из рассмотрения равновесия всей системы тел, рассматриваемой как отвердевшей (по аксиоме отвердевания). Так как равнодействующая  $\vec{R}$  сил  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$  уравновешивается силой  $\vec{P}$  (рис. 1-45), то  $R=P$ . Тогда

$$R_A = R_B = R \cos 45^\circ = \frac{P\sqrt{2}}{2}.$$

**Задача 1-5.** Доказать закон Архимеда, то есть доказать, что тело, погруженное в жидкость, испытывает подъемную силу, равную весу вытесненного объема жидкости.

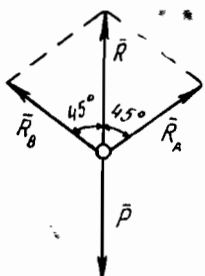


Рис. 1-45

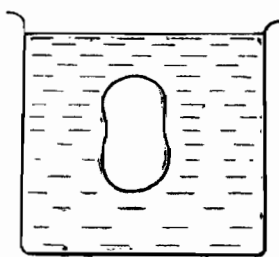


Рис. 1-46

**Решение.** В жидкости мысленно выделим некоторый объем, ограниченный какой-либо поверхностью (рис. 1-46). Предположим, что жидкость, заключенная в этом объеме, отвердела, то есть стала абсолютно твердым телом, тогда, согласно аксиоме отвердевания, состояние покоя полученного тела не изменится.

Перейдем теперь к рассмотрению покоя этого тела. Для чего это тело освобождаем от жидкости, окружающей его

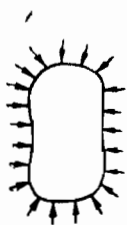


Рис. 1-47



Рис. 1-48

поверхность, и действие жидкости на тело заменяем силами, действующими на каждую точку его поверхности (рис. 1-47).

Выделенный объем жидкости находится в покое под действием сил  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_i$  и силы его веса  $\bar{P}$  (рис. 1-47). Сила  $\bar{P}$  уравнивается системой сил  $\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_2\}$ , представляющих собой суммарное давление жидкости на поверхность выделенного объема. С другой стороны, сила  $\bar{P}$  может быть уравновешена одной силой  $\bar{R} = -\bar{P}$ , приложенной в любой точке, лежащей на линии действия силы  $\bar{P}$  и направленной по этой линии в сторону, противоположную силе  $\bar{P}$  (рис. 1-48).

Таким образом

$$(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_i) \text{ уравнивается } \bar{P}.$$

Следовательно, суммарное давление жидкости на любую поверхность, ограничивающую выделенный объем, эквивалентно действию одной силы, равной по величине весу жидкости, заключенной в этом объеме и направленной вертикально вверх. Отсюда приходим к выводу: если в жидкость поместить какое угодно тело, то оно со стороны этой жидкости будет испытывать суммарное давление, эквивалентное действию одной подъемной силы  $R$ , по величине равной весу жидкости  $\bar{P}$ , вытесненной в объеме погруженного тела и направленной вертикально вверх, а это и доказывает закон Архимеда.

## Глава II. СТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ

Раздел статики, в котором изучается состояние покоя абсолютно твердого тела или системы таких тел, находящихся под действием сил, как угодно расположенных в одной плоскости, называется *статикой на плоскости*.

Система сил, произвольным образом расположенная в плоскости, называется *плоской системой сил*.

Основными задачами статики на плоскости являются следующие две задачи:

а) *Приведение системы сил*. Эта задача заключается в замене системы сил, приложенной к абсолютно твердому телу более простой эквивалентной системой сил.

б) *Условия равновесия системы сил*. Эта задача заключается в нахождении необходимых и достаточных условий равновесия, которым должны удовлетворять силы, приложенные к свободному абсолютно твердому телу, чтобы оно находилось в состоянии покоя.

Обе задачи мы будем рассматривать параллельно для различных систем сил.

### § 1. Система сходящихся сил на плоскости

Плоская система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (точке схода сил), называется *системой сходящихся сил на плоскости*. Рассмотрим сперва геометрический способ решения задач а) и б) для сходящихся сил на плоскости.

<sup>10</sup>. *Геометрический способ сложения и геометрические условия равновесия сходящихся сил на плоскости*.

а) *Замена сходящихся сил на плоскости равнодействующей*.

Пусть на абсолютно твердое тело действует плоская система сходящихся сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  (на рис. 2-1 изображены лишь три силы). Перенесем все силы в точку схода  $O$  (на основании следствия 1, § 1, главы I о переносе силы, приложенной к

абсолютно твердому телу в любую точку линии ее действия).  
 Заменяем теперь силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  равнодействующей  $\vec{R}_1$ , приложенной к точке  $O$ , пользуясь аксиомой параллелограмма сил  
 $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}_1; \vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

Аналогично заменим равнодействующую  $\vec{R}_1$  и силу  $\vec{F}_3$  новой равнодействующей  $\vec{R}_2$ , приложенной в точке  $O$ , тогда

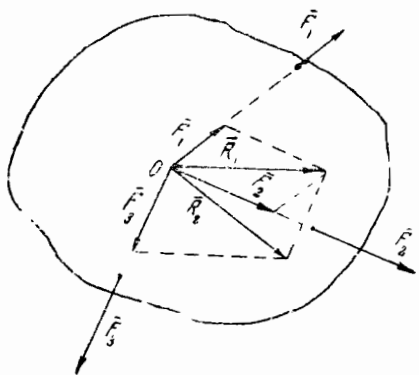


Рис. 2-1

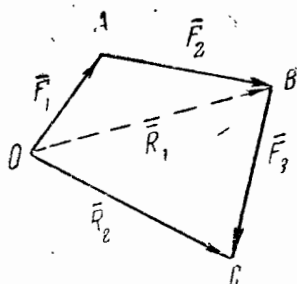


Рис. 2-2

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim \{\vec{R}_1, \vec{F}_3\} \sim \vec{R}_2;$$

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Продолжая этот процесс, заменим всю систему сходящихся сил равнодействующей  $\vec{R}$ , приложенной в точке схода сил

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R};$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

В дальнейшем будем опускать индекс  $k$  и писать

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F}.$$

Полученный вывод сформулируем в виде теоремы.

**Теорема.** Система сходящихся сил на плоскости эквивалентна равнодействующей, приложенной к точке схода сил и равной геометрической сумме всех сил.

Геометрическую сумму векторов на плоскости удобно найти путем построения многоугольника векторов и замыкающего вектора этого многоугольника.

Из конца вектора силы  $\vec{F}_1$  построим вектор силы  $\vec{F}_2$ , из конца вектора силы  $\vec{F}_2$  построим вектор силы  $\vec{F}_3$  и т. д. Полученный многоугольник векторов  $OABC$  называется силовым многоугольником. Вектор  $\vec{R}_2$ , начало которого совпадает с началом силового многоугольника и конец его совпадает с концом силового многоугольника, называется замыкающим вектором этого многоугольника (на рис. 2-2 изображены лишь векторы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ). Так как геометрическая сумма векторов равна замыкающему вектору многоугольника векторов, то равнодействующая  $\vec{R}$  системы сходящихся сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$  равна замыкающему вектору силового многоугольника, построенного на этих силах.

**О п р е д е л е н и е.** Если замыкающий вектор силового многоугольника равен нулю, то говорят, что силовой многоугольник замкнут. Для двух сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  сформулированное

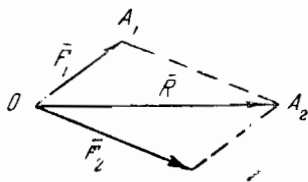


Рис. 2-3

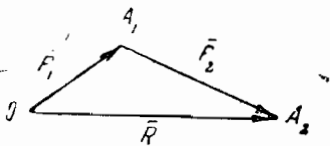


Рис. 2-4

правило многоугольника сил есть простое следствие аксиомы параллелограмма сил. Действительно, для того чтобы найти равнодействующую сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , приложенных к точке  $O$  (рис. 2-3), достаточно построить замыкающий вектор  $\vec{R}$  силового многоугольника  $OA_1A_2$ , построенного на силах  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 2-4). Аналогичным образом определяется равнодействующая сил  $\vec{R}_1$  и  $\vec{F}_3$ , то есть равнодействующая сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  (рис. 2-2) и т. д.

Рассмотрим теперь задачу б), то есть условия равновесия сходящихся сил на плоскости.

б) *Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил на плоскости.*

**Теорема.** Для того чтобы абсолютно твердое тело под действием плоской системы сходящихся сил находилось в состоя-



нии покоя, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма сил была равна нулю или иначе, чтобы силовой многоугольник был замкнут.

*Доказательство.* Заменяем плоскую систему сходящихся сил  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\}$  равнодействующей  $\bar{R} = \Sigma \bar{F}$ , приложенной к точке схода сил. Для того чтобы тело находилось в состоянии покоя под действием этой системы сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая  $\bar{R}$  была равна нулю, то есть чтобы

$$\Sigma \bar{F} = 0$$

или иначе, чтобы многоугольник сил был замкнут (рис. 2-5).

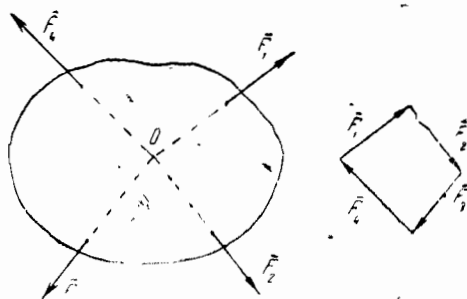


Рис. 2-5

Из доказанной теоремы, а также следствия 2, § 1, глава I можно получить следующее условие равновесия системы, состоящей из трех сил.

*Следствие е.* Для того чтобы абсолютно твердое тело под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, находилось в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы: 1) линии действия сил пересекались в одной точке и 2) треугольник сил был замкнут.

*Доказательство.* На основании следствия 2 (§ 1, глава I) линии действия этих трех непараллельных сил должны пересекаться в одной точке; для того чтобы эти сходящиеся силы находились в равновесии, силовой многоугольник по доказанной теореме (в данном случае треугольник) должен быть замкнут (рис. 2-6).

2°. *Аналитический способ определения равнодействующей и аналитические условия равновесия плоской системы сходя-*

щихся сил. Прежде всего введем важное для дальнейшего понятие проекции силы на ось.

О п р е д е л е н и е. Проекцией силы  $F$  на ось  $Ox$  называется произведение величины силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси, то есть

$$X = np_x \bar{F} = |\bar{F}| \cos(\bar{F}, i) = F \cdot \cos \alpha \dots, \quad (2.1)$$

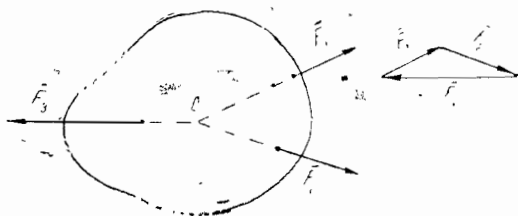


Рис. 2-6

где через  $X$  обозначена проекция силы  $F$  на ось  $Ox$ ;  $i$ —единичный вектор оси  $Ox$ , направленный в ту же сторону, что и ось  $Ox$  (рис. 2-7). Так как  $\cos \alpha$  может принимать положи-



Рис. 2-7

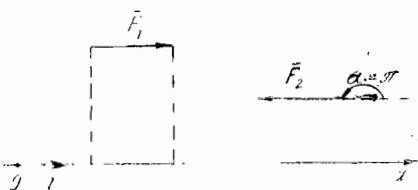


Рис. 2-8

тельные и отрицательные значения, то проекция силы на ось есть скалярная величина, положительная или отрицательная в зависимости от знака  $\cos \alpha$ .

В частности, если сила параллельна оси  $Ox$ , то ее проекция на ось  $Ox$  равна величине силы, взятой со знаком плюс, если сила направлена в ту же сторону, что и ось  $Ox$  (угол  $\alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ ) или минус, если сила направлена в противоположную сторону (угол  $\alpha = \pi$ ,  $\cos \alpha = -1$ ), то есть (рис. 2-8)

$$X_1 = np_x \bar{F}_1 = F_1 \cos 0^\circ = F_1,$$

$$X_2 = np_x \bar{F}_2 = F_2 \cos \pi = -F_2.$$

В общем случае для определения проекции силы  $\vec{F}$  на ось разложим ее мысленно на составляющие  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$ , из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна оси  $Ox$  (рис. 2-9). Очевидно, что проекция силы  $F$  на ось  $Ox$  равна сумме проекций составляющих  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$  на ту же ось, но  $np_x \vec{F}_y = 0$ , ибо сила  $\vec{F}_y$  перпендикулярна оси, следовательно,

$$X = np_x \vec{F} = np_x \vec{F}_x,$$

то есть проекция силы  $\vec{F}$  на ось  $Ox$  равна величине составляющей силы  $\vec{F}_x$ , параллельной оси и взятой со знаком плюс, если эта составляющая направлена в ту же сторону, что и ось  $Ox$ , или со знаком минус, если эта составляющая направлена в противоположную сторону (рис. 2-9)

$$X = np_x \vec{F} = F \cos \alpha,$$

$$X_1 = np_x \vec{F} = -F_1 \cos \alpha_1.$$

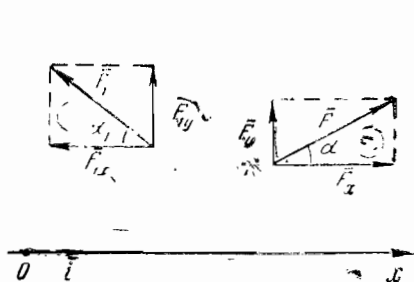


Рис. 2-9

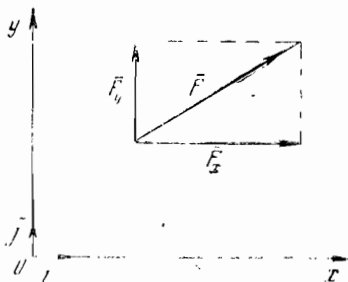


Рис. 2-10

Обозначим соответственно через  $X$  и  $Y$  проекции силы  $\vec{F}$  на взаимно перпендикулярные оси  $Ox$  и  $Oy$ , а составляющие силы  $\vec{F}$ , параллельные осям координат, обозначим через

$$\vec{F}_x \text{ и } \vec{F}_y; \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y.$$

Тогда из определения проекции силы на оси координат следует, что  $\vec{F}_x = X\vec{i}$ ;  $\vec{F}_y = Y\vec{j}$ , где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ —единичные векторы осей координат (рис. 2-10). Вектор силы  $\vec{F}$  теперь можно записать в виде

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}. \quad (2.2)$$

а) Аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил. Заменим сходящуюся систему сил  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\}$  равнодействующей  $\bar{R}$ , приложенной к точке схода сил (рис. 2-11)

$$\bar{R} \sim \{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\}; \quad \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \Sigma \bar{F} \quad (2-3)$$

Как известно, проекция суммы векторов на ось равна сумме проекции векторов на ту же ось. Поэтому из (2-3) получим

$$R_x = n p_x \bar{R} = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

$$R_y = n p_y \bar{R} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n,$$

где  $R_x$  и  $R_y$  суть проекции равнодействующей  $\bar{R}$ , а  $X_k$  и  $Y_k$  проекции силы  $\bar{F}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) на оси координат, то есть мы доказали следующую теорему.

**Теорема.** Проекция равнодействующей системы сходящихся сил на какую-либо ось равна сумме проекций всех сил на ту же ось

$$R_x = \Sigma X, \quad (2-4)$$

$$R_y = \Sigma Y.$$

Формулы (2-4) можно получить и другим путем, если записать векторы сил в виде (2-2)

$$\bar{F}_k = X_k \bar{i} + Y_k \bar{j}; \quad \bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j}; \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \Sigma \bar{F} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \bar{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) \bar{j} = \\ &= (\Sigma X) \bar{i} + (\Sigma Y) \bar{j}, \\ \bar{R} &= R_x \bar{i} + R_y \bar{j}. \end{aligned}$$

Сравнивая последние два равенства, получим соотношение (2-4). Из (2-4) найдем величину равнодействующей силы и углы, которые она образует с осями координат

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2}; \\ \cos(\bar{R}, \bar{i}) &= \frac{R_x}{R} = \frac{\Sigma X}{\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2}}; \\ \cos(\bar{R}, \bar{j}) &= \frac{R_y}{R} = \frac{\Sigma Y}{\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2}}. \end{aligned}$$

б) Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил.

**Теорема.** Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием плоской системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей была равна нулю.

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0, \\ \Sigma Y &= 0.\end{aligned}\quad (2-5)$$

*Доказательство.* Для того чтобы тело находилось в состоянии покоя, равнодействующая должна быть равна нулю

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2} = 0.$$

Для этого необходимо и достаточно, как видно из последнего равенства, чтобы выполнялись уравнения

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0.$$

**Примечание 2-1.** Если в результате решения уравнений равновесия для искомой реакции найдено значение со знаком плюс, то это означает, что направление искомой реакции выбрано правильно, если же со знаком минус, то направление реакции должно быть изменено на прямо противоположное. В самом деле, так как при составлении уравнений равновесия мы рассматриваем величины  $X_A, Y_A, \dots$  как модули соответствующих сил  $X_A, \bar{Y}_A, \dots$ , то если в результате решения уравнений равновесия для величин  $X_A, Y_A, \dots$  получены значения со знаком минус, это означает, что направления реакции  $X_A, Y_A, \dots$  должны быть изменены на прямо противоположные.

Рассмотрим ряд задач на применение условий равновесия системы сходящихся сил на плоскости.

**Задача 2-1.** Через блок, могущий вращаться вокруг точки  $O$ , переброшена нить с грузом веса  $\bar{P}$  на конце. Найти величину силы  $Q$ , приложенной к другому концу нити, для того, чтобы система находилась в состоянии покоя, если сила  $\bar{Q}$  образует с вертикалью угол  $\alpha$  (рис. 2-12). Найти также реакцию шарнирной связи в точке  $O$ .

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освободимся от внешних связей и заменим шарнирную связь в точке  $O$  реакцией  $\bar{R}_0$ . Направление этой реакции заранее неизвестно, на рис. 2-13 оно показано пунктиром.

2) *Расчленение* (второй шаг). В данном случае рассматриваем всю систему (блок, нить и груз); как отвердевшую, к которой приложены всего лишь три силы, причем направления двух из них  $\bar{P}$  и  $\bar{Q}$  заданы.

3) *Равновесие* (третий шаг). Так как система находится в состоянии покоя под действием трех непараллельных сил,

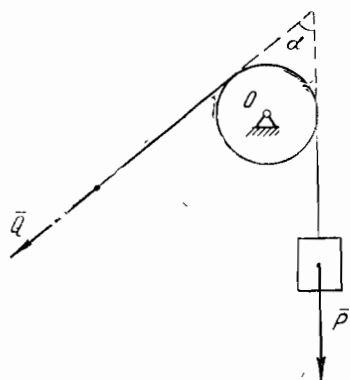


Рис. 2-12

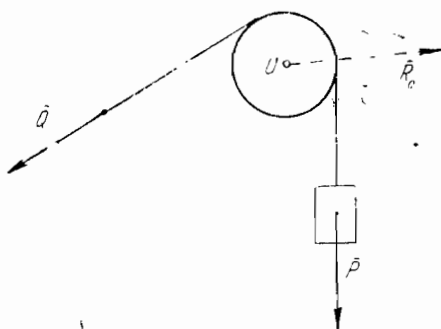


Рис. 2-13

то на основании следствия 2 (§ 1, глава I) линии действия сил  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$  и  $\bar{R}_0$  пересекаются в одной точке  $O'$ , то есть рассматриваемая система сил сходящаяся (рис. 2-14а). Теперь для определения искомых сил  $\bar{Q}$  и  $\bar{R}_0$  можно применить либо графическое условие равновесия сходящихся сил на плоскости (условия замкнутости силового треугольника), либо аналитические условия равновесия сходящихся сил.

1) *Построение силового треугольника*. Из конца вектора силы  $\bar{P}$  проводим линию параллельную вектору силы  $\bar{Q}_0$ . Далее через начало вектора силы  $\bar{P}$  проводим линию параллельную вектору силы  $\bar{R}_0$ . Из условия замкнутости силового треугольника однозначно определяются направления векторов  $\bar{Q}$  и  $\bar{R}_0$  (рис. 2-14б). Так как линия  $OO'$  является биссектрисой угла  $\alpha$ , то силовой треугольник равнобедренный и

$$Q = P; \quad R_0 = 2P \cos \frac{\alpha}{2}.$$

2) Аналитические условия равновесия. Выберем систему координат  $x$  и  $y$ , как показано на рис. 2-14а, и составим уравнения равновесия рассматриваемой системы сходящихся сил. Получим

$$\Sigma X = P \sin \frac{\alpha}{2} - Q \sin \frac{\alpha}{2} = 0,$$

$$\Sigma Y = R_0 - P \cos \frac{\alpha}{2} - Q \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Откуда

$$Q = P; R_0 = 2P \cos \frac{\alpha}{2}.$$

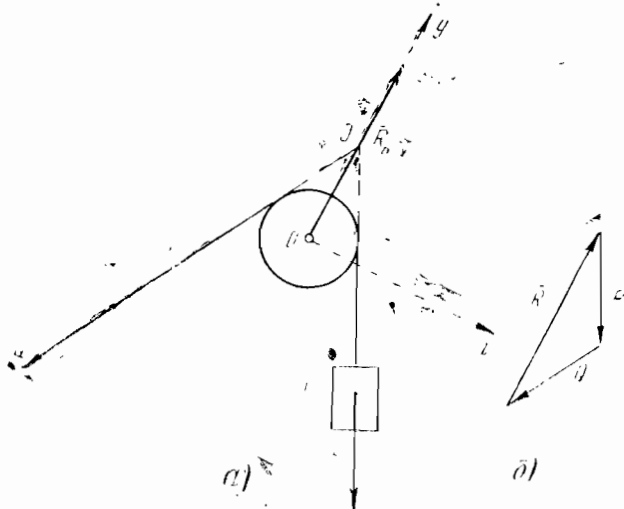


Рис. 2-14

Так как для искомых сил  $Q$  и  $R_0$  найдены значения со знаком плюс, то на основании примечания 2-1 направления этих сил выбраны правильно.

**Задача 2-2.** Для балки  $AB$  определить опорные реакции, возникающие при действии силы  $F=8$  т. Размеры указаны на рис. 2-15.

**Решение.**

1) Освобождение от внешних связей (первый шаг). Освобождаем балку от внешних связей в точках  $A$  и  $B$ , заменяя их реакциями  $\bar{N}_A$  и  $R_B$  (рис. 2-16).

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем тело как абсолютно твердое.

3) *Равновесие* (третий шаг). Сперва решим задачу, используя геометрическое условие равновесия.

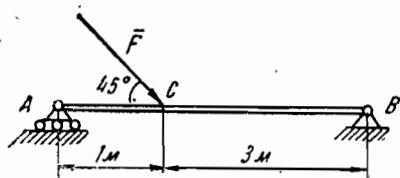


Рис. 2-15

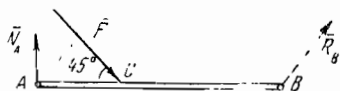


Рис. 2-16

Прежде всего найдем направление силы  $R_B$ . Линия действия этой силы будет проходить через точку  $O$  (рис. 2-17), так как балка находится в состоянии покоя под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости (см. следствие 2, гл. 1).

Таким образом, балка находится в покое под действием плоской системы сходящихся сил. Геометрическое условие

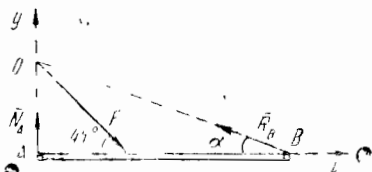


Рис. 2-17

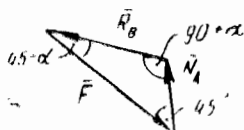


Рис. 2-18

равновесия такой системы сил состоит в том, чтобы силовой треугольник был замкнут (рис. 2-18).

Из силового треугольника находим направление силы  $R_B$  и по теореме синусов имеем

$$\frac{F}{\cos \alpha} = \frac{N_A}{\sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{R_B}{\sin 45^\circ}.$$

Отсюда

$$N_A = F \frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = F \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \operatorname{tg} \alpha);$$

$$R_B = F \frac{\sin 45^\circ}{\cos \alpha}.$$



Из данных задачи и рис. 2.17 находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{4}; \quad \cos \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{\sqrt{(OA)^2 + (AB)^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Подставляя эти значения в выражения для  $N_A$  и  $R_B$ , окончательно получим

$$N_A = F \frac{3\sqrt{2}}{8} = 3\sqrt{2} m;$$

$$R_B = F \frac{\sqrt{34}}{8} = \sqrt{34} \approx 5,83 m.$$

Решим теперь эту задачу, используя аналитические условия равновесия.

Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил состоят в том, чтобы  $\Sigma X=0$ ,  $\Sigma Y=0$  (формулы (2-5)). Проектируя силы, приложенные к балке на оси  $x$  и  $y$  (рис. 2-17), получим

$$\Sigma X = F \cdot \cos 45^\circ - R_B \cos \alpha = 0;$$

$$\Sigma Y = N_A - F \cos 45^\circ + R_B \cdot \sin \alpha = 0.$$

Отсюда находим, что

$$N_A = 3\sqrt{2} m; \quad R_B = \sqrt{34} m.$$

Так как искомые величины  $N_A$  и  $R_B$  найдены со знаком плюс, то направление этих сил выбрано правильно.

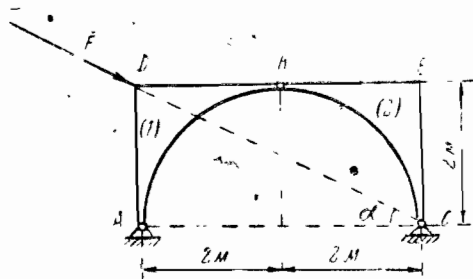


Рис. 2-19

**Задача 2-3.** Для трехшарнирной арки определить реакции в точках  $A, B, C$ , если в точке  $D$  действует сила  $F=5 m$ , линия действия которой проходит через точку  $C$  (рис. 2-19).

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаем систему от внешних связей в точках  $A$  и  $C$ , заменяя

связи реакциями  $R_A$  и  $R_C$ , направление которых неизвестно. На рис. 2-20 эти реакции указаны пунктирными стрелками.

2) *Расчленение* (второй шаг). Расчленяем систему на два тела (1) и (2), шарнирный болт  $B$  относим к одной из арок, например, к левой (рис. 2-21).

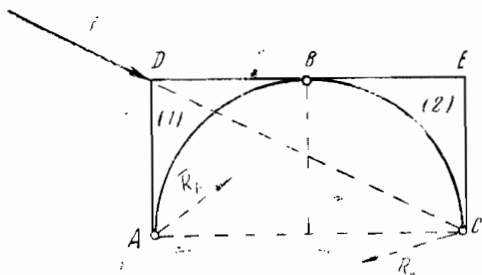


Рис. 2-20

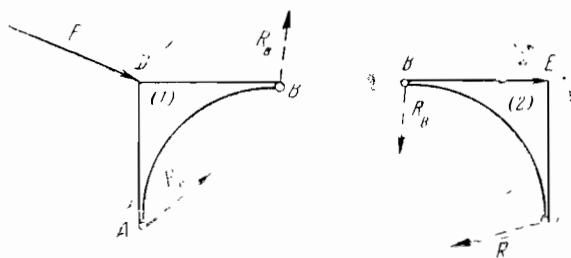


Рис. 2-21

3) *Равновесие* (третий шаг). 1°. Геометрическое условие равновесия. Сначала рассматриваем покой второго, а затем первого тела и находим направление сил  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$  (рис. 2-22) (см. предыдущую задачу). После этого строим силовые треугольники (а) и (б) соответственно для тела 1 и 2 (рис. 2-23). Из треугольника (б) находим, что  $R_A = R_B$ , а из треугольника (а) по теореме синусов имеем

$$\frac{F}{\cos 45^\circ} = \frac{R_B}{\sin \alpha} = \frac{R_A}{\sin (45^\circ - \alpha)}.$$

Отсюда

$$R_A = F \cdot \frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos 45^\circ} = F(\cos \alpha - \sin \alpha);$$

$$R_B = F \frac{\sin \alpha}{\cos 45^\circ}.$$

Из размеров арки (рис. 2-19) находим, что

$$\sin \alpha = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos \alpha = \frac{AC}{DC} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Подставляя эти значения  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  в выражения сил  $R_A$  и  $R_B$ , находим

$$R_A = \frac{F}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} m; \quad R_B = F \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{10} m;$$

$$R_C = R_B = \sqrt{10} m.$$



Рис. 2-22

2°. Аналитические условия равновесия. Силы, приложенные к телу 1, проектируем на оси  $x$ , и  $y$ , а к телу 2 на ось  $L$  (рис. 2-22), тогда получим

$$\begin{cases} \Sigma X = -R_A + F \cos \alpha - R_B \cos 45^\circ = 0, \\ \Sigma Y = -F \sin \alpha + R_B \cos 45^\circ = 0, \\ -R_B + R_C = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, найдем

$$R_B = R_C = \sqrt{10} m;$$

$$R_A = \sqrt{5} m.$$

**Задача 2-4.** Два невесомых стержня соединены между собой и прикреплены к потолку при помощи шарниров  $C$ ,  $A$  и  $B$ . В точке  $D$  действует сила  $\bar{P}$ , линия действия которой про-

ходит через точку  $A$ . Определить реакции в точках  $A$  и  $B$ , если углы указаны на рис. 2-24.

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаем систему от внешних связей в точках  $A$  и  $B$ , заменяя связи реакциями  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$ . Направление реакции  $\vec{R}_A$  извест-

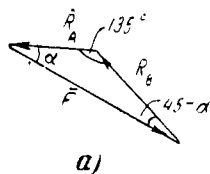


Рис. 2-23

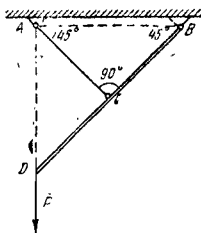
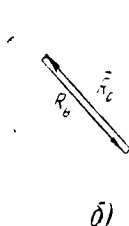


Рис. 2-24

но (она направлена по стержню  $AC$ ). Направление реакции  $\vec{R}_B$  неизвестно (на рис. 2-25 она указана пунктирной стрелкой).

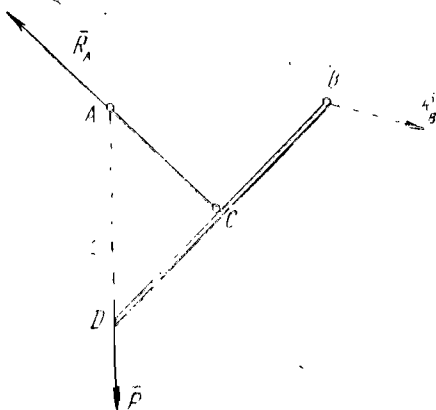


Рис. 2-25

2) *Расчленение* (второй шаг). В качестве группы тел возьмем всю систему тел и будем рассматривать ее на основании аксиомы отвердевания как одно абсолютно твердое тело.

3) *Равновесие* (третий шаг). 1°. Геометрическое условие равновесия. Находим линию действия силы  $\vec{R}_B$ . Она проходит через точку  $A$  (рис. 2-26). Из силового треугольника (рис. 2-27) находим

$$R_A = P\sqrt{2}; \quad R_B = R$$

(см. задачу 2-2).

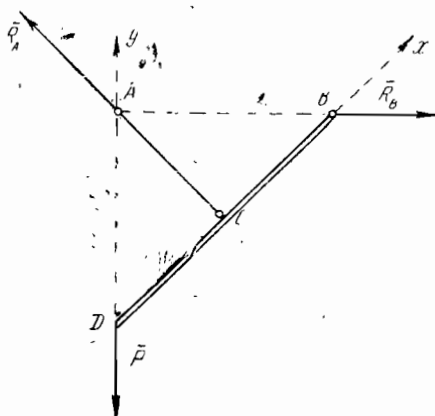


Рис. 2-26

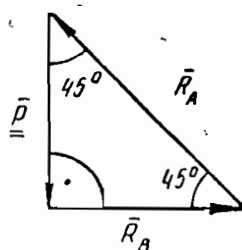


Рис. 2-27

2°. Аналитические условия равновесия. Силы, приложенные к системе тел, проектируем на оси  $x$  и  $y$  и составляем уравнения равновесия (рис. 2-26)

$$\Sigma X = R_B \cos 45^\circ - P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\Sigma Y = R_A \cos 45^\circ - P = 0.$$

Отсюда

$$R_B = P; \quad R_A = P\sqrt{2}.$$

Оси  $x$  и  $y$  в данном случае не взаимноперпендикулярны.

**Задача 2-5.** Балка  $AB$  в точке  $A$  прикреплена к стене при помощи шарнира, а в точке  $B$  к ней прикреплена нить, идущая горизонтально, и затем переброшена через неподвижный блок, к концу которой подвешен груз веса  $P$ . Определить вес балки  $Q$ , реакции шарнира и оси, а также натяжение нити, если балка  $AB$  с горизонтом составляет угол равный  $30^\circ$  (рис. 2-28).

### Решение.

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаем систему от внешних связей в точках  $A$  и  $D$  и заменяем связи реакциями  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_D$ . Направления реакций не известны. На рис. 2-29 они указаны пунктирной стрелкой.

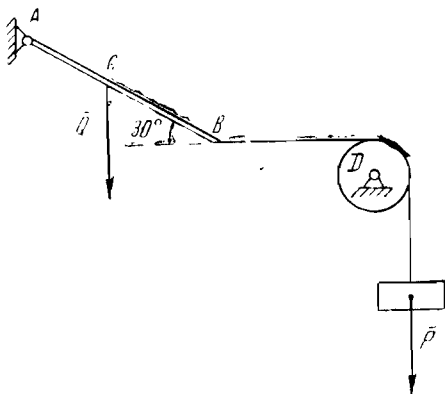


Рис. 2-28

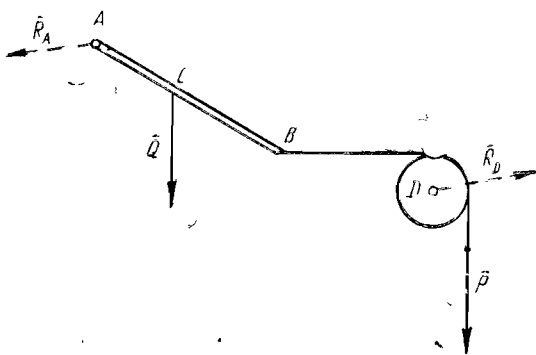


Рис. 2-29

2) *Расчленение* (второй шаг). Расчленяем на две группы тел: балка  $AB$  и диск вместе с нитью (рис. 2-30).

*Третий шаг.*

1<sup>0</sup>. Геометрическое равновесие. Сначала находим линии действия сил  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_D$ , которые соответственно проходят через точки  $O$  и  $O'$  (рис. 2-31).

Из силового треугольника (b) находим величины сил  $T=P$ ;  $R_D = P\sqrt{2}$ , а из треугольника (a) силы  $Q = T \operatorname{tg} \alpha$ ;  $R_A = \frac{T}{\cos \alpha}$  (рис. 2-32), причем (см. рис. 2-31 a)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

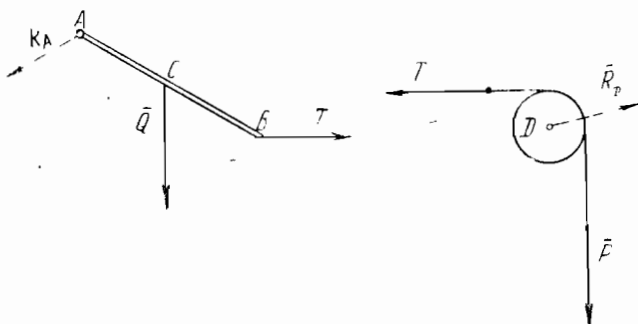


Рис. 2-30

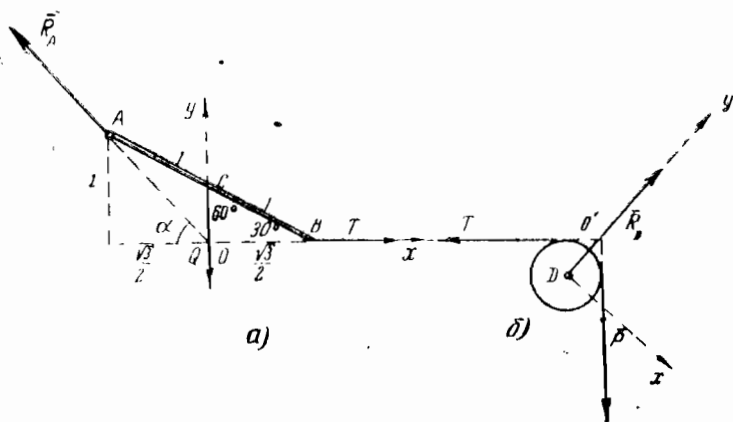


Рис. 2-31

Тогда

$$Q = T \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} P; \quad R_A = \frac{T}{\cos \alpha} = \frac{7P}{\sqrt{21}} = \frac{P\sqrt{21}}{3}.$$

2°. Аналитические условия равновесия. Составляем уравнения равновесия сначала для сил, приложенных к диску и нити, а затем к балке (рис. 2-31 б и а)

$$(a) \quad \begin{cases} \Sigma X = T - R_A \cdot \cos \alpha = 0, \\ \Sigma Y = -Q + R_A \sin \alpha = 0, \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \Sigma X = -T + R_D \cdot \cos 45^\circ = 0, \\ \Sigma Y = -P + R_D \cdot \cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$

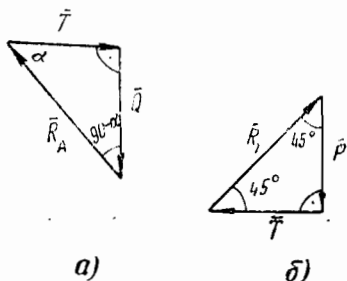


Рис. 2-32

Решая эти уравнения, найдем

$$T = P, R_D = P\sqrt{2}, Q = \frac{2\sqrt{3}}{3}P, R_A = \frac{\sqrt{21}}{3}P.$$

## § 2. Момент силы относительно точки плоскости

Прежде чем перейти к рассмотрению произвольной системы сил на плоскости, введем важное для дальнейшего понятие момента силы относительно точки плоскости.

**О п р е д е л е н и е.** Моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  называется взятое с соответствующим знаком произведение величины силы на расстояние  $h$  от точки  $O$  до линии действия силы  $\vec{F}$ , это произведение берется со знаком плюс, если сила  $\vec{F}$  стремится вращать тело против хода часовой стрелки, и со знаком минус, если сила  $\vec{F}$  стремится вращать тело по ходу часовой стрелки. Записывается это так

$$m_o \vec{F} = F \cdot h;$$

$$m_o \vec{F}_1 = -F_1 h_1.$$

Длина перпендикуляра  $h$  называется плечом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  (рис. 2-33).



Из определения следует, что величина момента силы относительно точки  $O$  равна удвоенной площади треугольника  $OAB$  (рис. 2-34) и не изменится, если сила перенесена в любую точку линии ее действия,

$$|m_O \vec{F}| = 2S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OA_1B_1}.$$

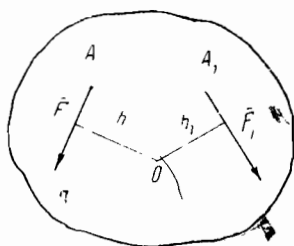


Рис. 2-33

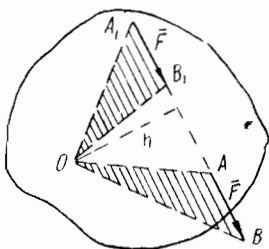


Рис. 2-34

Далее из определения следует, что момент силы  $\vec{F}$  равен нулю, когда линия действия силы проходит через точку  $O$ , ибо в этом случае плечо  $h=0$ . Моменту силы можно дать следующую физическую интерпретацию. Допустим, что к абсолютно твердому телу, могущему вращаться вокруг неподвижной точки  $O$ , приложена сила  $\vec{F}$ . Как показывает опыт, эффект действия силы (угловое ускорение тела) тем больше, чем больше величина момента силы.

### § 3. Пара сил. Свойства пар сил на плоскости

*Парой сил* называется система, состоящая из двух равных по величине параллельных сил, направленных в противоположные стороны. Расстояние между линиями действия сил называется плечом пары. На рис. 2-35 изображены две пары  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  и  $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ .  $h$  и  $h_1$  — плечи этих пар сил.

*Моментом пары сил* называется взятое с соответствующим знаком произведение величины одной из сил, составляющих пару на плечо пары. Это произведение берется со знаком плюс, если пара сил стремится вращать тело против хода часовой стрелки, и со знаком минус, если пара сил стремится вращать тело по ходу часовой стрелки. Записывается это так (рис. 2-35)

$$m(\vec{F}, \vec{F}'') = Fh,$$

$$m(\vec{F}_1, \vec{F}_1') = -F_1 h_1.$$

Из определения следует: момент пары сил равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой составляющей пары, например

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}'') = m_A \bar{F} = m_A (\bar{F}'')$$

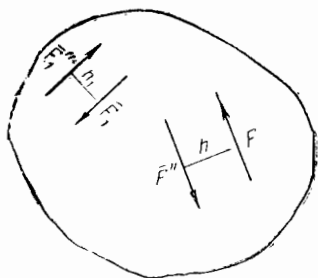


Рис. 2-35

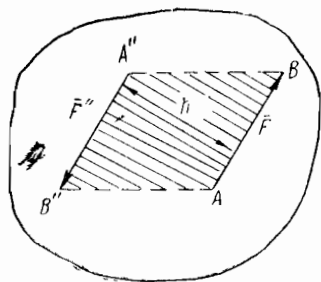


Рис. 2-36

Очевидно далее, что величина момента пары равна площади параллелограмма  $ABA''B''$  (рис. 2-36)

$$|m(\bar{F}, \bar{F}'')| = 2 \text{ площ. } \triangle A''AB = \text{площ. } ABA''B''.$$

Моменту пары сил можно дать следующую физическую интерпретацию. Эффект действия пары сил (угловое ускорение тела) тем больше, чем больше величина момента пары сил.

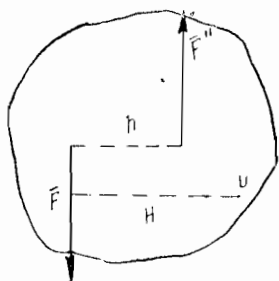


Рис. 2-37

#### Свойства пар сил на плоскости

Теперь докажем ряд теорем, касающихся свойств пары сил.

**Теорема о сумме моментов сил пары.** Сумма моментов сил пары относительно любой точки  $O$ , взятой в плоскости действия пары, не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары.

**Доказательство.** Пусть на абсолютно твердое тело действует пара сил  $(\bar{F}, \bar{F}'')$ , плечо которой равно  $h$  (рис. 2-37). В плоскости действия пары возьмем какую-нибудь точку  $O$  и относительно нее найдем моменты сил пары, тогда

$$m_O \bar{F} = F \cdot H; m_O \bar{F}'' = -F''(H-h) = -F(H-h).$$

Сложив левые и правые части этих равенств, найдем, что

$$m_0 \bar{F} + m_0 \bar{F}'' = F \cdot h.$$

С другой стороны, по определению  $m(\bar{F}, \bar{F}'') = Fh$ , следовательно,

$$m(\bar{F}, \bar{F}'') = m_0 \bar{F} + m_0 \bar{F}'',$$

что и требовалось доказать.

Отсюда видно, что характерным элементом пары, определяющим ее действие на тело, является момент пары.

**Теорема об эквивалентных парах.** Две пары, моменты которых равны между собой (то есть равны по величине и одинаковы по знаку), эквивалентны.

*Доказательство.* Пусть на тело действуют две пары

$$(\bar{F}, \bar{F}''), (\bar{P}, \bar{P}''),$$

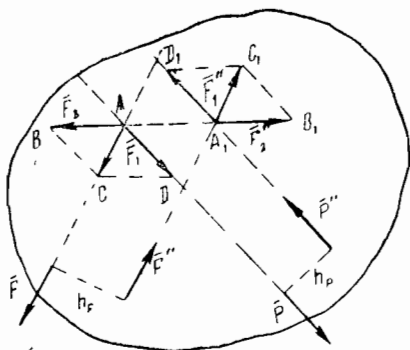


Рис. 2-38

лежащие в одной плоскости и имеющие равные по величине и одинаковые по знаку моменты

$$m(\bar{F}, \bar{F}'') = m(\bar{P}, \bar{P}'')$$

или  $F \cdot h_F = Ph_P$ , где  $h_F$  и  $h_P$  — плечи данных пар. Требуется доказать, что  $(\bar{F}, \bar{F}'') \sim (\bar{P}, \bar{P}'')$ . Перенесем силы  $\bar{F}$ ,  $\bar{F}''$  по линиям их действия соответственно в точки  $A$  и  $A_1$ , являющиеся точками пересечения линий действия сил  $\bar{F}$  и  $\bar{P}$ ,  $\bar{F}''$  и  $\bar{P}''$ , и каждую из них разложим по направлениям, указанным на рис. 2.38. Здесь силы  $\bar{F}_2$  и  $\bar{F}_2''$  на-

правлены по прямой  $AA_1$ . Тогда данная пара будет эквивалентна паре  $(\bar{F}_1, \bar{F}_1')$ , ибо  $(\bar{F}_2, \bar{F}_2') \sim 0$

и  $(\bar{F}, \bar{F}') \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_1', \bar{F}_2, \bar{F}_2') \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_1')$ .

Покажем, что силы  $\bar{F}_1 = \bar{P}$  и  $\bar{F}_1' = \bar{P}'$  и, следовательно, тем самым докажем нашу теорему.

Из подобия треугольников  $ACD$  и  $AA_1D_1$  следует

$$\frac{F_1}{F} = \frac{A_1D_1}{AD}.$$

Учитывая далее, что высоты  $h_F$  и  $h_P$  треугольника  $AA_1D_1$  обратно пропорциональны основаниям, получим

$$\frac{F_1}{F} = \frac{h_F}{h_P}; \quad Fh_F = F_1h_P.$$

Теперь из условия  $Fh_F = Ph_P$  находим

$$Fh_F = Ph_P = F_1h_P.$$

Откуда  $F_1 = P$  и аналогично  $F_1' = P'$ .

Следовательно,

$$\bar{F}_1 = \bar{P}; \quad \bar{F}_1' = \bar{P}'$$

и

$$(\bar{F}, \bar{F}') \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_1') \sim (\bar{P}, \bar{P}'),$$

то есть пары  $(\bar{F}, \bar{F}')$  и  $(\bar{P}, \bar{P}')$  эквивалентны.

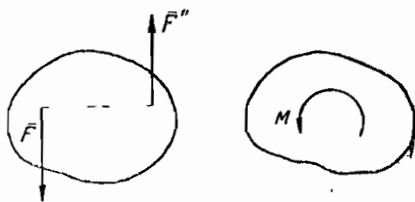


Рис. 2-39

Из этой теоремы следуют такие очевидные следствия: пару сил можно перенести в любое место плоскости ее действия, повернуть на любой угол и изменить плечо и величину сил пары, сохраняя при этом момент пары.

В связи с доказанным свойством пары сил мы в дальнейшем будем часто условно изображать пару сил на плоскости в виде дуги со стрелкой, как показано на рис. 2-39. Стрелка

указывает направление вращения пары, а  $M$ —величину момента пары

$$M = |m(\bar{F}, \bar{F}'')| = F \cdot h$$

**Теорема.** Пара сил не имеет равнодействующей и не может быть уравновешена одной силой, лежащей в плоскости пары.

*Доказательство.* Предположим, что данная пара  $(\bar{F}, \bar{F}'')$  имеет равнодействующую  $\bar{R}$  и уравновешивается силой  $\bar{R}' = -\bar{R}$ , тогда, заменяя эту пару эквивалентной парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ , получим плоскую систему трех непараллельных сил  $\bar{P}$ ,  $\bar{P}''$  и  $\bar{R}'$  (рис. 2-40), линии действия которых не пересекаются в од-

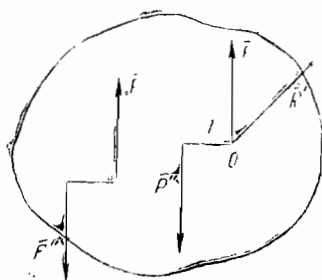


Рис. 2-40

ной точке, и находящуюся в равновесии, что противоречит следствию 2, гл. I.

Следовательно, пара сил не может быть уравновешена силой  $\bar{R}'$ , лежащей в плоскости действия пары, и не может быть заменена равнодействующей.

#### § 4. Сложение и условие равновесия системы пар на плоскости

а) Теорема о сложении пар, лежащих в одной плоскости. Систему пар, как угодно расположенных в одной плоскости, можно заменить одной парой, момент которой равен сумме моментов данных пар. Эту теорему сначала докажем для двух пар, а затем обобщим на случай любого числа пар.

Пусть на абсолютно твердом теле действуют две пары  $(\bar{F}_1, \bar{F}_1')$  и  $(\bar{F}_2, \bar{F}_2')$  (рис. 2-41). Эти пары заменим со-

ответственно парами  $(\bar{P}_1, \bar{P}_1')$  и  $(\bar{P}_2, \bar{P}_2')$  с общим плечом  $H$  и с моментами, соответственно равными моментам данных пар (рис. 2-41), тогда

$$m(\bar{P}_1, \bar{P}_1') = m(\bar{F}_1, \bar{F}_1'); \quad m(\bar{P}_2, \bar{P}_2') = m(\bar{F}_2, \bar{F}_2'). \quad (2-6)$$

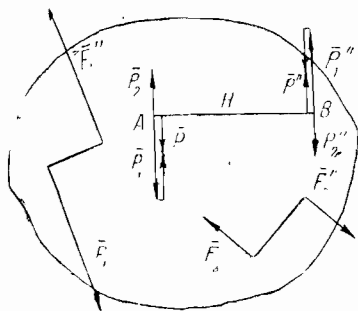


Рис. 2-41

Отсюда, согласно доказанной теореме об эквивалентных парах, имеем

$$(\bar{P}_1, \bar{P}_1') \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_1'); \quad (\bar{P}_2, \bar{P}_2') \sim (\bar{F}_2, \bar{F}_2').$$

Силы  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$  можно заменить одной силой, приложенной в точке A и равной

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2,$$

силы  $\bar{P}_1'$  и  $\bar{P}_2'$  можно заменить одной силой

$$\bar{P}'' = \bar{P}_1' + \bar{P}_2',$$

приложенной в точке B. Эти силы образуют пару сил  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ , ибо  $\bar{P} = -\bar{P}''$ .

Полагая  $P_1 > P_2$ , найдем величины этих сил

$$P = P_1 - P_2; \quad P'' = P_1' - P_2' = P.$$

Таким образом, данная система двух пар эквивалентна одной паре  $(\bar{P}, \bar{P}'')$

$$\{(\bar{F}_1, \bar{F}_1'); (\bar{F}_2, \bar{F}_2')\} \sim (\bar{P}, \bar{P}'').$$

Момент этой пары равен

$$\begin{aligned} m(\bar{P}, \bar{P}'') &= P \cdot H = P_1 H - P_2 H = \\ &= m(\bar{P}_1, \bar{P}_1') + m(\bar{P}_2, \bar{P}_2'). \end{aligned}$$

Откуда, учитывая равенства (2-6), окончательно получим

$$m(\bar{P}, \bar{P}'') = m(\bar{F}_1, \bar{F}_1'') + m(\bar{F}_2, \bar{F}_2''),$$

то есть момент пары  $(\bar{P}, \bar{P}'')$  равен сумме моментов данных пар.

Если на абсолютно твердое тело действует  $n$  пар, лежащих в одной плоскости, то, применяя последовательно доказанную теорему для двух пар, мы получим, что данная система пар эквивалентна одной паре  $(\bar{P}, \bar{P}'')$

$$\{(\bar{F}_1, \bar{F}_1''), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}_n'')\} \sim (\bar{P}, \bar{P}'')$$

и ее момент равен сумме моментов данных пар

$$m(\bar{P}, \bar{P}'') = m(\bar{F}_1, \bar{F}_1'') + \dots + \\ + m(\bar{F}_n, \bar{F}_n'') = \sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}_k'').$$

б) Теорема о равновесии системы пар на плоскости. Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием системы пар, как угодно расположенных в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех пар была равна нулю, то есть

$$\sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}_k'') = 0. \quad (2-7)$$

*Доказательство.* Заменяем систему пар эквивалентной парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ , момент которой равен

$$m(\bar{P}, \bar{P}'') = \sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}_k'').$$

Для того чтобы тело находилось в состоянии покоя под действием системы пар, необходимо и достаточно, чтобы  $(\bar{P}, \bar{P}'') \sim 0$  или иначе, чтобы  $m(\bar{P}, \bar{P}'') = 0$ , откуда следует уравнение (2-7).

## § 5. Произвольная плоская система сил

Изучение произвольной плоской системы сил начнем с доказательства леммы о переносе силы (лемма Пуансо). Силу  $\bar{F}$ , приложенную к абсолютно твердому телу, можно перенести параллельно самой себе в любую точку  $O$  тела, добав-

ляя при этом пару, момент которой равен моменту силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ .

*Доказательство.* Пусть к точке  $A$  абсолютно твердого тела приложена сила  $\vec{F}$  (рис. 2-42). Возьмем в этом теле про-

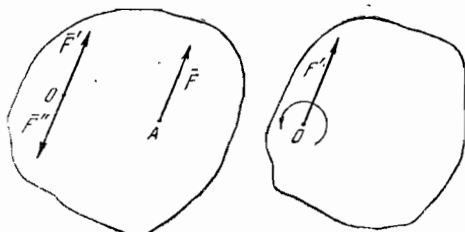


Рис. 2-42

извольную точку  $O$  и к ней приложим две равные и противоположно направленные силы  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$  и по величине равные данной силе  $\vec{F}$ , то есть

$$\vec{F}' = \vec{F} = -\vec{F}''.$$

От приложения таких сил состояние абсолютно твердого тела не изменится, что следует из второй аксиомы статики.

Тогда

$$(\vec{F}', \vec{F}'', \vec{F}) \sim \vec{F}.$$

С другой стороны, эту систему трех сил можно представить себе, состоящей из силы  $\vec{F}'$  и пары  $(F, F'')$ , то есть

$$\vec{F} \sim \{\vec{F}', (\vec{F}, \vec{F}'')\},$$

причем

$$M = m(\vec{F}, \vec{F}'') = m_0 \vec{F} + m_0 \vec{F}'' = m_0 \vec{F},$$

так как сила  $\vec{F}''$  приложена в точке  $O$  и ее момент относительно этой точки равен нулю. Из двух последних равенств видно, что сила  $\vec{F}$ , приложенная в точке  $A$ , абсолютно твердого тела эквивалентна такой же по величине и направлению силе  $\vec{F}'$ , приложенной в точке  $O$ , и паре, момент которой равен моменту силы  $\vec{F}$ , приложенной в точке  $A$  относительно точки  $O$ , что и доказывает лемму Пуансо.

а) Приведение плоской системы сил к данному центру.



**Теорема.** Произвольную плоскую систему сил можно заменить одной силой  $\bar{R}$ , приложенной в произвольной точке  $O$  плоскости, равной геометрической сумме этих сил и парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ , момент которой равен алгебраической сумме моментов всех данных сил относительно той же точки  $O$ .

*Доказательство.* Представим себе абсолютно твердое тело, на которое действует произвольная плоская система сил

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n). \quad (\text{рис. 2.43})$$

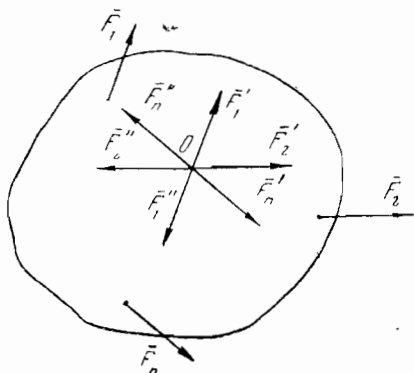


Рис. 2-43

Все силы этой системы перенесем параллельно самим себе в любую точку  $O$ , взятую в плоскости действия этих сил, добавив при этом пары, согласно доказанной лемме (рис. 2-43).

Тогда

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim \{\bar{F}_1', \dots, \bar{F}_n', (\bar{F}_1, \bar{F}_1''), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}_n'')\}.$$

Здесь

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k' = -\bar{F}_k''.$$

Систему сходящихся сил  $(\bar{F}_1', \bar{F}_2', \dots, \bar{F}_n')$  заменим одной силой  $\bar{R} \sim (\bar{F}_1', \dots, \bar{F}_n')$ , приложенной в точке  $O$  и равной их геометрической сумме (см. § 1)

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k' = \sum \bar{F}_k.$$

Систему пар  $\{(\bar{F}_1, \bar{F}_1''), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}_n'')\}$  по теореме о сложении пар заменим одной парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ , момент кото-

рой равен алгебраической сумме моментов данных пар, то есть

$$(\bar{P}, \bar{P}'') \sim \{(\bar{F}_1, \bar{F}_1''), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}_n'')\};$$

$$m(\bar{P}, \bar{P}'') = \sum_{\kappa=1}^n m(\bar{F}_\kappa, \bar{F}_\kappa'').$$

Сумму  $\sum_{\kappa=1}^n m(\bar{F}_\kappa, \bar{F}_\kappa'')$  по теореме о моментах сил пары преобразуем к другому, более простому виду, а именно:

$$\begin{aligned} m(\bar{P}, \bar{P}'') &= \sum_{\kappa=1}^n m(\bar{F}_\kappa, \bar{F}_\kappa'') = \\ &= \sum_{\kappa=1}^n |m_0 \bar{F}_\kappa + m_0 \bar{F}_\kappa''| = \sum m_0 \bar{F}. \end{aligned}$$

Здесь  $\sum_{\kappa=1}^n m_0 \bar{F}_\kappa'' = 0$ , так как силы  $\bar{F}_\kappa''$  приложены в точке  $O$ .

Таким образом

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim \{\bar{R}, (\bar{P}, \bar{P}'')\},$$

где

$$\bar{R} = \sum \bar{F}; \quad M_0 = m(\bar{P}, \bar{P}'') = \sum m_0 \bar{F}, \quad (1)$$

и теорема доказана.

Вектор  $\bar{R}$ , равный геометрической сумме векторов данных сил, называют главным вектором этой системы сил. Момент  $M_0$  пары  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ , равный сумме моментов данных сил относительно точки  $O$ , называют главным моментом системы сил. Замена системы сил результирующей силой  $\bar{R}$ , приложенной к точке  $O$  и парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$  с моментом  $M_0$ , называется приведением системы сил к данному центру  $O$ , а точка  $O$  называется центром приведения. Заметим, что первое уравнение системы  $\bar{R} = \sum \bar{F}$  векторное, а второе

$$M_0 = m(\bar{P}, \bar{P}'') = \sum m_0 (\bar{F}) - \text{скалярное.}$$

Проектируя обе части первого (векторного) уравнения системы  $\bar{R} = \Sigma \bar{F}$  на оси координат, получим

$$R_x = \Sigma x;$$

$$R_y = \Sigma y;$$

$$M_0 = m(\bar{P}, \bar{P}'') = \Sigma m_0 \bar{F} \quad (I')$$

Скалярные уравнения (I') эквивалентны системе уравнений (I).

б) Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

**Теорема.** Для того чтобы свободное абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этих сил относительно произвольно выбранной точки плоскости были равны нулю

$$\bar{R} = \Sigma \bar{F} = 0, \quad M_0 = \Sigma m_0 \bar{F} = 0. \quad (II)$$

*Доказательство.* Приведем систему сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  к выбранному центру  $O$ , то есть заменим ее силой  $\bar{R} = \Sigma \bar{F}$ , приложенной к точке  $O$ , и парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$  с моментом  $M_0 = \Sigma m_0 \bar{F}$

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim \{\bar{R}, (\bar{P}, \bar{P}'')\}.$$

Для того чтобы тело находилось в состоянии покоя, достаточно, чтобы главный вектор  $\bar{R} = 0$  и главный момент  $M_0 = m(\bar{P}, \bar{P}'') = 0$ , ибо в этом случае  $\bar{R} \sim 0$ ,  $(\bar{P}, \bar{P}'') \sim 0$ , то есть система сил в равновесии. Эти условия являются также необходимыми для равновесия системы сил, ибо пара сил  $(\bar{P}, \bar{P}'')$  не может уравновешиваться силой  $\bar{R}$ , лежащей в плоскости пары, откуда следует, что необходимо, чтобы

$$\bar{R} \sim 0 \text{ и } (\bar{P}, \bar{P}'') \sim 0$$

или

$$\bar{R} = 0, \quad M_0 = m(\bar{P}, \bar{P}'') = 0$$

Теорема доказана.

Первое уравнение системы  $\bar{R} = 0$  векторное, а второе  $M_0 = 0$  — скалярное. Система уравнений (II) эквивалентна системе уравнений (II')

$$\begin{aligned}\sum X &= 0, \\ \sum Y &= 0, \\ \sum m_0 \bar{F} &= 0.\end{aligned}\quad (\text{II}')$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

**Теорема.** Для того чтобы свободное абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно произвольной точки  $O$  плоскости действия сил были равны нулю.

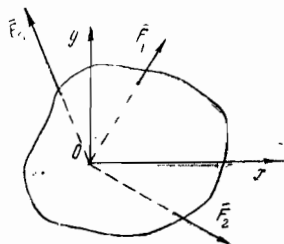


Рис. 2-44

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) *Плоская система сходящихся сил.* Пусть свободное абсолютно твердое тело находится в состоянии покоя под действием плоской системы сходящихся сил. Возьмем точку  $O$  пересечения линий действия сил (рис. 2-44) за центр моментов. Тогда момент каждой силы, этой системы относительно центра моментов будет равен нулю и уравнение

$$\sum m_0 \bar{F} = 0$$

обратится в тождество вида  $0 + 0 + \dots + 0 = 0$ , то есть

$$\sum m_0 \bar{F} \equiv 0.$$

Следовательно, для плоской системы сходящихся сил получим два уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\sum X &= 0, \\ \sum Y &= 0,\end{aligned}$$

полученные ранее.

2) *Плоская система параллельных сил.* Если линии действия сил, лежащих в одной плоскости, параллельны между собой, то система сил называется плоской системой параллельных сил.

Направим одну из координатных осей (например, ось  $y$  параллельно силам этой системы, под действием которой свободное абсолютно твердое тело находится в состоянии покоя (рис. 2-45).

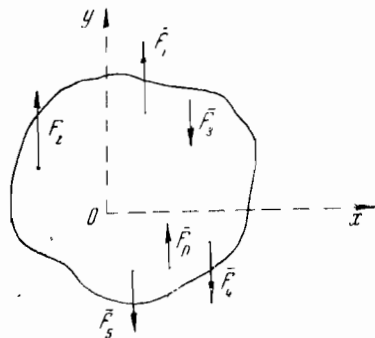


Рис. 2-45

Тогда проекция каждой из этих сил на ось  $Ox$  будет равна нулю, вследствие чего уравнение  $\Sigma X=0$  обратится в тождество вида  $\Sigma X \equiv 0$ , и для плоской системы параллельных сил получим следующие два уравнения равновесия

$$\Sigma Y = 0, \quad \Sigma m_0 \bar{F} = 0.$$

**Примечания 2-2, относящиеся к решению задач статики**

1<sup>0</sup>. Если искомая реакция не известна ни по величине ни по направлению, рекомендуется разложить ее на составляющие параллельно осям координат, это упрощает составление уравнений равновесия.

2<sup>0</sup>. За центр моментов, относительно которого составляется уравнение моментов, рекомендуется взять точку пересечения линий действия возможно большего числа неизвестных реакций, ибо тогда моменты этих реакций будут равны нулю и уравнение моментов упрощается.

3<sup>0</sup>. Если к телу приложена пара сил, то, как известно, сумма моментов сил пары относительно произвольной точки равна моменту  $M$  пары сил. Этим замечанием следует пользоваться при составлении уравнений моментов.

4<sup>0</sup>. Если в результате решения уравнений равновесия для искомой величины реакции найдено значение со знаком плюс, то это означает, что направление реакции выбрано правильно, если же для величины искомой реакции найдено значение со знаком минус, то это означает, что направление реакции

должно быть изменено на прямо противоположное. В самом деле, если при составлении уравнений равновесия рассматривать величины  $X_A, Y_A, N_B, \dots$  как модули соответствующих реакций  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{N}_B, \dots$ , то если для этих величин найдены положительные значения, это означает, что направления этих реакций выбраны правильно.

Если же для модулей  $X_A, Y_A, N_B, \dots$  и т. д. найдены значения со знаком минус, то это означает, что направления реакций надо изменить на прямо противоположные потому, что при этом для указанных величин  $X_A, Y_B, \dots$  будут получены положительные значения.

**Задача 2-6.** К гладкой стене приставлена однородная лестница  $AB$  под углом  $45^\circ$  к горизонту, вес лестницы  $20 \text{ кг}$ ; в точке  $D$  на расстоянии, равном  $\frac{1}{3}$  длины лестницы от нижнего конца, находится человек весом  $60 \text{ кг}$ . Найти давление лестницы на опору  $A$  и на стену (рис. 2-46).

**Решение.**

1) *Освобождение от связей* (первый шаг). Реакции пола и выступа, действующие на лестницу в точке  $A$ , будут направ-

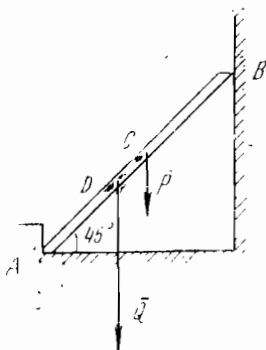


Рис. 2-46

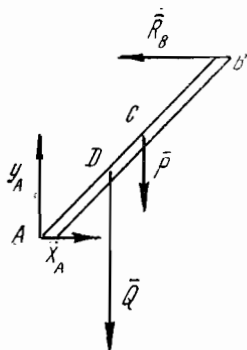


Рис. 2-47

лены по нормали к полу и выступу. Эти составляющие силы полной реакции в точке  $A$  соответственно обозначим через  $X_A$  и  $Y_B$  (рис. 2-47).

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем тело как абсолютно твердое.

3) *Равновесие* (третий шаг). На лестницу действует произвольная плоская система сил, следовательно, необходимо и

достаточно, чтобы эти силы удовлетворяли следующим трем уравнениям равновесия

$$\sum X = X_A - R_B = 0,$$

$$\sum Y = Y_A - P - Q = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum m_A \bar{F} = & -Q \frac{AB}{3} \cos 45^\circ - P \frac{AB}{2} \cos 45^\circ + \\ & + R_B AB \cos 45^\circ = 0. \end{aligned}$$

За центр моментов взята точка  $A$ , ибо она является точкой пересечения линий действия неизвестных реакций. Отсюда

$$X_A = 30 \text{ кг}, \quad Y_A = 80 \text{ кг}, \quad R_B = 30 \text{ кг}.$$

Так как значения искомых величин  $X_A$ ,  $Y_A$  и  $R_B$  найдены со знаком плюс, то это означает, что направление реакций выбрано правильно.

Мы нашли силы, с которыми выступ и стена действуют на лестницу. По условию задачи требуется определить силы, с которыми лестница действует на выступ и стену. Очевидно, они будут равны по величине найденным, но приложены будут к выступу и стене и направлены в противоположные им стороны. Решение задачи ограничивают обычно только отысканием составляющих неизвестной силы.

## § 6. Возможные случаи приведения произвольной плоской системы сил

Произвольную плоскую систему сил, как было показано, можно заменить силой  $\bar{R}$ , приложенной в выбранной точке  $O$  и парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim \{\bar{R}, (\bar{P}, \bar{P}'')\},$$

где

$$\bar{R} = \sum \bar{F}; \quad M_o = m(\bar{P}, \bar{P}'') = \sum m_o \bar{F}.$$

При этом возможны следующие случаи:

1°. а) Главный вектор  $\bar{R} \neq 0$ , а главный момент  $M_o = 0$ ; тогда  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim \bar{R}$  и система сил приводится к одной силе  $\bar{R}$ , приложенной в точке  $O$ , которая в этом случае называется равнодействующей.

б) Главный вектор  $\bar{R} \neq 0$  и главный момент  $M_0 \neq 0$  (рис. 2-48).

Покажем, что и в этом случае система сил приводится к одной равнодействующей силе  $R$ , но приложенной не

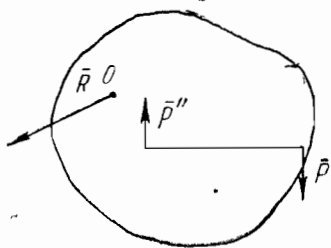


Рис. 2-48

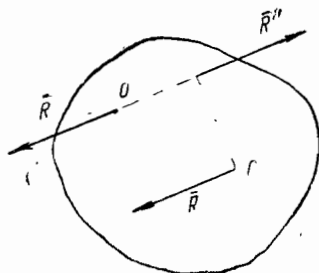


Рис. 2-49

в точке приведения  $O$ , а в некоторой другой точке  $C$ , относительно которой главный момент равен нулю

$$M_c = 0.$$

Заменим пару сил  $(\bar{P}, \bar{P}'')$  эквивалентной парой  $(\bar{R}', \bar{R}'')$  так, чтобы сила  $\bar{R}''$  уравновешивалась силой  $\bar{R}$  (рис. 2-49)

$$\bar{R} = \bar{R}' = -\bar{R}''.$$

Тогда получим

$$\{\bar{R}, (\bar{P}, \bar{P}'')\} \sim \{\bar{R}, (\bar{R}', \bar{R}'')\} \sim \bar{R}',$$

ибо

$$(\bar{R}, \bar{R}'') \sim 0.$$

Таким образом, система сил эквивалентна равнодействующей  $\bar{R}'$ , приложенной в точке  $C$ .

Если выбрать за центр приведения точку  $C$ , то система сил приведет к равнодействующей  $\bar{R}$  и главный момент относительно точки  $C$  будет равен нулю

$$M_c = 0.$$

2°. Главный вектор  $\bar{R} = 0$ , а главный момент  $M_0 \neq 0$ , тогда  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim (\bar{P}, \bar{P}'')$  и система сил приводится к паре с моментом  $M_0$ .

3°. Главный вектор  $\bar{R} = 0$  и главный момент  $M_0 = 0$ , тогда система сил находится в равновесии  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim 0$ ,



а свободное абсолютно твердое тело находится в состоянии покоя.

Таким образом, мы приходим к выводу: произвольная плоская система сил либо приводится к равнодействующей, либо к паре сил, либо находится в равновесии.

В случае, когда плоская система сил приводится к равнодействующей, имеет место теорема Вариньона.

**Теорема Вариньона.** Если система сил на плоскости эквивалентна равнодействующей, то момент равнодействующей относительно произвольной точки плоскости равен сумме моментов всех сил относительно той же точки.

**Доказательство.** Если система сил  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\}$  приводится к равнодействующей  $\bar{R}$ , приложенной к некоторой точке  $A$ , то она уравнивается силой  $\bar{R}' = -\bar{R}$  и приложенной в той же точке  $A$ .

Таким образом, система сил  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'\}$  находится в равновесии и сумма моментов этих сил относительно произвольной точки  $O$  плоскости равна нулю

$$m_0 \bar{F}_1 + \dots + m_0 \bar{F}_n + m_0 \bar{R}' = 0.$$

Откуда, учитывая, что

$$m_0 \bar{R}' = -m_0 \bar{R},$$

получим окончательно

$$m_0 \bar{R} = m_0 \bar{F}_1 + \dots + m_0 \bar{F}_n = \sum m_0 \bar{F}.$$

Пример. В качестве примера на приведение системы сил рассмотрим задачу о сложении двух параллельных сил.

1) *Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону.* Пусть на абсолютно твердое тело действуют две параллельные силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , направленные в одну сторону (рис. 2-50). Эту систему двух сил можно заменить силой и парой, выбрав за центр приведения произвольную точку  $O$

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \{\bar{R}, (\bar{P}, \bar{P}'')\},$$

где

$$\bar{R} = \sum \bar{F}.$$

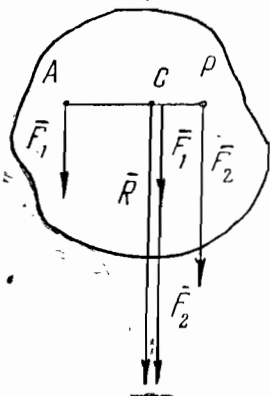


Рис. 2-50

Причем для нашего случая

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2;$$

$$M_0 = m(\bar{P}, \bar{P}'') = \sum m_0 \bar{F} = m_0 \bar{F}_1 + m_0 \bar{F}_2.$$

Отсюда видим, что главный вектор  $\bar{R}$  не равен нулю, следовательно, эта система сил приводится к одной равнодействующей силе  $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ , параллельной данным, направленной в ту же сторону и по величине, равной  $R = F_1 + F_2$  и приложенной в точке  $C$ , относительно которой главный момент

$$M_c = m_c \bar{F}_1 + m_c \bar{F}_2 = 0.$$

Эта сумма моментов будет равна нулю только в том случае, когда они будут разных знаков, что возможно только в случае, когда точка  $C$  будет лежать между линиями действия сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , например, внутри отрезка  $AB$ . Ее положение на этом отрезке найдем из уравнения

$$M_c = m_c \bar{F}_1 + m_c \bar{F}_2 = F_1 \cdot AC - F_2 \cdot BC = 0.$$

Таким образом,

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \bar{R}; \quad \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2; \quad R = F_1 + F_2$$

и

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Две параллельные силы, направленные в одну сторону, приводятся к одной равнодействующей силе, им параллельной и направленной в ту же сторону; величина равнодействующей равна сумме величин данных сил, а точка ее приложения делит расстояние между линиями действия сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные величинам этих сил.

Точку  $C$  можно было бы найти и из теоремы Вариньона. В самом деле, взяв момент равнодействующей относительно точки  $C$ ; лежащей на линии ее действия, найдем

$$m_c \bar{R} = m_c \bar{F}_1 + m_c \bar{F}_2 = 0$$

или

$$F_1 \cdot AC - F_2 \cdot BC = 0,$$

откуда определяется положение точки  $C$ .

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}$$

2) Сложение двух не равных по величине параллельных сил, направленных в противоположные стороны. Пусть к телу приложены две не равные по величине параллельные силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , причем  $F_1 > F_2$  (рис. 2-51). Здесь главный вектор равен  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , и его величина  $R = F_1 - F_2$  отлична от нуля, следовательно, система сил приводится к одной равнодействующей силе  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , параллельной данным силам, направленной в сторону большей силы и приложенной в некоторой точке  $C$  (рис. 2-51). Величина равнодействующей равна  $R = F_1 - F_2$  разности величин этих сил и приложена в точке  $C$ , которая будет теперь лежать вне отрезка  $AB$ , слева от точки приложения большей силы, ибо только относительно такой точки моменты данных сил будут иметь не только разные знаки, но и равные по величине моменты

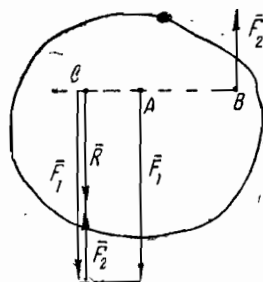


Рис. 2-51

$$M_c = m_c \vec{F}_1 + m_c \vec{F}_2 = -F_1 \cdot AC + F_2 \cdot BC = 0,$$

откуда

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC},$$

то есть точка  $C$  делит расстояние между линиями действия сил *внешним* образом на части, обратно пропорциональные величинам этих сил. Отсюда приходим к следующему выводу.

Две не равные по величине антипараллельные силы приводятся к одной равнодействующей силе им параллельной и направленной в сторону большей силы; величина равнодействующей равна разности величин данных сил, а точка ее приложения делит расстояние между линиями действия сил *внешним* образом на части, обратно пропорциональные величинам этих сил. Далее из равенства

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}$$

находим

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB,$$

где

$$F_1 - F_2 = R.$$

Отсюда видно, что когда величина одной из этих сил стремится к величине другой силы, то равнодействующая этих сил стремится к нулю, а точка ее приложения удаляется в бесконечность. В результате мы приходим к заключению, что равные антипараллельные силы не имеют равнодействующей. Система двух таких сил образует пару сил, следовательно, мы приходим другим путем к ранее доказанной теореме: пара сил не имеет равнодействующей.

### § 7. Различные виды уравнений равновесия плоской системы сил

Выше было доказано, что уравнения

1.  $\sum X = 0,$
2.  $\sum Y = 0,$  (2-8)
3.  $\sum m_0 \bar{F} = 0$

являются необходимыми и достаточными условиями равновесия плоской системы сил. Уравнения (2-8) мы будем называть первой формой уравнений равновесия. Отметим, что на выбор осей координат  $x$  и  $y$  и центра моментов  $O$  не наложено никаких ограничений. Наряду с первой формой используются также еще две другие формы уравнений равновесия.

**Теорема.** Для того, чтобы абсолютно твердое тело под действием плоской системы сил находилось в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на какую-либо ось была равна нулю и чтобы сумма моментов всех сил относительно каждой из двух точек, лежащих на линии, не перпендикулярной к выбранной оси, была равна нулю

1.  $\sum X = 0,$
2.  $\sum m_A \bar{F} = 0,$   $AB$  не  $\perp Ox$ . (2-9)
3.  $\sum m_B \bar{F} = 0,$

*Доказательство.* Докажем сперва, что условия (2-9) являются необходимыми для равновесия плоской системы сил, то есть если силы находятся в равновесии, то они удовлетворяют уравнениям (2-9). В самом деле, для того чтобы плоская система сил находилась в равновесии, необходимо,

чтобы силы удовлетворяли уравнениям (2-8), где за центр моментов  $O$  можно брать любую точку плоскости. Беря последовательно за центр моментов в 3-м уравнении (2-8) точки  $A$  и  $B$ , получим уравнения (2-9).

Докажем теперь обратное предложение, что условия (2-9) при наложенном ограничении ( $AB$  не  $\perp OX$ ) являются достаточными для равновесия плоской системы сил, то есть если система сил удовлетворяет условиям (2-9), то она находится в равновесии.

Выберем точку  $A$  за центр приведения. Тогда главный момент  $M_A = \sum m_A F = 0$  и система сил приводится к равнодействующей  $\bar{R}$ , приложенной в точке  $A$ . По теореме Вариньона с учетом (2-9) имеем

$$m_B \bar{R} = \sum m_B \bar{F} = 0,$$

откуда следует, что линия действия равнодействующей проходит также через точку  $B$  (рис. 2-52). Найдем теперь величину равнодействующей  $\bar{R}$ . Из рис. 2-52 видно, что проекция равнодействующей на ось  $Ox$  равна

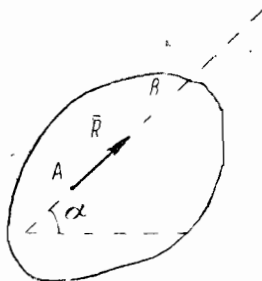


Рис. 2-52

$$R_x = R \cdot \cos \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

и из 1-го уравнения (2-9) следует, что

$$R_x = \sum X = 0.$$

Откуда находим

$$R \cos \alpha = 0,$$

и так как по условию  $\cos \alpha \neq 0$ , то, следовательно,  $R = 0$ .

Таким образом, мы доказали, что из условий (2-9) при наложенном ограничении ( $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ) следует, что система сил эквивалентна равнодействующей  $\bar{R} = 0$ , то есть система сил находится в равновесии. Система уравнений (2-9) называется второй формой уравнений равновесия плоской системы сил.

Примечание. Если не выполнено наложенное ограничение ( $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ), то условия (2-9) не являются достаточными

для равновесия системы сил, и теорема не верна. Например, если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (рис. 2-52), то система, состоящая из одной силы  $\bar{R}$ , удовлетворяет всем трем уравнениям (2-9), однако тело под действием одной силы  $\bar{R}$  не будет находиться в состоянии покоя.

Рассмотрим теперь третью форму уравнений равновесия.

**Теорема.** Для того чтобы абсолютно твердое тело под действием плоской системы сил находилось в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно каждой из трех точек, не лежащих на одной прямой, была равна нулю

$$\begin{aligned} \sum m_A \bar{F} &= 0, \\ \sum m_B \bar{F} &= 0, \\ \sum m_C \bar{F} &= 0. \end{aligned} \quad (2-10)$$

Точки  $A, B, C$  не лежат на одной прямой.

*Доказательство.* Докажем сперва, что для равновесия плоской системы сил необходимо, чтобы силы удовлетворяли уравнениям (2-10). Действительно, если система сил находится в равновесии, то силы удовлетворяют 3-му уравнению (2-8), где за центр моментов  $O$  можно взять любую точку плоскости. Беря последовательно за центр моментов точки  $A, B$  и  $C$ , получим уравнения (2-10).

Докажем теперь, что условия (2-10) при наложенном ограничении являются достаточными для равновесия плоской системы сил. Выберем за центр проведения точку  $A$ , тогда

$$M_A = \sum m_A \bar{F} = 0$$

и система сил приводится к равнодействующей  $\bar{R}$ , приложенной к точке  $A$ . По теореме Вариньона с учетом уравнений (2-10) получим

$$m_B \bar{R} = \sum m_B \bar{F} = 0;$$

$$m_C \bar{R} = \sum m_C \bar{F} = 0.$$

Отсюда следует, что линия действия равнодействующей  $\bar{R}$  проходит через три точки  $A, B$  и  $C$ , не лежащие на одной прямой, чего не может быть, если  $\bar{R} \neq 0$ .

Следовательно, остается предположить, что система сил эквивалентна равнодействующей  $\bar{R}=0$ , то есть система сил находится в равновесии. Система уравнений (2-10) называется 3-й формой уравнений равновесия плоской системы сил.

Примечание. Если не соблюдено наложенное ограничение на выбор точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , то теорема не верна. Например, если к телу приложена система, состоящая из одной силы  $\bar{R}$ , линия действия которой проходит через 3 точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , лежащих на одной прямой, то сила  $\bar{R}$  удовлетворяет трем уравнениям (2-10), однако тело не будет находиться в состоянии покоя.

## § 8. Статически определенные и статически неопределенные задачи

Определение 1. Если все неизвестные величины могут быть найдены методами статики, то задача называется статически определенной, а система тел называется статически определимой.

Определение 2. Если не все неизвестные величины могут быть найдены методами статики, то задача называется статически неопределенной, а система тел статически неопределимой.

Можно дать следующий простой критерий для установления статической определенности или неопределенности данной задачи. Если несвободная система состоит из  $n$  тел, то, расчлняя ее на отдельные тела и составляя для каждого тела 3 уравнения равновесия, получим  $3n$  уравнений равновесия.

Когда число неизвестных равно  $3n$ , то задача статически определенная, если из полученных  $3n$  уравнений равновесия могут быть найдены все неизвестные.

Если число неизвестных больше  $3n$ , то задача статически неопределенная, ибо не все неизвестные могут быть определены из уравнений равновесия. Если задача статически неопределенная, то для нахождения неизвестных необходимы дополнительные соотношения между неизвестными, устанавливаемые путем введения дополнительных гипотез.

Рассмотрим следующие примеры.

**Задача 2-7.** Балка  $AB$  лежит на двух опорах; опора в точке  $A$  — шарнирная, в точке  $B$  — на катках (рис. 2-53). К балке приложена сила  $\bar{P}$  и пара с моментом  $M$ . Найти реакции в точках  $A$  и  $B$ . Размеры указаны на рис. 2-53.

### Решение.

1) Освобождение от внешних связей (первый шаг). Освободимся от внешних связей и заменим их реакциями связей. Неизвестную реакцию в точке  $A$  разложим на составляющие

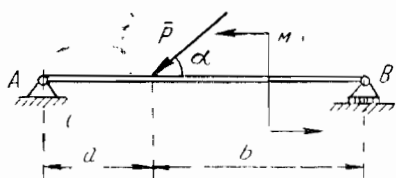


Рис. 2-53

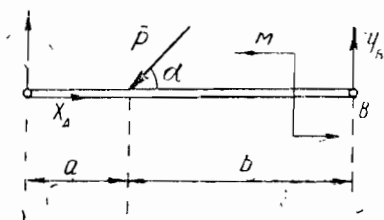


Рис. 2-54

$X_A$  и  $Y_A$ , а реакция  $Y_B$  в точке  $B$  направлена по нормали к поверхности (рис. 2-54).

2) Расчленение (второй шаг). Рассматриваем балку как абсолютно твердое тело.

3) Равновесие (третий шаг). Для определения искомых реакций применим вторую форму уравнений равновесия

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0, \\ \Sigma m_A \bar{F} &= 0, \quad AB \text{ не } \perp O_x. \\ \Sigma m_B \bar{F} &= 0.\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}\Sigma X &= X_A - P \cos \alpha = 0, \\ \Sigma m_A \bar{F} &= Y_B (a + b) - P a \sin \alpha + M = 0, \\ \Sigma m_B \bar{F} &= -Y_A (a + b) + P b \sin \alpha + M = 0.\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}X_A &= P \cos \alpha, \\ Y_A &= \frac{Pb \cdot \sin \alpha + M}{a + b}, \\ Y_B &= \frac{Pa \sin \alpha - M}{a + b}.\end{aligned}$$

Из полученного решения задачи видно, что значения реакций  $X_A$  и  $Y_A$  положительные и, следовательно, направления этих реакций выбраны правильно, а реакция  $Y_B$  направлена вверх, если  $Pa \sin \alpha - M > 0$ , и вниз, если  $Pa \sin \alpha - M < 0$ . Рассматриваемая задача статически определенная, ибо число неизвестных ( $X_A, Y_A, Y_B$ ) ока-



вестные величины обычно при этом могут быть найдены, а для других искомым величин можно получить некоторые зависимости.

Если тело разрезать на части и для каждой части составить уравнения равновесия, то число неизвестных величин, которые при этом добавляются, равно числу дополнительных уравнений равновесия. В самом деле, плоская система сил, с которой вторая часть тела действует на первую, эквивалентна главному вектору с составляющими ( $X_A$ ,  $Y_A$ ) и паре сил с моментом  $M_A$ , где точка  $A$ —центр приведения указанной плоской системы сил.

Следовательно, если для каждой части тела составить 3 уравнения равновесия, то общее число уравнений равновесия увеличится на три, однако число неизвестных также возрастет на три, ибо появляются новые неизвестные  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $M_A$ . Этот способ разрезания тела на части применяется в случае, когда нужно определить внутренние силы, действующие в каждом сечении тела.

В качестве примера рассмотрим балку  $AB$ , прикрепленную при помощи неподвижного шарнира в точке  $A$ , а в точке  $B$  имеется опора на катках. К балке приложена вертикальная сила  $\bar{P}$ , как показано на рис. 2-57. Требуется найти

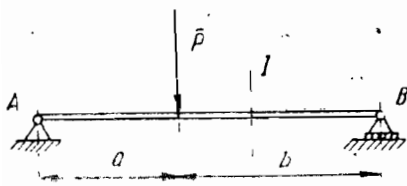


Рис. 2-57

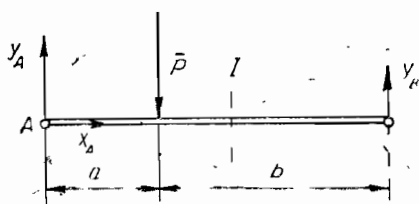


Рис. 2-58

главный вектор и главный момент внутренних сил, действующих в сечении 1.

### Решение.

1) *Освобождение от внешних связей (первый шаг).* Освобождаемся от внешних связей и заменяем их реакциями. Незвестную реакцию в точке  $A$  разложим на составляющие  $X_A$  и  $Y_A$ , реакция  $Y_B$  в точке  $B$ , очевидно, направлена по нормали к оси балки (рис. 2-58).

2) *Расчленение (второй шаг).* Для определения неизвестных реакций  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$  балку рассматриваем как абсолютно твердое тело.

3) *Равновесие* (третий шаг). Составляем 3 уравнения равновесия для сил, приложенных к балке, тогда получим

$$\begin{aligned}\Sigma X &= X_A = 0, \\ \Sigma m_A \bar{F} &= Y_B(a+b) - Pa = 0, \\ \Sigma m_B \bar{F} &= -Y_A(a+b) + Pb = 0,\end{aligned}$$

откуда

$$X_A = 0; \quad Y_A = P \frac{b}{a+b}; \quad Y_B = P \frac{a}{a+b}.$$

Для определения главного вектора и главного момента внутренних сил разрежем балку  $AB$  на две части по сечению 1, перпендикулярному к балке  $AB$ , и действие каждой части балки друг на друга заменим главным вектором внутренних сил с составляющими  $X_A$  и  $Y_A$  и главным моментом  $M_0$  (рис.

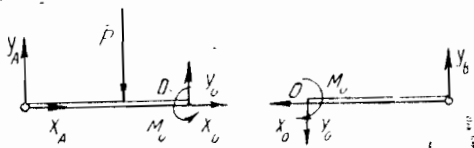


Рис. 2-59

2-59, см. задачу (2-10) и составим уравнения равновесия для правой части балки (рис. 2-59). Получим

$$\begin{aligned}\Sigma X &= -X_0 = 0, \\ \Sigma Y &= -Y_0 + Y_B = 0, \\ \Sigma m_0 \bar{F} &= -M_0 + Y_B OA = 0,\end{aligned}$$

откуда находим компоненты главного вектора  $X_0$ ,  $Y_0$  и момент  $M_0$  внутренних сил, действующих в сечении 1. Однако закон распределения сил во всех точках сечения 1 нам неизвестен, и для его определения необходимы дополнительные гипотезы.

Систему уравнений равновесия можно получить не только путем расчленения системы тел на отдельные тела, но и путем расчленения ее на отдельные группы тел, при этом мы каждую группу тел рассматриваем как абсолютно твердое тело и составляем для нее три уравнения равновесия.

Если в системе имеется  $n$  тел, то, составляя уравнения равновесия для каждого тела в отдельности, мы получим  $3n$  уравнений равновесия.

Если же из этой системы тел выделить  $m$  групп тел, причем группа может содержать, в частности, либо одно тело, либо всю систему тел, то для выделенных  $m$  групп тел можно составить  $3m$  уравнений равновесия. Однако независимых уравнений равновесия будет лишь  $3n$ , а остальные уравнения равновесия будут следствиями независимых  $3n$  уравнений. Это можно показать следующим образом.

Если какая-либо группа тел (III) является комбинацией других групп тел (I) и (II), то уравнения равновесия для этой группы тел являются следствиями уравнения равновесия других групп тел. В самом деле, составляя уравнения равновесия для каждой группы (I) и (II), получим

$$\Sigma X = \Sigma (X)' + \Sigma (R_{1,2})_x = 0, \quad (2-11)$$

$$\Sigma X = \Sigma (X)'' - \Sigma (\bar{R}_{1,2})_x = 0, \quad (2-12)$$

где  $R_{1,2}$  — силы, с которыми вторая группа действует на первую группу тел.

Складывая полученные уравнения, получим

$$\Sigma X = \Sigma (X)' + \Sigma (X)'' = 0. \quad (2-13)$$

Последнее уравнение (2-13), являющееся следствием уравнений (2-11), (2-12), является также уравнением равновесия для третьей группы тел.

**Задача 2-9.** На консольную горизонтальную балку действуют пара сил с моментом  $M=200$  кгМ, сила  $P=100$  кг, при-

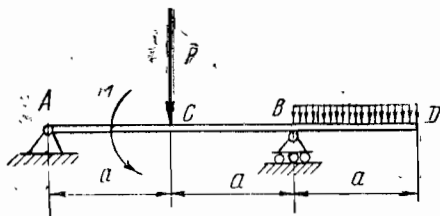


Рис. 2-60

ложенная в точке  $C$ , и равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q=100 \frac{\text{кг}}{\text{м}}$ . Определить реакции опор, если  $a=2\text{м}$  (рис. 2-60).

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей в точках  $A$  и  $B$  и заменяем связи реакциями (рис. 2-61).

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем тело как абсолютно твердое.

3) *Равновесие* (третий шаг). При составлении уравнений равновесия равномерно распределенную нагрузку заменяем

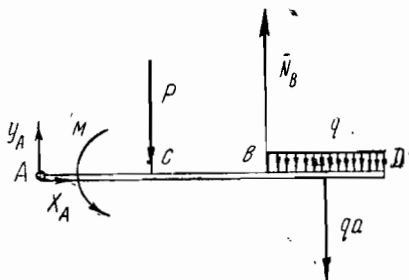


Рис. 2-61

одной силой, равной  $q \cdot a$  и приложенной от точки  $B$  вправо на расстоянии  $\frac{a}{2} = 1$  м (рис. 2-61). Эти уравнения будут иметь вид

$$\Sigma X = X_A = 0,$$

$$\Sigma Y = R_A - P + R_B - qa = 0,$$

$$\Sigma m_A \bar{F} = M - Pa + R_B \cdot 2a - q \cdot a \cdot 2,5 a = 0.$$

Отсюда

$$X_A = 0; \quad Y_A = 50 \text{ кг}; \quad N_B = 250 \text{ кг}.$$

**Задача 2-10.** Горизонтальная балка  $AB$  заделана в стену. К концу балки приложена сила  $Q = 200$  кг, составляющая с осью балки угол, равный  $45^\circ$ , и от заделки до середины балки действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q = 100 \frac{\text{кг}}{\text{м}}$ . Определить реакции заделки, если  $a = 1$  м (рис. 2-62).

**Решение.**

Прежде чем приступить к решению задачи, сначала выясним, что мы будем понимать под реакциями заделки. Освободим балку от заделки, то есть от двух горизонтальных плоскостей стены, которые удерживают балку в горизонтальном положении, тогда на каждую точку заделанной части балки со стороны этих плоскостей будет действовать си-

ла, величина и направление которой неизвестны (рис. 2-63).  
 Всю эту систему сил заменим одной силой  $\bar{R}_A$ , приложенной в точке  $A$ , и парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$  (рис. 2-64). Величина и направле-

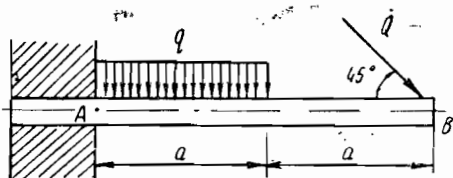


Рис. 2-62

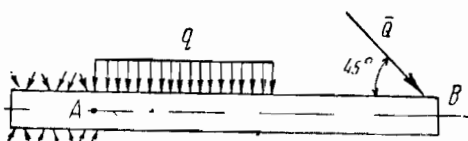


Рис. 2-63

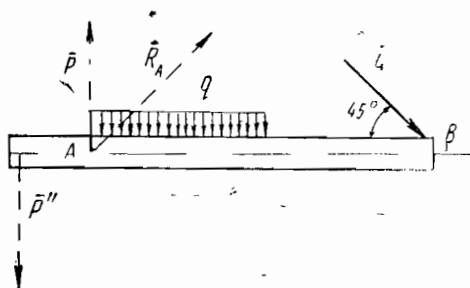


Рис. 2-64

ние силы  $R_A$ , направление вращения и момент пары неизвестны, так как неизвестны силы, действующие на заделанную часть балки.

Силу  $\bar{R}_A$  заменим двумя силами  $X_A$  и  $Y_A$ , пару в дальнейшем будем изображать в виде дуги со стрелкой, указывающей направление вращения пары, не изображая самой пары, а момент ее будем обозначать буквой  $m_A$  (рис. 2-65).

Таким образом, задача сводится к определению двух сил  $X_A$  и  $Y_A$  (реакции заделки) и пары с моментом  $m_A$  (момента заделки). Если направление вращения пары и направление сил  $X_A$  и  $Y_A$  указаны верно, то из уравнений равновесия эти силы и мо-

мент пары  $m_A$  будут найдены со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

Переходим к решению задачи.

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей, заменяя связи в точке  $A$  реакциями заделки  $X_A$  и  $Y_A$  и моментом заделки  $m_A$  (рис. 2-65).

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем балку как абсолютно твердое тело.

3) *Равновесие* (третий шаг). Составляем уравнения равновесия

$$\Sigma X = X_A + Q \cos 45^\circ = 0,$$

$$\Sigma Y = Y_A - qa - Q \cos 45^\circ = 0,$$

$$\Sigma m_A \bar{F} = m - qa \frac{a}{2} - Q 2a \cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда

$$X_A = -100\sqrt{2} \text{ кГ},$$

$$Y_A = 100(1 + \sqrt{2}) \text{ кГ},$$

$$m = 50(1 + 4\sqrt{2}) \text{ кГм}.$$

Знак минус у силы  $X_A$  указывает, что направление ее прямо противоположно указанному на рис. 2-65.

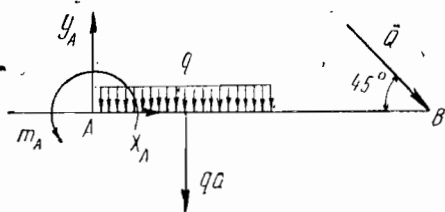


Рис. 2-65

**Замечание к решению задач статики.** При составлении уравнений проекций следует иметь в виду, что сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

При составлении уравнений моментов следует помнить, что сумма моментов сил пары относительно любой точки равна моменту пары (см. теорию пар).

**Задача 2-11.** Какой момент  $M$  надо приложить к кулисе  $OA$ , чтобы удерживать кулисный механизм в указанном на рис. 2-66, положении, если вес кривошипа  $O_1B$  равен  $P$ ,  $OO_1 = a$ , угол  $\alpha$  дан, весом кулисы пренебречь.

### Решение.

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей в точках  $O$  и  $O_1$ , заменяя их реакциями (рис. 2-67).

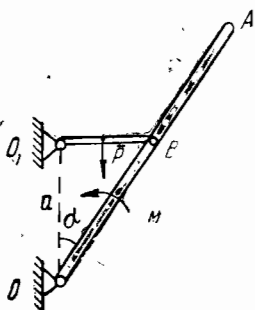


Рис. 2-66

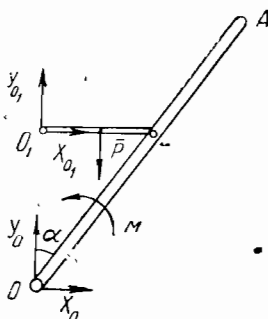


Рис. 2-67

2) *Расчленение* (второй шаг). Расчленяем систему на отдельные тела: кривошип и кулису (рис. 2-68).

3) *Равновесие* (третий шаг). Так как по условию задачи реакции в точках  $O$  и  $O_1$  находить не надо, то уравнения проекции на координатные оси составлять не будем. Составим уравнения моментов для кривошипа относительно точки  $O_1$  и для кулисы относительно точки  $O$  (рис. 2-68). Тогда получим

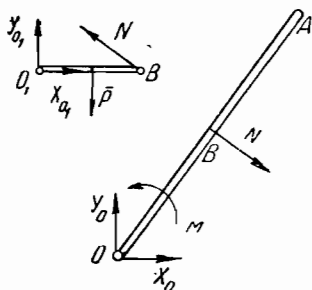


Рис. 2-68

$$\Sigma m_{O_1} \bar{F} = -P \frac{O_1 A}{2} +$$

$$+ N \cdot O_1 A \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$\Sigma m_O \bar{F} = M - N \frac{a}{\cos \alpha} = 0.$$

Отсюда

$$M = \frac{Pa}{\sin 2\alpha}.$$

**Задача 2-12.** Составная балка  $AE$ , лежащая на трех опорах, состоит из двух балок, шарнирно соединенных в точке  $B$ . На балку  $BE$  под углом  $\alpha$  действует сила  $Q$ , вертикальная сила  $P$  и равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$ . Определить опорные реакции и реакцию в точке  $B$ . Размеры указаны на рис. 2-69.

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей в точках *A*, *C*, *D* и заменяем их реакциями (рис. 2-70).

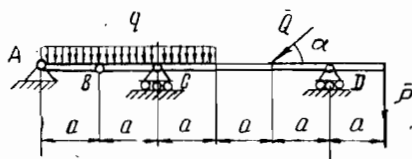


Рис. 2-69

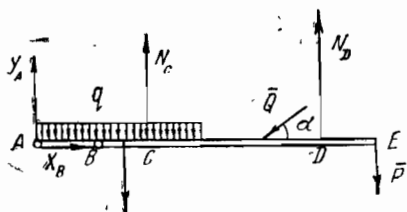


Рис. 2-70

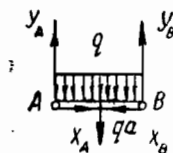


Рис. 2-71

2) *Расчленение* (второй шаг). Из системы выделяем две группы тел: вся система тел и балка *AB* (рис. 2-71).

3) *Равновесие* (третий шаг). Уравнения равновесия для этих групп тел будут соответственно

$$\Sigma X = X_A - Q \cos \alpha = 0,$$

$$\Sigma Y = Y_A + N_C + N_D - q \cdot 3a - Q \cdot \sin \alpha - P = 0,$$

$$\Sigma m_A \bar{F} = -q \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} + N_C \cdot 2a - Q \cdot 4a \sin \alpha +$$

$$+ N_D \cdot 5a - P \cdot 6a = 0,$$

$$\Sigma X = X_A - X_B = 0,$$

$$\Sigma Y = Y_A \cdot qa + Y_B = 0,$$

$$\Sigma m_B \bar{F} = qa \cdot \frac{a}{2} - Y_A \cdot a = 0.$$

Отсюда находим

$$X_A = X_B = Q \cos \alpha,$$

$$Y_A = Y_B = \frac{qa}{2}.$$



$$N_C = \frac{1}{3} (Q \sin \alpha - P + 8qa),$$

$$N_D = \frac{1}{6} (4Q \sin \alpha + 8P - qa).$$

**Задача 2-13.** Найти соотношение между моментами  $M_1$  и  $M_2$  в зубчатом зацеплении, показанном на рис. 2-72, а также касательное усилие в точке  $A$  в положении равновесия механизма, если радиусы шестеренок равны  $R$  и  $r$ .

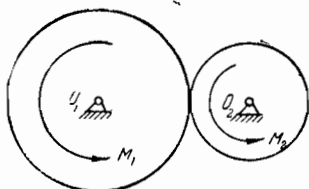


Рис. 2-72

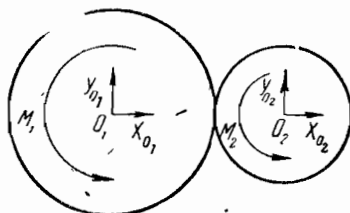


Рис. 2-73

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей в точки  $O_1$  и  $O_2$ , заменяя их реакциями (2-73).

2) *Расчленение* (второй шаг). Расчленяем систему на два тела: первая и вторая шестеренки (рис. 2-74), заменяя связь

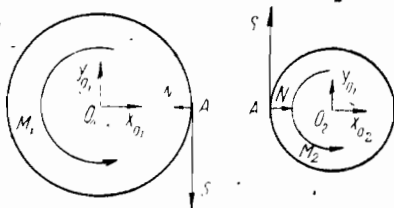


Рис. 2-74

в точке  $A$  двумя силами  $N$  и  $S$ , где сила  $S$  называется окружным усилием.

3) *Равновесие* (третий шаг). Составляем только уравнения моментов относительно точек  $O_1$  и  $O_2$  для сил, приложенных к первой и второй шестеренкам.

$$\Sigma m_{O_1} \bar{F} = M_1 - S \cdot R = 0,$$

$$\Sigma m_{O_2} \bar{F} = M_2 - S \cdot r = 0.$$

Отсюда

$$M_1 = M_2 \frac{R}{r},$$

$$S = \frac{M_1}{R} = \frac{M_2}{r}.$$

**Задача 2-14.** Однородный стержень  $AB$  длины  $2l$  и весом  $P$  может вращаться вокруг горизонтальной оси на конце  $A$  стержня. Он опирается на однородный стержень  $CD$  той же длины  $2l$ , который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину  $E$ . Точка  $A$  и  $E$  лежат на одной вертикали на расстоянии  $AE=l$ . К концу  $D$  подвешен груз  $Q=2P$ . Определить величину угла  $\varphi$ , образуемого стержнем  $AB$  с вертикалью в положении равновесия, пренебрегая трением (рис. 2-75).

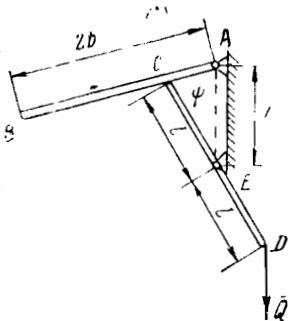


Рис. 2-75

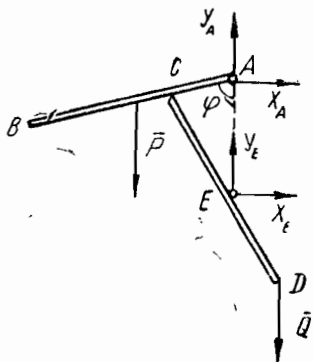


Рис. 2-76

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаем систему от внешних связей в точках  $A$  и  $E$ , заменяя связи реакциями (рис. 2-76).

2) *Расчленение* (второй шаг). Расчленяем систему на отдельные тела (рис. 2-77).

3) *Равновесие* (третий шаг). Составляем уравнения равновесия для каждого тела, ограничиваясь составлением уравнений моментов

$$\Sigma m_A \bar{F} = Pl \sin \varphi - N_C AC = 0,$$

$$\Sigma m_E \bar{F} = N_C E g \cos \varphi - Ql \sin 2\varphi = 0.$$

Но  $AC = 2l \cos \varphi$ ,  $Eg = l \cos \varphi$ , подставляя эти значения в написанные уравнения и сокращая на  $l$ , получим

$$P \sin \varphi - N_C \cdot 2 \cos \varphi = 0,$$

$$N_C \cos \varphi - 2P \sin 2\varphi = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \arccos \frac{1}{8}.$$

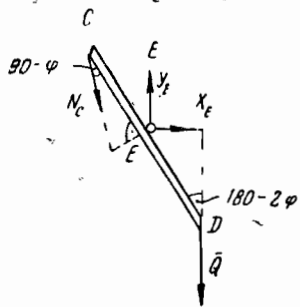
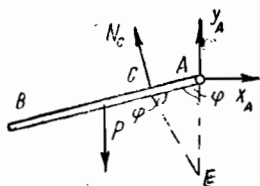


Рис. 2-77

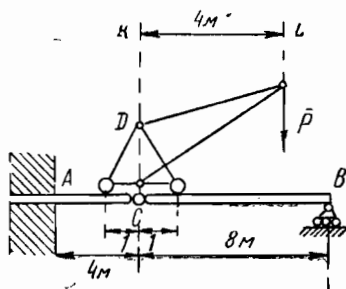


Рис. 2-78

**Задача 2-15.** Горизонтальная разрезная балка  $ACB$  у конца  $A$  заделана в стену, у конца  $B$  опирается на подвижную опору; в точке  $C$  — шарнир. Балка загружена краном, несущим груз  $P$  весом  $1$  т; вылет  $KL=4$  м, вес крана  $Q=5$  т, центр тяжести крана лежит на вертикали  $CD$ . Размеры указаны на рис. 2-78. Определить, пренебрегая весом балки, опорные реакции в точках  $A$  и  $B$  для такого положения крана, когда он находится в одной вертикальной плоскости с балкой  $AB$ .

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей, заменяя связи в точке  $A$  реакциями заделки  $X_A$  и  $Y_A$  и моментом заделки  $m_A$ , а в точке  $B$  реакцией  $N_B$  (рис. 2-79).

2) *Расчленение* (второй шаг). Из системы выделяем три группы тел, заменяя связи их реакциями. За первую группу тел берем кран, за вторую — балку  $BC$  (рис. 2-80) и за третью — всю систему тел (рис. 2.79).

3) *Равновесие* (третий шаг). Для сил, приложенных к первой и второй группам тел, составляем только уравнения мо-

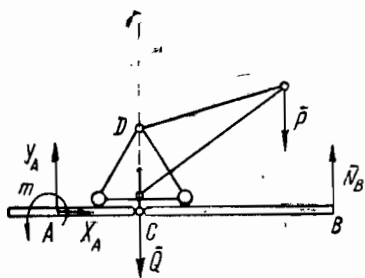


Рис. 2-79

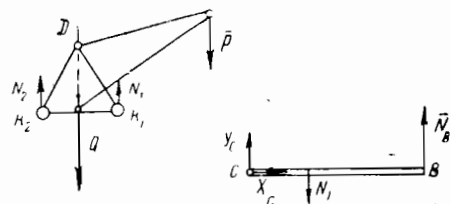


Рис. 2-80

ментов относительно точек  $K_2$  и  $C$  и для третьей группы три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \Sigma m_x \bar{F} &= -Q \cdot 1 + N_1 \cdot 2 - P \cdot 5 = 0, \\ \Sigma m_C \bar{F} &= -N_1 \cdot 1 + N_B \cdot 8 = 0 \\ \Sigma X &= X_A = 0, \\ \Sigma Y &= Y_A - Q - P + N_B = 0, \\ \Sigma m_A \bar{F} &= m - Q \cdot 4 - P \cdot 8 + N_B \cdot 12 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$N_B = 0,625 m, \quad Y_A = 5,375 m, \quad m = 20,5 m.$$

**Задача 2-16.** На рис. 2-81 указана схема столовых весов (весы Роберваля). В точках  $A, B, C$  и  $D$  — подвижные шар-

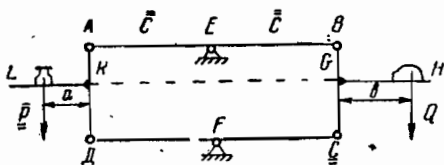


Рис. 2-81

ниры, в точках  $E$  и  $F$  — неподвижные. Найти соотношения между силами  $\bar{Q}$  и  $\bar{P}$  в положении равновесия, если

$$AE = BE = DF = CF, \quad AD = BC.$$

**Решение.**

1) Освобождение от внешних связей (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей в точках  $E$  и  $F$ , заменяя связи реакциями (рис. 2-82).

2) *Расчленение* (второй шаг). Расчленяем систему на отдельные тела, заменяя связи реакциями (рис. 2-83).

3) *Равновесие* (третий шаг). Для тел 1 и 2 составляем уравнения моментов относительно точек E и F, а для тел 3

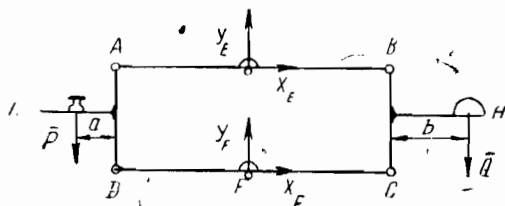


Рис. 2-82

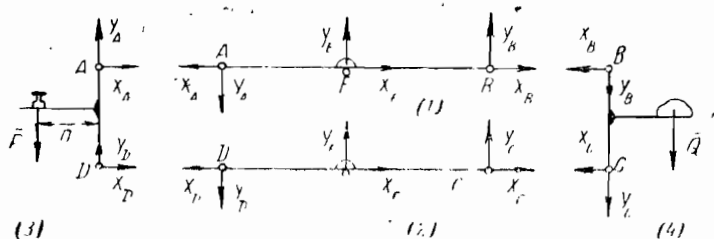


Рис. 2-83

и 4 составляем уравнения проекций на ось  $y$ . Тогда получим

$$\Sigma m_E \bar{F} = Y_A \cdot c + Y_B \cdot c = 0,$$

$$\Sigma m_F \bar{F} = Y_C \cdot c + Y_D \cdot c = 0,$$

$$\Sigma Y = Y_A + Y_D - P = 0,$$

$$\Sigma Y = -Y_B - Y_C - Q = 0.$$

Из первых двух находим, что  $Y_B = -Y_A$ ;  $Y_D = -Y_C$ . Значения  $Y_B$  и  $Y_D$  подставляем в последние два, тогда

$$Y_A - Y_C - P = 0,$$

$$Y_A - Y_C - Q = 0.$$

Вычитая одно из другого, получим, что  $P=Q$ .

Таким образом, где бы на плоскости  $KL$  и  $GH$  не были положены гиря и груз, веса их в положении равновесия равны между собой.

## § 9. Трение скольжения

Если поверхности соприкасающихся тел шероховаты, то, помимо нормальной реакции, возникает также реакция в

плоскости касания тел. Эта реакция называется силой трения скольжения.

Пусть на горизонтальной шероховатости плоскостей лежит тело веса  $P$  (рис. 2-84). Приложим к телу горизонталь-

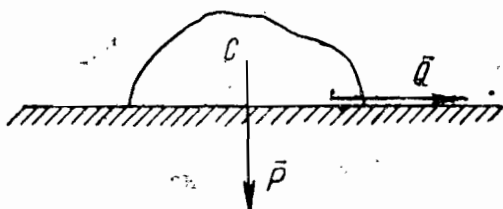


Рис. 2-84

ную силу  $Q$ . Если при этом тело находится в состоянии покоя, то, освободившись от внешних связей и составив уравнения равновесия, найдем

$$\Sigma X = Q - F_{тр} = 0,$$

$$\Sigma Y = N - P = 0.$$

Отсюда находим  $N = P$ ;  $F_{тр} = Q$ ,

где  $F_{тр}$  — сила трения скольжения.

Из равенства  $F_{тр} = Q$  видно, что с увеличением силы  $Q$  увеличивается сила трения  $F_{тр}$ . Опыты показывают, что при достижении величины силы  $Q$  некоторого максимального

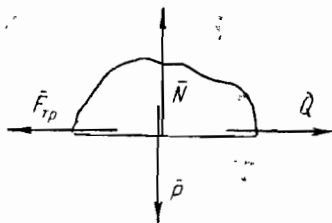


Рис. 2-85

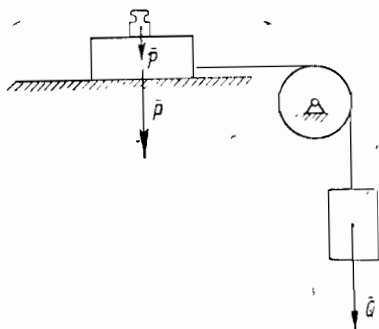


Рис. 2-86

значения  $Q_{max}$  наступает предельное состояние покоя тела, при этом сила трения  $F_{тр}$  достигает своего максимального значения  $F_{тр max}$ . При дальнейшем увеличении силы  $Q$  состоя-

ние покоя нарушается. Для установления законов трения скольжения может служить следующий простой опыт.

К телу веса  $\bar{P}$ , лежащему на шероховатой поверхности, прикреплен конец нити, переброшенной через блок с грузом  $\bar{Q}$  на другом конце (рис. 2-86). На тело положена гиря веса  $\bar{P}$ , когда сила трения  $F_{mp} = Q$  достигает некоторого максимального значения  $Q_{max}$ , то состояние покоя тела нарушается. Опыты также показывают, что значение  $Q_{max}$  зависит от значения  $P + p$ .

Кулон установил следующие законы трения скольжения.

1) Максимальная сила трения не зависит от величины трущихся поверхностей.

2) Максимальная сила трения равна произведению нормальной реакции  $N$  на коэффициент трения скольжения  $f$

$$F_{mp\ max} = f \cdot N.$$

Коэффициент трения скольжения  $f$  зависит от материала и свойств трущихся поверхностей, степени шероховатости.

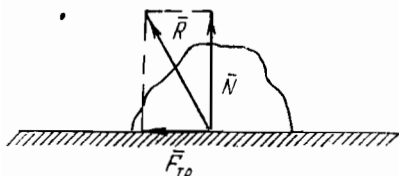


Рис. 2-87

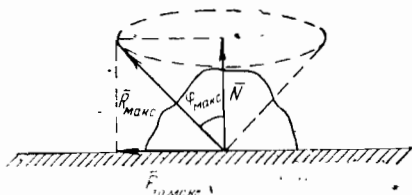


Рис. 2-88

Определение. Равнодействующая  $R$  нормальной реакции и силы трения называется полной реакцией (рис. 2-87). Равнодействующая нормальной реакции и максимальной силы трения называется максимальной полной реакцией (рис. 2-88). Угол между максимальной полной реакцией и нормальной реакцией называется углом трения  $\varphi_{max}$  (рис. 2-88). Из определения следует, что тангенс угла трения равен коэффициенту трения. В самом деле, имеем

$$\operatorname{tg} \varphi_{max} = \frac{F_{mp\ max}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f.$$

Построим конус, ось которого совпадает с направлением нормальной реакции, а угол между образующей конуса и нормальной реакцией равен углу трения. Полученный конус

называется конусом трения (рис. 2-88). Непосредственно из рисунка видно, что полная реакция лежит либо внутри, либо на поверхности конуса трения. После этого перейдем к решению задач с учетом сил трения. При этом методика решения задач остается той же самой.

**Задача 2-17.** Клин  $A$ , уклон которого  $\operatorname{tg} \alpha = 0,05$ , загоняется в углубление  $BB_1$  усилием  $Q = 6$  т. Определить нормальное давление  $N$  на щеки клина, а также усилие  $P$ , необходимое для того, чтобы вытащить клин, если коэффициент трения  $f = 0,1$  (рис. 2-89).

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей и заменяем их двумя реакциями

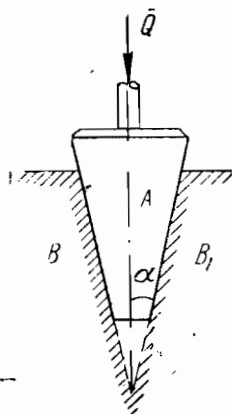


Рис. 2-89

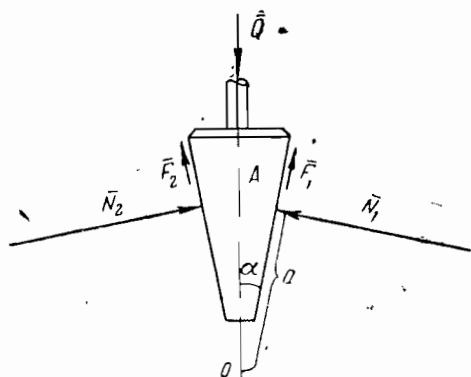


Рис. 2-90

ми, приложенными к щекам клина. Каждую реакцию заменяем силой  $N$  (нормальное давление) и силой трения  $F$  (рис. 2-90).

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем тело как абсолютно твердое.

3) *Равновесие* (третий шаг). Составляем уравнения равновесия для плоской системы сил, приложенных к клину

$$\Sigma X = N_2 \cos \alpha - N_1 \cos \alpha + F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \alpha = 0,$$

$$\Sigma Y = N_2 \sin \alpha + N_1 \sin \alpha + F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \alpha - Q = 0,$$

$$\Sigma m_O \vec{F} = -N_1 a + N_2 a = 0.$$



Из третьего уравнения находим, что  $N_1 = N_2 = N$ , тогда из первого уравнения следует  $F_1 = F_2 = F$  и из второго уравнения получим значения нормального давления

$$2N(\sin \alpha + f \cos \alpha) = Q,$$

$$N = \frac{Q}{2(\sin \alpha + f \cos \alpha)},$$

но

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{0,05}{\sqrt{1 + 0,0025}} \approx 0,05,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,0025}} \approx 0,9988$$

тогда

$$N = \frac{6}{2(0,05 + 0,1)} = 20 \text{ м.}$$

Найдём усилие  $P$ , необходимое для того, чтобы вытащить клин. В этом случае направления сил трения изменятся на

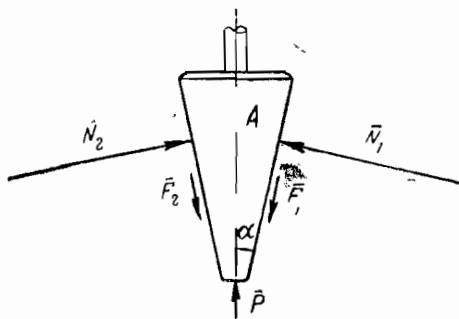


Рис. 2-91

прямо противоположные (рис. 2-91). Уравнения равновесия будут иметь вид

$$\Sigma X = N_2 \cos \alpha - N_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha - F_1 \sin \alpha = 0,$$

$$\Sigma Y = N_2 \sin \alpha + N_1 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha - F_1 \cos \alpha + P = 0,$$

$$\Sigma m_O \bar{F} = -N_1 a + N_2 a = 0.$$

Из третьего, а затем первого уравнений соответственно получим  $N_1 = N_2 = N$ ,  $F_1 = F_2 = F$  и из второго найдем

$$2N \sin \alpha - 2f N \cos \alpha + P = 0,$$

$$P = 2N(f \cos \alpha - \sin \alpha) = 2 \cdot 20(0,1 - 0,05) = 2 \text{ м.}$$

**Задача 2-18.** Ящик веса  $\bar{P}$  стоит на шероховатой горизонтальной плоскости с коэффициентом трения  $f$ . Определить, под каким углом  $\beta$  надо приложить силу  $Q$  и величину этой

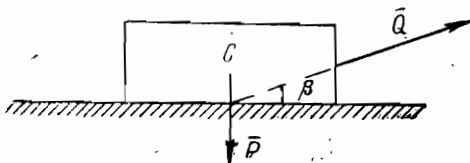


Рис. 2-92

силы при условии: сдвинуть ящик при наименьшей величине  $Q$  (рис. 2-92).

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаем систему от внешних связей и заменяем связи нормальной реакцией  $N$  и силой трения  $F_{тр}$  (рис. 2-93). Здесь сила  $N$  проходит через точку  $C$ . В самом деле. Положим, что

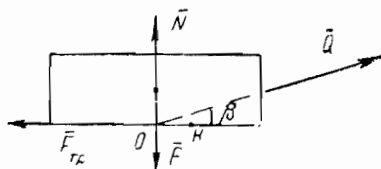


Рис. 2-93

$N$  проходит через точку  $k$ . Тогда сумма моментов всех сил, взятых относительно точки  $O$ , будет равна  $\Sigma m_O \bar{F} = 0$ , но  $Ok \neq 0$ , тогда  $N=0$ , а этого быть не может, ибо тогда и  $F_{тр}=0$ . Следовательно,  $N$  проходит через точку  $O$ .

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем тело как абсолютно твердое.

3) *Равновесие* (третий шаг). Составляем уравнения равновесия. Их будет только два, так как на ящик действует плоская система сходящихся сил.

$$\Sigma X = -F_{тр} + Q \cos \beta = 0,$$

$$\Sigma Y = -P + N + Q \sin \beta = 0.$$

Когда сила трения достигает максимальной величины, то первое из этих уравнений будет иметь вид

$$-fN + Q \cos \beta = 0,$$

умножая второе уравнение на  $f$  и складывая с этим, получим

$$Q = \frac{Pf}{f \sin \beta + \cos \beta}.$$

Обозначим  $f \sin \beta + \cos \beta = A(\beta)$ ; тогда

$$Q = \frac{Pf}{A(\beta)}.$$

Сила  $Q$  будет достигать минимального значения в том случае, когда  $A(\beta)$  будет иметь максимальное значение. Найдем, при каком угле  $\beta$  функция  $A(\beta)$  будет иметь максимум. Для этого возьмем производную от  $A(\beta)$  по  $\beta$  и приравняем ее нулю, тогда получим

$$\frac{dA}{d\beta} = f \cos \beta - \sin \beta = 0; \quad \beta = \operatorname{arctg} f.$$

При этом угле функция  $A(\beta)$  будет иметь максимум, так как

$$\frac{d^2A}{d\beta^2} = -f \sin \beta - \cos \beta < 0,$$

а сила  $Q$  — минимум.

Выразим  $\sin \beta$  и  $\cos \beta$  через данный коэффициент трения скольжения  $f$  по известным формулам

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}; \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}},$$

тогда

$$Q_{\min} = \frac{Pf}{f \sin \beta + \cos \beta} = \frac{Pf}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Таким образом,

$$\beta = \operatorname{arctg} f, \quad Q = \frac{Pf}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

При найденном угле  $\beta$  сила  $Q$  будет иметь минимальное значение, необходимое для того, чтобы сдвинуть ящик.

### Глава III. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТАТИКА

*Пространственной статикой* называется раздел статики, в котором изучается состояние покоя абсолютно твердого тела или системы таких тел, находящихся под действием сил, как угодно расположенных в пространстве.

В этом разделе, так же как и в разделе «плоская статика», будут рассматриваться две основные задачи, а именно: задача о приведении (замене) пространственной системы сил к эквивалентной и задача о нахождении условий равновесия этих сил. Сперва рассмотрим систему сходящихся сил в пространстве.

#### § 1. Пространственная система сходящихся сил

*Пространственная система сил называется сходящейся*, если линии действия сил пересекаются в одной точке. Точка пересечения линий действия сил называется точкой схода сил.

а) Геометрический способ сложения пространственной системы сходящихся сил. Пусть к абсолютно твердому телу приложена пространственная система сходящихся сил (рис. 3-1). Перенесем все силы вдоль линии их действия в точку схода и, воспользовавшись аксиомой параллелограмма сил, заменим силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  равнодействующей  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , равнодействующую  $\vec{R}_1$  и силу  $\vec{F}_3$  заменим новой равнодействующей  $\vec{R}_2$  и т. д. В результате найдем равнодействующую  $\vec{R}$  системы сил, приложенную в точке схода  $O$

$$\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R}, \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \Sigma \vec{F}.$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме: пространственная система сходящихся сил  $\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\}$  эквивалентна равнодействующей  $\vec{R}$ , приложенной в точке схода сил и равной геометрической сумме сил. Если для определения равнодействующей двух сил воспользоваться правилом сило-

вого треугольника совершенно так же, как в случае плоской системы сходящихся сил (см. § 1, глава II), то придем к заключению: равнодействующая пространственной системы сходящихся сил равна замыкающему вектору силового многоугольника, построенного на этих силах (рис. 3-2).

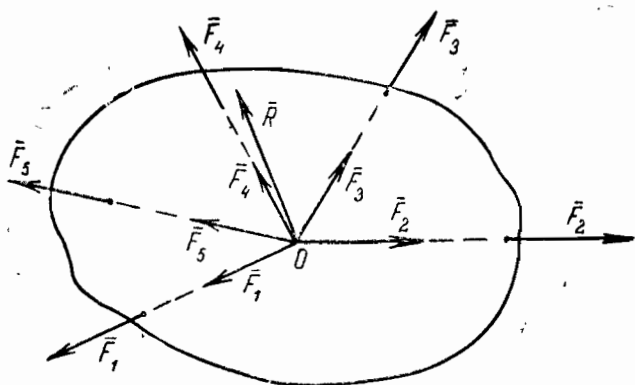


Рис. 3-1

Из конца вектора силы  $\vec{F}_1$  строим вектор силы  $F_2$ , из конца вектора  $\vec{F}_2$  строим вектор  $\vec{F}_3$  и т. д. Здесь силовой многоугольник

строится следующим образом. Из конца вектора силы  $\vec{F}_1$  строим вектор силы  $F_2$ , из конца вектора  $\vec{F}_2$  строим вектор  $\vec{F}_3$  и т. д. Здесь силовой многоугольник

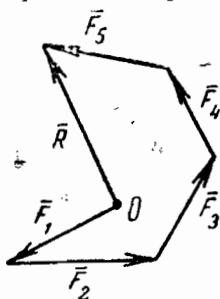


Рис. 3-2

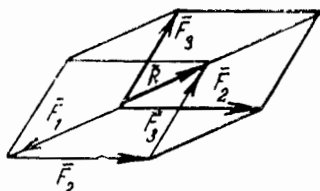


Рис. 3-3

пространственный в отличие от плоской системы сходящихся сил, для которых он плоский.

Если  $n=3$ , то  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ . В этом случае замыкающая силового многоугольника и диагональ параллелепипеда, построенного на этих трех силах, как на ребрах, совпадают (рис. 3-3). Отсюда приходим к правилу параллелепипеда

да: равнодействующая трех сил, приложенных в одной точке тела и не лежащих в одной плоскости, приложена в той же точке и по величине и направлению определяется диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах.

Следствие из правила параллелепипеда: силу, приложенную в данной точке тела, можно разложить на три силы по трем заданным направлениям, не лежащим в одной плоскости.

**Доказательство.** Из точки  $O$  приложения силы  $F$  проводим прямые, параллельные заданным направлениям I, II и

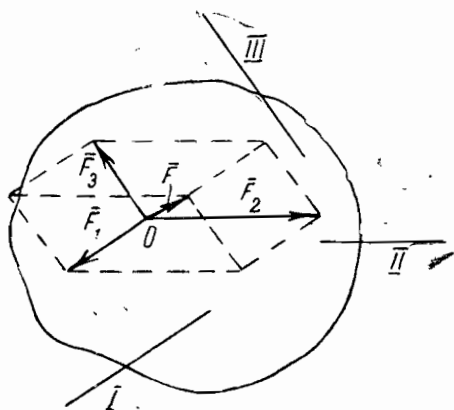


Рис. 3-4

III и затем строим параллелепипед, ребра которого совпадают с этими прямыми, а диагональ которого равна величине данной силы  $\bar{F}$ , тогда ребра этого параллелепипеда, исходящие из точки  $O$ , определяют величины искомых сил  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$  (рис. 3-4)

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3.$$

б) Геометрическое условие равновесия пространственной системы сходящихся сил

**Теорема.** Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием пространственной системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма сил была равна нулю или иначе, чтобы силовой многоугольник был замкнут

$$\Sigma \bar{F} = 0.$$

### Доказательство.

Заменим систему сил равнодействующей  $\overline{R}$ , приложенной в точке схода сил.

Для того чтобы тело находилось в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая  $\overline{R} = \Sigma \overline{F} = 0$  или иначе, чтобы замыкающий вектор силового многоугольника был равен нулю (многоугольник сил замкнут).

Прежде чем перейти к аналитическому решению только что рассмотренных задач, введем понятие проекции силы на плоскость и на произвольную ось в пространстве.

### Проекция силы на плоскость и на ось. Разложение вектора силы по прямоугольным координатным осям

1<sup>0</sup>. *Проекция силы на плоскость.* Опустим из начала и конца вектора  $\overline{AB}$ , изображающего силу  $\overline{F}$ , перпендикуляры на плоскость  $\overline{\Pi}$ , а точки пересечения их с плоскостью соответ-

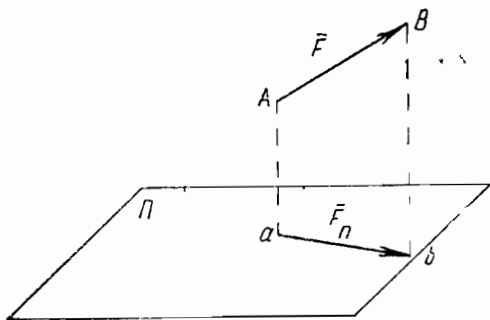


Рис. 3-5

ственно обозначим через  $a$  и  $b$ . Эти точки называются проекциями начала и конца вектора силы  $\overline{F}$  на данную плоскость (рис. 3-5). Направленный отрезок  $\overline{ab}$ , соединяющий точку  $a$  с точкой  $b$ , то есть вектор  $\overline{F}_n = \overline{ab}$ , направленный от проекции начала силы к проекции ее конца, называется проекцией силы на данную плоскость.

2<sup>0</sup>. *Разложение вектора силы по прямоугольным координатным осям.* Чтобы разложить силу  $\overline{F}$  по прямоугольным координатным осям, начало которых совпадает с точкой  $O$  приложения силы  $\overline{F}$ , достаточно построить на осях такой па-

параллелепипед, для которого вектор силы  $\vec{F}$  является его диагональю. Векторы  $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$  называются составляющими вектора силы  $\vec{F}$  по координатным осям  $x, y, z$  соответственно, то есть  $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$  (рис. 3-6). Если теперь из начала и конца силы  $\vec{F}$  опустить перпендикуляры на координатные оси, то они на них отсекут отрезки  $OA=X, OC=Y, OH=Z$ , которые называются проекциями силы  $\vec{F}$  на эти оси (рис. 3-6).

Из рис. 3-6 видно, что величина составляющей силы в направлении какой-либо оси равна величине проекции силы

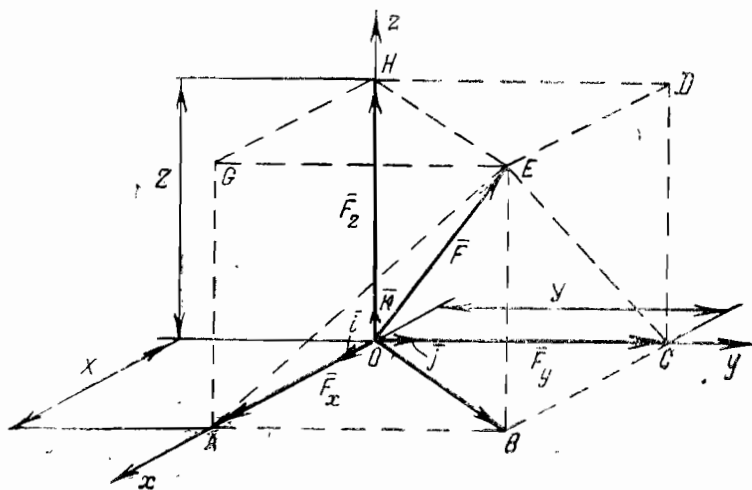


Рис. 3-6

на эту ось. С учетом знака проекции на ось найдем: проекция силы на ось равна величине составляющей силы в направлении этой оси, взятой со знаком плюс, если направление составляющей совпадает с положительным направлением оси, и взятой со знаком минус в противном случае. Между составляющими  $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$  силы  $\vec{F}$  и ее проекциями  $X, Y, Z$  существуют очевидные равенства

$$\vec{F}_x = X \cdot \vec{i}, \quad \vec{F}_y = Y \cdot \vec{j}, \quad \vec{F}_z = Z \cdot \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы, направленные по координатным осям в положительную сторону (рис. 3-6).



Подставляя эти значения составляющих в равенство

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z,$$

получим формулу разложения вектора силы  $\vec{F}$  по направлениям прямоугольных координатных осей

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

Если величина и направление силы  $\vec{F}$  известны, то проекции ее на прямоугольные координатные оси определяются по известным формулам

$$\begin{aligned} X &= F \cos(\vec{F}, \vec{i}), \\ Y &= F \cos(\vec{F}, \vec{j}), \\ Z &= F \cos(\vec{F}, \vec{k}). \end{aligned} \quad (3-1)$$

Наоборот, если известны проекции  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  силы  $\vec{F}$  на прямоугольные оси координат, то ее величина равна

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (3-2)$$

а направление вектора  $\vec{F}$  найдем по формулам

$$\begin{aligned} \cos(\vec{F}, \vec{i}) &= \frac{X}{F} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos(\vec{F}, \vec{j}) &= \frac{Y}{F} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos(\vec{F}, \vec{k}) &= \frac{Z}{F} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \end{aligned} \quad (3-3)$$

полученным из равенств (3-1) и (3-2).

3°. *Другой прием определения проекции силы на ось.* Проекцию силы  $\vec{F}$  на какую-нибудь ось, например, ось  $Ox$ , можно найти также следующим способом. Чтобы найти проекцию силы на ось, надо эту силу сначала спроектировать на плоскость, содержащую эту ось, а затем полученную проекцию спроектировать на данную ось. Доказательство следует непосредственно из рис. 3-6 и теоремы о трех перпендикулярах. Такой прием определения проекции силы на ось часто быстрее приводит к цели, особенно в тех случаях, когда сила и ось не лежат в одной плоскости, и угол между силой и осью неизвестен.

а) Аналитический способ определения равнодействующей пространственной системы

сходящихся сил. Пусть на абсолютно твердое тело действует заданная пространственная система сходящихся сил (рис. 3-7). Требуется определить величину и направление равнодействующей этой системы сил. Чтобы это сделать, сна-

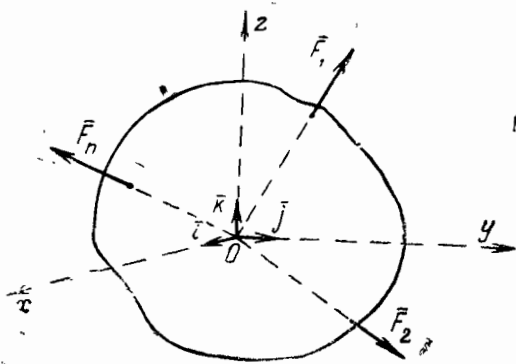


Рис. 3-7

чала найдем проекции равнодействующей, а затем по формулам (3-2) и (3-3) найдем ее величину и направление.

**Теорема.** Проекция равнодействующей пространственной системы сходящихся сил на какую-нибудь координатную ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых сил на ту же ось.

*Доказательство.* Обозначим через  $X_k, Y_k, Z_k$  проекции силы  $\vec{F}_k$  на ось координат, тогда получим

$$\vec{F}_1 = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k},$$

$$\vec{F}_2 = X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\vec{F}_n = X_n \vec{i} + Y_n \vec{j} + Z_n \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы осей координат.

Равнодействующая системы сил равна

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n = \\ &= (X_1 + \dots + X_n) \vec{i} + (Y_1 + \dots + Y_n) \vec{j} + (Z_1 + \dots + Z_n) \vec{k} = \\ &= (\Sigma X) \vec{i} + (\Sigma Y) \vec{j} + (\Sigma Z) \vec{k}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k},$$

где  $R_x, R_y, R_z$  — проекции равнодействующей на оси координат.

Сравнивая левые и правые части последних равенств, найдем

$$\begin{aligned} R_x &= \Sigma X, \\ R_y &= \Sigma Y, \\ R_z &= \Sigma Z. \end{aligned}$$

Эти формулы определяют проекции равнодействующей пространственной системы сходящихся сил по заданным проекциям данных сил.

Зная проекции равнодействующей, найдем ее величину и направление соответственно по формулам

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}, \\ \cos(\bar{R}, \bar{i}) &= \frac{R_x}{R} = \frac{\Sigma X}{\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}}, \\ \cos(\bar{R}, \bar{j}) &= \frac{R_y}{R} = \frac{\Sigma Y}{\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}}, \\ \cos(\bar{R}, \bar{k}) &= \frac{R_z}{R} = \frac{\Sigma Z}{\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}}. \end{aligned}$$

б) Аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил.

**Теорема.** Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием пространственной системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0, \\ \Sigma Y &= 0, \\ \Sigma Z &= 0. \end{aligned} \tag{3-4}$$

*Доказательство.* Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы величина равнодействующей

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2} = 0,$$

откуда следует, что

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0.$$

Эти уравнения называются уравнениями равновесия пространственной системы сходящихся сил.

Если на тело действуют силы, лежащие, например, в плоскости  $xOy$ , то для такой системы сил можно соста-

вить два уравнения  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$ , ибо уравнение  $\Sigma Z = 0$  есть тождество.

**Задача 3-1.** Горизонтальные провода телеграфной линии подвешены к телеграфному столбу  $AB$  с подкосом  $AC$  и составляют угол  $\angle DAE = 90^\circ$ . Натяжение проводов  $AD$  и  $AE$  соответственно равны 12 и 16 кг. В точке  $A$  крепление шарнирное. Найти угол  $\alpha$  между плоскостями  $BAC$  и  $BAE$ , при котором столб не испытывает бокового изгиба, и определить усилие  $R_B$  в столбе и усилие  $R_C$  в подкосе, если он поставлен под углом  $60^\circ$  к горизонту. Весом столба и подкоса пренебречь (рис. 3-8).

**Решение.**

1) Освобождение от внешних связей (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей в точках  $B$  и  $C$ . При этом

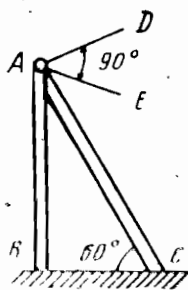


Рис. 3-8

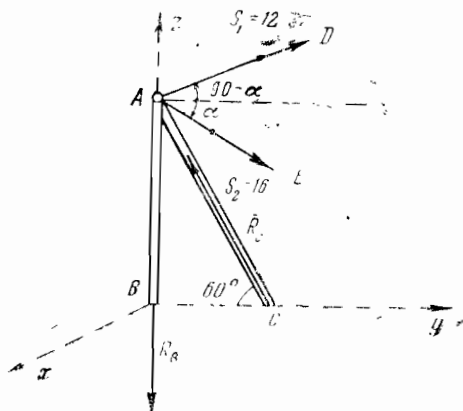


Рис. 3-9

очевидно, что на столб  $AB$  действуют две силы: реакция в точке  $B$  и равнодействующая сил, действующих на столб в точке  $A$ . Следовательно, реакция  $\bar{R}_B$  направлена по  $AB$ . Аналогично реакция  $\bar{R}_C$  направлена по  $AC$  (рис. 3-9).

2) Расчленение (второй шаг). Рассматриваем всю систему тел как отвердевшую, на которую действует пространственная система сходящихся сил.

3) Равновесие (третий шаг). Составляем уравнения равновесия для всей системы тел

$$\Sigma X = S_2 \sin \alpha - S_1 \cos \alpha = 0,$$

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= S_2 \cos \alpha + S_1 \sin \alpha - R_C \cos 60^\circ = 0, \\ \Sigma Z &= -R_B + R_C \cos 30^\circ = 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5},$$

$$R_B = 20 \sqrt{3} \text{ кГ},$$

$$R_C = 40 \text{ кГ}.$$

**Задача 3-2.** Полый диск веса  $\bar{P}$  подвешен к потолку в точке  $A$  на трех нитях, которые к диску прикреплены так, что расстояние между точками крепления образуют равносторонний треугольник, центр тяжести которого  $C$  лежит на одной вертикали, проходящей через центр тяжести диска  $O$  и точ-

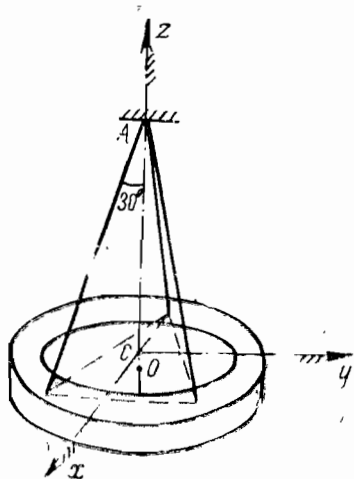


Рис. 3-10

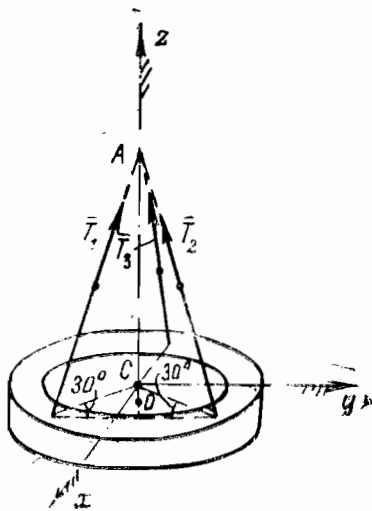


Рис. 3-11

ку  $A$ . Определить натяжение нитей, если они образуют с вертикальной прямой,  $OA$  углы по  $30^\circ$  (рис. 3-10).

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей в точке  $A$ , заменяя их реакциями  $T_1, T_2, T_3$  (натяжение нитей), рис. 3-11.

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем всю систему тел как отвердевшую.

3) *Равновесие* (третий шаг). Составляем уравнения равновесия для всей системы сил, на которую действует пространственная система сходящихся сил

$$\Sigma X = -T_1 \cos^2 60^\circ - T_2 \cos^2 60^\circ + T_3 \cos 60^\circ = 0,$$

$$\Sigma Y = T_1 \cos 60^\circ \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ \cos 30^\circ = 0,$$

$$\Sigma Z = T_1 \cos 30^\circ + T_2 \cos 30^\circ + T_3 \cos 30^\circ - P = 0.$$

Отсюда находим, что

$$T_1 = T_2 = T_3 = \frac{2\sqrt{3}}{9} P.$$

**Задача 3-3.** Груз  $Q$  весом  $1\text{ т}$  подвешен в точке  $D$ , как указано на рис. 3-12. Крепления стержней в точках  $A$ ,  $B$  и  $D$  шарнирные. Определить реакции опор  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

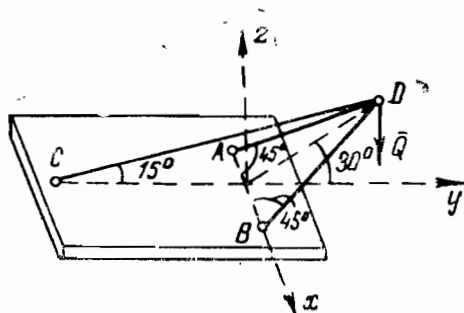


Рис. 3-12

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , заменяя их реакциями. При этом (так же, как и в задаче 3-1) на каждый из стержней действуют по две силы. Например, на стержень  $CD$  действует реакция  $S_C$  в точке  $C$  и равнодействующая всех сил, приложенных к этому стержню в точке  $D$ . Поэтому реакция  $S_C$  будет направлена по линии  $CD$ . Аналогично реакции  $S_A$  и  $S_B$  направлены соответственно по стержням  $AD$  и  $BD$  (рис. 3-13).

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем всю систему как отвердевшую группу тел.

3) *Равновесие* (третий шаг). Составляем уравнения равновесия для всей системы тел, находящихся под действием пространственной системы сходящихся сил

$$\Sigma X = S_A \cos 45^\circ - S_B \cos 45^\circ = 0,$$

$$\Sigma Y = S_A \cos 45^\circ \cos 30^\circ + S_B \cos 45^\circ \cos 30^\circ - S_C \cos 15^\circ = 0,$$

$$\Sigma Z = S_A \cos 45^\circ \cos 60^\circ + S_B \cos 45^\circ \cos 60^\circ - S_C \cos 75^\circ - Q = 0,$$

отсюда

$$S_A = S_B = 2,64 \text{ т}; \quad S_C = 3,35 \text{ т}.$$

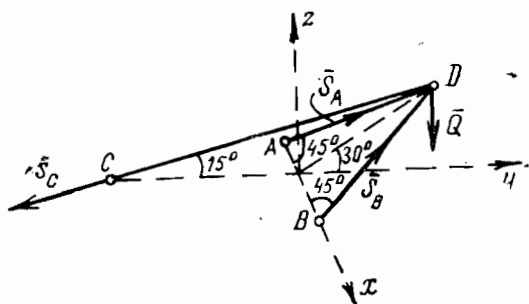


Рис. 3-13

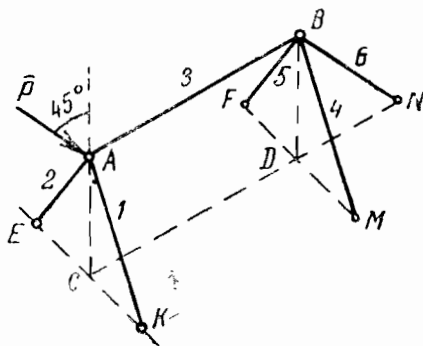


Рис. 3-14

**Задача 3-4** На рис. 3-14 изображена пространственная ферма, составленная из шести стержней 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сила  $\bar{P}$  действует на узел  $A$  в плоскости прямоугольника  $ABDC$ , при этом ее линия действия составляет с вертикалью  $CA$  угол  $45^\circ$ ;  $\triangle EAK = \triangle FBM$ . Углы равнобедренных треугольников  $EAK$ ,  $FBM$  и  $NDB$  при вершинах  $A$ ,  $B$  и  $D$  прямые. Определить усилия в стержнях, если  $P = 1 \text{ т}$ .

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей в точках  $E$ ,  $F$ ,  $N$ ,  $M$ ,  $K$ , заме-

$$\Sigma Z = -S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ - P \cos 45^\circ = 0,$$

$$\Sigma X = S_4 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\Sigma Y = -S_3 + S_6 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\Sigma Z = -S_4 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ - S_6 \cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда находим, что

$$S_1 = -0,5 \text{ м}, \quad S_4 = 0,5 \text{ м},$$

$$S_2 = -0,5 \text{ м}, \quad S_5 = 0,5 \text{ м},$$

$$S_3 = 0,707 \text{ м}, \quad S_6 = -1 \text{ м}.$$

Знак минус у  $S_1, S_2, S_3, S_6$  указывает на то, что каждая из этих сил соответственно направлена в сторону, противоположную той, которая указана на рис. 3-16.

## § 2. Момент силы относительно точки, как вектор

В разделе «Плоская статика» было выяснено, что характерными элементами момента силы относительно точки являются: величина момента, направление вращения момента. Поэтому мы момент силы относительно точки рассматривали как величину скалярную.

В разделе «Пространственная статика» к указанным двум элементам мы добавим третий, «плоскость поворота» и понимаем под ней плоскость, в которой расположена сила и точка, относительно которой берется момент.

Положение плоскости в пространстве определяется направлением прямой, перпендикулярной к ней, поэтому можно говорить не о плоскости поворота, а о перпендикуляре к ней. Отсюда следует, что момент силы определяется тремя элементами: величиной момента, направлением перпендикуляра к плоскости, содержащей силу и точку, и направлением вращения момента. Поэтому момент силы можно условно изображать в виде вектора.

Определение. Моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  называется вектор, приложенный в точке  $O$  по модулю, равный произведению величины силы на ее плечо  $h$  (в определенном масштабе) и направленный по перпендикуляру к плоскости поворота в ту сторону, чтобы, смотря с его конца,



видеть силу, вращающую тело вокруг этой точки, против движения часовой стрелки (рис. 3-17)

$$\vec{l} = m_o \vec{F}; \quad |\vec{l}| = |m_o \vec{F}| = F \cdot h, \quad m_o \vec{F} \perp \text{плоск. } \triangle OAB.$$

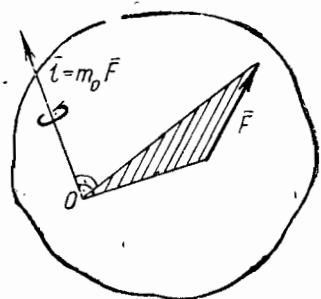


Рис. 3-17

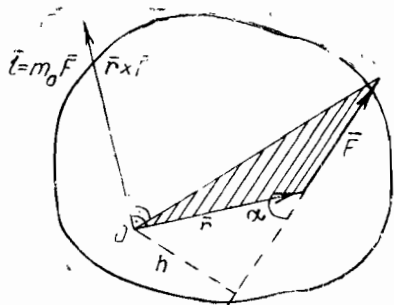


Рис. 3-18

Моменту силы относительно точки можно дать другое определение: моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  называется векторное произведение радиуса—вектора точки приложения силы на вектор силы (рис. 3-18)

$$m_o (\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

В самом деле,

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = F \cdot r \cdot \sin(\widehat{\vec{F}, \vec{r}}) = F \cdot r \sin \alpha = F \cdot h = |m_o \vec{F}| = |\vec{l}|.$$

Далее из определения векторного произведения двух векторов следует, что вектор  $\vec{r} \times \vec{F}$  перпендикулярен к плоскости, в которой содержатся векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , то есть к плоскости поворота и притом в ту же сторону, что и вектор  $\vec{l} = m_o \vec{F}$ , который по определению перпендикулярен к этой же плоскости (рис. 3-18).

Следовательно,

$$m_o \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F},$$

При решении практических задач часто приходится находить проекции вектора момента силы на прямоугольные оси

координат. Векторное произведение  $\vec{r} \times \vec{F}$  можно представить в виде определителя

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \\ x, y, z \\ X, Y, Z \end{vmatrix} =$$

$$= (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы,  $x, y, z$  — проекции радиуса вектора  $\vec{r}$  на прямоугольные оси координат, или, что то же самое, координаты точки приложения силы  $\vec{F}$ ,  $X, Y, Z$  — проекции силы  $\vec{F}$  на указанные оси (рис.

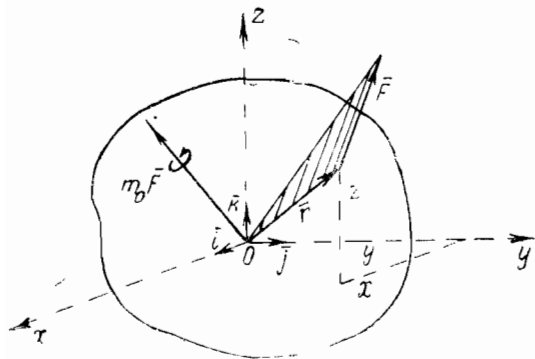


Рис. 3-19

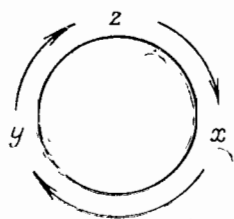


Рис. 3-20

3-19). Вектор  $\vec{l} = m_0 \vec{F}$  разложим по направлениям прямоугольных координатных осей

$$\vec{l} = m_0 \vec{F} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}.$$

Тогда векторное равенство

$$m_0 \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

можно представить в виде

$$l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k} = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}.$$

Отсюда получаем

$$l_x = np_x m_0 \vec{F} = yZ - zY,$$

$$l_y = np_y m_0 \vec{F} = zX - xZ,$$

$$l_z = np_z m_0 \vec{F} = xY - yX.$$

(3-5)

Эти формулы дают возможность определить проекции вектора — момента силы относительно данной точки  $O$  на прямоугольные координатные оси, если известны координаты точки приложения силы  $\vec{F}$  и ее проекции на эти оси. Для получения последних формул, как и во многих других случаях перехода от векторных формул к скалярным, удобно пользоваться правилом циклической перестановки букв. Это правило состоит в следующем. Для получения формул (3-5) достаточно написать первое уравнение системы (3-5), и остальные уравнения системы можно получить последовательно, заменяя  $z \sim x$ ,  $x \sim y$ ,  $y \sim z$ , как показано на рис. 3-20.

### § 3. Момент силы относительно оси

Пусть к телу приложена сила  $\vec{F}$ . Через любую точку  $O$ , взятую на данной оси, проведем плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную к этой оси, и на эту плоскость спроектируем силу  $\vec{F}$ , затем найдем величину момента полученной проекции  $\vec{F}_1$  относительно точки  $O$ , которая будет равна

$$|m_O \vec{F}_1| = F_1 \cdot h,$$

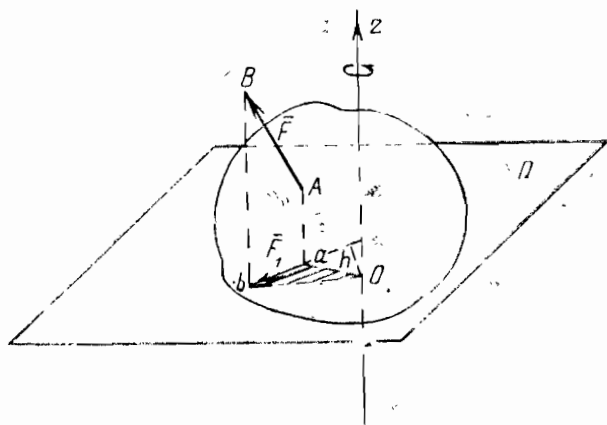


Рис. 3-21

где  $h$  — плечо силы  $\vec{F}_1$  относительно точки  $O$  (рис. 3-21). Это произведение, взятое с соответствующим знаком, называется моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси  $Oz$ .

Определение. Моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси  $Oz$  называется взятое с соответствующим знаком произведение

величины проекции  $\overline{F}_1$ , силы  $\overline{F}$  на плоскость, перпендикулярную оси, на расстояние  $h$  от точки  $O$  пересечения оси с плоскостью до линии действия силы  $\overline{F}_1$ , причем указанному произведению приписывается знак плюс, если перемещение правого винта, вращающегося вокруг оси  $Oz$ , под действием силы  $\overline{F}$  совпадает с направлением оси, и знак минус — в противном случае

$$m_z \overline{F} = F \cdot h.$$

Из чертежа видно, что величина момента силы относительно оси равна удвоенной площади треугольника  $oab$

$$|m_z \overline{F}| = F \cdot h = 2 \text{ площ. } \triangle oab.$$

Как мы видим, момент силы относительно оси есть скалярная величина.

Из формулы  $m_z \overline{F} = F \cdot h$  следует, что момент силы  $F$  относительно оси  $Oz$  равен нулю, когда сила параллельна оси ( $F_1 = 0$ ,  $m_z \overline{F} = 0$ ) или пересекает ось ( $h = 0$ ,  $m_z \overline{F} = 0$ ), или иначе, когда ось и сила лежат в одной плоскости.

Моменту силы относительно оси можно дать наглядную физическую интерпретацию. Допустим, что к твердому телу, могущему вращаться вокруг оси  $Oz$ , приложена сила  $\overline{F}$ . Разложим ее на две силы  $\overline{F}_2$  и  $\overline{F}_1$ , из которых одна параллельна оси, а другая перпендикулярна оси. При этом вращение тела вокруг оси вызывается силой  $\overline{F}_1$ , перпендикулярной оси, и эффект действия этой силы (угловое ускорение тела) тем больше, чем больше произведение  $F_1 h$ . Между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси существует определенная зависимость. Перейдем к установлению этой зависимости.

Зависимость между моментом силы относительно оси и моментом силы относительно любой точки, лежащей на этой оси.

**Теорема.** Момент силы относительно оси равен проекции вектора — момента силы относительно любой точки оси на эту ось

$$m_z \overline{F} = n p_z m_o \overline{F}.$$

*Доказательство.* Через любую точку  $O$ , взятую на оси  $z$ , проведем плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную к этой оси, и най-

дем моменты силы  $F$  относительно этой оси и точки  $O$ , которые по величине соответственно будут равны

$$m_z \bar{F} = 2 \text{ площ. } \triangle OA_1B_1;$$

$$|m_O \bar{F}| = 2 \text{ площ. } \triangle OAB.$$

Далее, так как

$$2 \text{ площ. } \triangle OA_1B_1 = 2 \text{ площ. } \triangle OAB \cdot \cos \alpha,$$

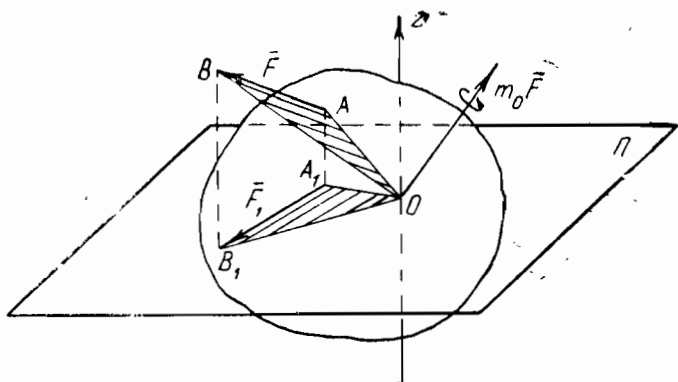


Рис. 3-22

где  $\alpha$  — угол между плоскостями  $OAB$  и  $OA_1B_1$ , равный углу между перпендикулярами к этим плоскостям, находим

$$|m_z \bar{F}| = |m_O \bar{F}| \cdot \cos \alpha.$$

Учитывая, что

$$|m_O \bar{F}| \cos \alpha = n p_z m_O \bar{F},$$

получим

$$m_z \bar{F} = n p_z m_O \bar{F}.$$

Аналогично можно доказать справедливость этой теоремы для случая, когда угол  $\alpha$  тупой.

Таким образом, чтобы найти проекцию вектора — момента силы относительно точки оси на эту ось, достаточно найти момент этой силы относительно оси, что во многих задачах сделать значительно проще.

Пример. К квадратной пластинке  $ABCD$ , сторона которой равна  $a$ , в точке  $C$  приложена сила  $F$ , линия действия которой с осью  $z$  образует угол в  $30^\circ$ . Вычислить момент этой силы относительно координатных осей (рис. 3-23).

Момент силы  $\vec{F}$  относительно координатных осей можно определить по ранее полученным формулам

$$m_x \vec{F} = n p_x, \quad m_A \vec{F} = y Z - z Y,$$

$$m_y \vec{F} = n p_y, \quad m_A \vec{F} = z X - x Z,$$

$$m_z \vec{F} = n p_z, \quad m_A \vec{F} = x Y - y X,$$

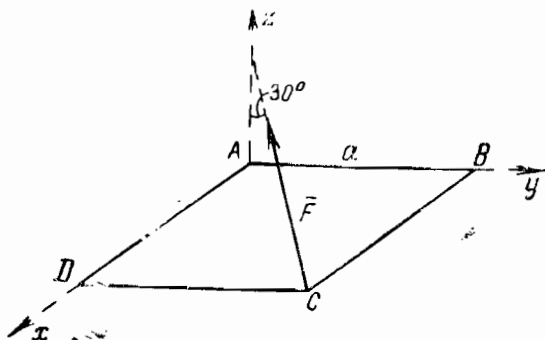


Рис. 3-23

где  $x, y, z$  — координаты точки приложения силы  $\vec{F}$ ;  $X, Y, Z$  — проекции этой силы на прямоугольные координатные оси.

Из рис. 3.23 видно, что  $x=a, y=a, z=0$ ;

$$X = -F \cos 60^\circ \cos 45^\circ = -F \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$Y = -F \cos 60^\circ \cos 45^\circ = -F \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$Z = F \cos 30^\circ = F \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Подставляя эти значения в формулы, соответственно определяющие  $m_x \vec{F}, m_y \vec{F}, m_z \vec{F}$ , найдем моменты силы  $F$  относительно координатных осей

$$m_x \vec{F} = F \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$m_y \vec{F} = -F \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$m_z \vec{F} = 0.$$

## § 4. Теория пар в пространстве

Изучение теории пар в пространстве начнем с доказательства следующего свойства пары сил.

**Теорема.** Пару сил, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары.

*Доказательство.* Пусть на абсолютно твердое тело действует пара  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  в плоскости  $\Pi_1$  (рис. 3-24). Проведем параллельную плоскость  $\Pi_2$  и отложим в этой

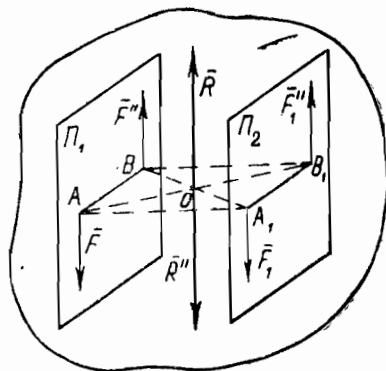


Рис. 3-24

плоскости отрезок  $A_1B_1$ , равный и параллельный отрезку  $AB$ . Приложим в точке  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $AB_1A_1B$  взаимно уравновешивающиеся силы  $\vec{R}$  и  $\vec{R}''$ , где

$$\vec{R} = 2\vec{F}, \vec{R}'' = 2\vec{F}'' = -2\vec{F} = -\vec{R}.$$

Заменяя теперь силы  $\vec{F}''$  и  $\vec{R}''$  равнодействующей  $\vec{F}_1$ , приложенной в точке  $A_1$ , и силы  $\vec{F}$  и  $\vec{R}$  равнодействующей  $\vec{F}_1'$ , приложенной в точке  $B_1$ , найдем

$$(\vec{F}, \vec{F}'') \sim \{\vec{F}, \vec{F}'', \vec{R}, \vec{R}''\} \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_1'\},$$

где

$$\vec{F}_1 = \vec{F}'' + \vec{R}'' = \vec{F},$$

$$\vec{F}_1' = \vec{F} + \vec{R} = \vec{F}''.$$

Таким образом, пара сил  $(\vec{F}, \vec{F}'')$ , действующая в плоскости  $\Pi_1$ , может быть перенесена в параллельную плоскость  $\Pi_2$ .

Из доказанной теоремы следует, что действие пары сил на абсолютно твердое тело, не зависит от положения плоскости действия пары и определяется лишь направлением линий в пространстве перпендикулярной плоскости действия пары. Отсюда приходим к следующему выводу.

Действие пары сил на абсолютно твердое тело определяется тремя элементами: величиной момента пары, направлением вращения пары и направлением прямой, перпендикулярной к плоскости действия пары. Будем поэтому момент пары изображать условно в виде вектора и называть его вектором — моментом пары и обозначать через  $m(\vec{F}, \vec{F}'')$ .

К плоскости действия пары  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  проведем прямую, перпендикулярную к ней, и на этой прямой отложим вектор  $m(\vec{F}, \vec{F}'')$ , длина которого в определенном масштабе равна

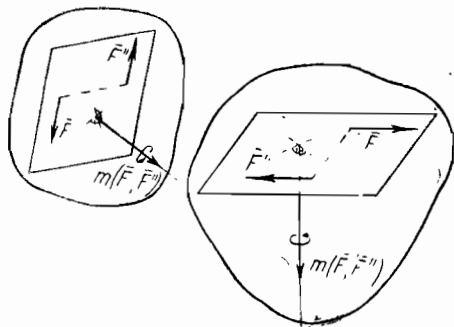


Рис. 3-25

моменту пары, и направим его в ту сторону, чтобы, смотря с его конца, видеть пару, вращающую абсолютно твердое тело против движения часовой стрелки (рис. 3-25). Такой вектор  $\vec{i} = m(\vec{F}, \vec{F}'')$  очевидно будет определять все три элемента, которыми характеризуется пара, ибо прямая, по которой он направлен, определяет плоскость действия пары, его направление по этой прямой — направление вращения пары, а его модуль — величину момента пары. Этот вектор можно прикладывать в любой точке абсолютно твердого тела.

Таким образом, вектор — момент пары есть вектор свободный.



Определение. Моментом пары называется свободный вектор, в определенном масштабе равный произведению одной из сил пары на ее плечо и направленный по перпендикуляру к плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение тела парой представляется против движения часовой стрелки. Так как вектор — момент пары полностью определяет пару, то в дальнейшем вместо пары будет указывать ее вектор — момент. Из определения следует, что вектор — момент пары равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары

$$m(\bar{F}, \bar{F}'' ) = m_B \bar{F} = \bar{r} \times \bar{F}.$$

В самом деле, имеем

$$|m(\bar{F}, \bar{F}'' )| = F \cdot d,$$

$$|m_B \bar{F}| = F \cdot d,$$

где  $d$  — плечо пары (рис. 3-26).

Вектор  $m(\bar{F}, \bar{F}'' )$  и вектор  $\bar{r} \times \bar{F}$  параллельны между собой и направлены в одну и ту же сторону, что следует из опреде-

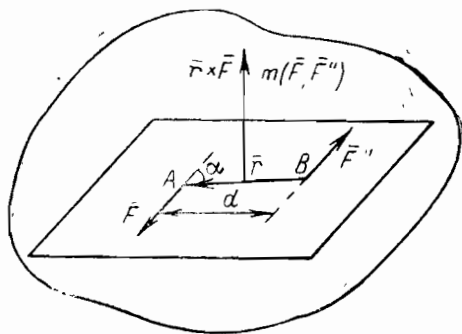


Рис. 3-26

ления вектора — момента пары и из определения векторного произведения двух векторов.

Следовательно,

$$m(\bar{F}, \bar{F}'' ) = \bar{r} \times \bar{F},$$

$$m(\bar{F}, \bar{F}'' ) = m_B \bar{F} = m_A \bar{F}'' ,$$

то есть момент пары равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.

Теперь перейдем к рассмотрению и доказательству ряда теорем о парах, расположенных произвольным образом в пространстве.

**Теорема.** Пара сил не имеет равнодействующей и не может быть уравновешена одной силой.

*Доказательство.* Предположим, что пара сил имеет равнодействующую  $\bar{R}$ , тогда она уравновешивается силой  $\bar{R}_1 = -\bar{R}$ , направленной по линии ее действия в противоположную сторону, то есть

$$(\bar{F}, \bar{F}'', \bar{R}_1) \sim (\bar{R}, \bar{R}_1) \sim 0.$$

Таким образом, предположение, что пара сил имеет равнодействующую, приводит к тому, что тело под действием трех сил  $\bar{F}, \bar{F}'', \bar{R}_1$  находится в покое.

Покажем, что тело под действием этих трех сил в покое находиться не будет. В самом деле, пару сил  $(\bar{F}, \bar{F}'')$  пере-

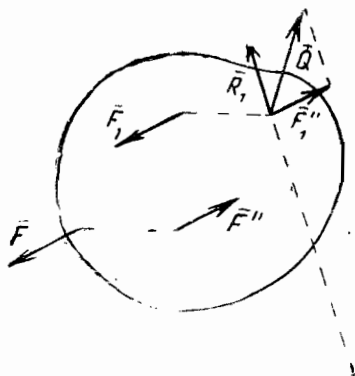


Рис. 3-27

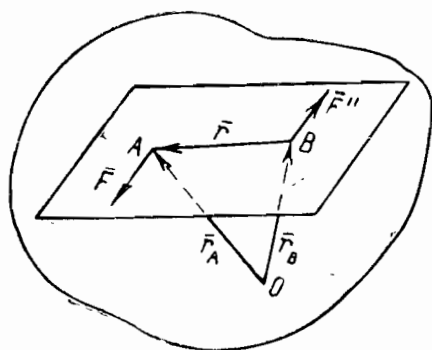


Рис. 3-28

несем в плоскость, параллельную плоскости действия пары и проходящую через точку приложения силы  $\bar{R}_1$ , затем начало одной из сил пары, например силы  $\bar{F}''$  совместим с точкой приложения силы  $\bar{R}_1$  и силы  $\bar{R}_1$  и  $\bar{F}_1''$  сложим (рис. 3-27).

Равнодействующую сил  $\bar{R}_1$  и  $\bar{F}_1''$  обозначим через  $\bar{Q}$ , тогда получим

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_1'', \bar{Q}) \sim (\bar{F}_1, \bar{Q}) \sim 0.$$

Но тело под действием этих двух сил не будет находиться в покое, ибо силы  $\bar{Q}$  и  $\bar{F}_1$  не направлены по одной прямой (аксиома I).

Следовательно, наше предположение, что пара сил имеет равнодействующую, неверно. Если пара сил не имеет равнодействующей, то она не может быть уравновешена одной силой.

**Теорема о сумме моментов сил пары.** Вектор — момент пары равен геометрической сумме вектор — моментов сил пары относительно произвольной точки.

*Доказательство.* Пусть на абсолютно твердое тело действует пара сил (рис. 3.28). Возьмем произвольную точку  $O$  и относительно этой точки найдем сумму моментов сил пары. Получим

$$\begin{aligned} m_O \bar{F} + m_O \bar{F}'' &= \bar{r}_A \times \bar{F} + \bar{r}_B \times \bar{F}'' = \\ &= (\bar{r}_A - \bar{r}_B) \times \bar{F} = \bar{r} \times \bar{F}, \end{aligned}$$

так как  $\bar{F}'' = -\bar{F}$ , с другой стороны

$$m(\bar{F}, \bar{F}'') = m_B \bar{F} = \bar{r} \times \bar{F},$$

следовательно,

$$m(\bar{F}, \bar{F}'') = m_O \bar{F} + m_O \bar{F}'',$$

что и требовалось доказать.

Если точка  $O$  совпадает с одной из точек приложения сил пары, например, с точкой  $B$ , то из полученной формулы следует, что

$$m(\bar{F}, \bar{F}'') = m_B \bar{F}, \text{ ибо } m_B \bar{F}'' = 0.$$

**Теорема о сложении пар, лежащих в пересекающихся плоскостях.** Две пары, приложенные к абсолютно твердому телу и лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной им эквивалентной парой, вектор — момент которой равен геометрической сумме вектор — моментов данных пар.

*Доказательство.* Пусть на абсолютно твердое тело действуют две пары  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ ,  $(\bar{Q}, \bar{Q}'')$ , лежащие в плоскостях 1 и 2 (рис. 3-29). Продолжим эти плоскости до взаимного пересечения, и на линии пересечения возьмем произвольный отрезок  $AB = h$ . Заменяем пары  $(\bar{P}, \bar{P}'')$  и  $(\bar{Q}, \bar{Q}'')$  им эквивалентными  $(\bar{F}_1, \bar{F}_1'')$  и  $(\bar{F}_2, \bar{F}_2'')$ , то есть

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_1'') \sim (\bar{P}_1, \bar{P}_1''); \quad (\bar{F}_2, \bar{F}_2'') \sim (\bar{Q}_1, \bar{Q}_1'').$$

Для этого моменты пар  $(\bar{F}_1, \bar{F}_1')$  и  $(\bar{F}_2, \bar{F}_2')$  должны быть равны соответственно моментам данных пар, то есть

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}_1') = m(\bar{P}, \bar{P}'''); \quad m(\bar{F}_2, \bar{F}_2') = m(\bar{Q}, \bar{Q}''').$$

Эти две новые пары заменим одной им эквивалентной парой  $(\bar{F}, \bar{F}''')$ . Для этого силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_1'''$  и  $\bar{F}_2'''$ , соответственно

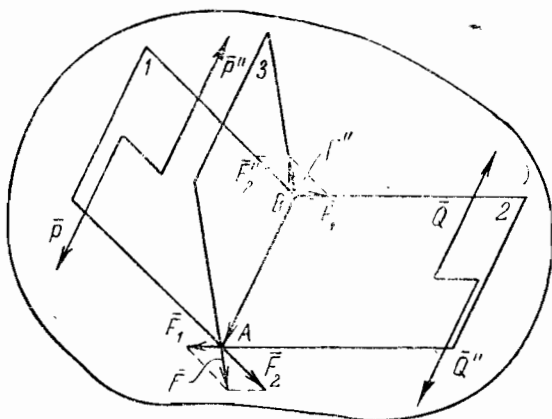


Рис. 3-29

приложенные в точках A и B, сложим по правилу параллелограмма, тогда равнодействующая этих сил образует пару  $(\bar{F}, \bar{F}''')$ , лежащую в плоскости 3 и эквивалентную данным двум парам

$$\{(\bar{P}, \bar{P}'''), (\bar{Q}, \bar{Q}''')\} \sim \{(\bar{F}_1, \bar{F}_1'), (\bar{F}_2, \bar{F}_2')\} \sim (\bar{F}, \bar{F}''').$$

Покажем теперь, что вектор—момент пары  $(\bar{F}, \bar{F}''')$  равен геометрической сумме векторов—моментов данных пар.

Имеем

$$\begin{aligned} m(\bar{F}_1, \bar{F}_1') + m(\bar{F}_2, \bar{F}_2') &= m_B \bar{F}_1 + m_B \bar{F}_2 = \\ &= \bar{B}A \times \bar{F}_1 + \bar{B}A \times \bar{F}_2 = \bar{B}A \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \bar{B}A \times \bar{F} = m(\bar{F}, \bar{F}'''). \end{aligned}$$

Но по условию

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}_1') + m(\bar{F}_2, \bar{F}_2') = m(\bar{P}, \bar{P}''') + m(\bar{Q}, \bar{Q}'''),$$

откуда находим

$$m(\bar{F}, \bar{F}''') = m(\bar{P}, \bar{P}''') + m(\bar{Q}, \bar{Q}'''),$$

что и требовалось доказать.

Если на абсолютно твердое тело действует система пар

$$\{(\bar{F}_1, \bar{F}'_1), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n)\},$$

произвольно расположенных в пространстве с моментами

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}'_1), \dots, m(\bar{F}_n, \bar{F}'_n),$$

то, последовательно применяя только что доказанную теорему, получим, что эту систему пар можно заменить одной равнодействующей парой

$$(\bar{R}, \bar{R}'') \sim \{(\bar{F}_1, \bar{F}'_1), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n)\},$$

вектор—момент  $m(\bar{R}, \bar{R}'')$  которой равен геометрической сумме, вектор—моментов данных пар

$$m(\bar{R}, \bar{R}'') = \sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}'_k),$$

то есть этот вектор по величине и направлению равен замыкающей стороне многоугольника, построенного на вектор—моментах слагаемых пар.

Если пары, действующие на абсолютно твердое тело, лежат в параллельных плоскостях, то вектор—моменты этих пар параллельны и момент равнодействующей пары также параллелен вектор—моментам этих пар и по величине будет равен алгебраической сумме моментов слагаемых пар. Поэтому моменты пар, расположенных в одной плоскости, можно рассматривать как скалярные величины.

**Теорема о равновесии системы пар в пространстве.** Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в покое под действием системы пар, расположенных в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов пар была равна нулю.

Заменим систему пар  $\{(\bar{F}_1, \bar{F}'_1), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n)\}$  эквивалентной парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ , то есть

$$\{(\bar{F}_1, \bar{F}'_1), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n)\} \sim (\bar{P}, \bar{P}''),$$

где

$$m(\bar{P}, \bar{P}'') = \sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}'_k).$$

Для того чтобы тело находилось в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы  $m(\bar{P}, \bar{P}'')$  был равен нулю, откуда

$$\sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}'_k) = 0.$$

## § 5. Приведение пространственной системы сил к данному центру

Прежде чем перейти к решению этой первой задачи статики, предварительно докажем лемму о переносе силы (лемма Пуансо).

**Лемма.** Силу  $\vec{F}$ , приложенную в какой-нибудь точке  $A$  абсолютно твердого тела, можно переносить параллельно самой себе в любую точку  $O$  этого тела, присоединяя при этом пару, вектор—момент которой равен вектору—моменту силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ .

**Доказательство.** Пусть в точке  $A$  абсолютно твердого тела приложена сила  $\vec{F}$ . В какой-нибудь точке  $O$  этого тела приложим две силы  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , по величине равные силе  $\vec{F}$ , направленные по прямой, параллельной силе  $\vec{F}$  в противоположные стороны (рис. 3.30). Такое присоединение системы сил  $(\vec{F}', \vec{F}'') \sim 0$  не изменит действие силы  $\vec{F}$  на данное тело (аксиома 2), следовательно,

$$\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'').$$

Но система трех сил  $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$  эквивалентна силе  $\vec{F}$ , приложенной в точке  $O$  и паре  $(\vec{F}, \vec{F}'')$ , следовательно,

$$\vec{F} \sim \{\vec{F}', (\vec{F}, \vec{F}'')\},$$

причем

$$m(\vec{F}, \vec{F}'') = m_O \vec{F}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о приведении пространственной системы сил к центру  $O$ .

**Теорема.** Пространственная система сил  $\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\}$ , приложенная к абсолютно твердому телу, приводится к одной силе  $\vec{R}$ , равной геометрической сумме сил, приложенной в любой точке  $O$  тела и паре  $(\vec{P}, \vec{P}'')$  с моментом  $L_0$  равным сумме моментов всех сил относительно той же точки  $O$ .

$$\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{R}, (\vec{P}, \vec{P}'')\},$$

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F}, \quad \vec{L}_O = m(\vec{P}, \vec{P}'') = \Sigma m_O \vec{F}.$$

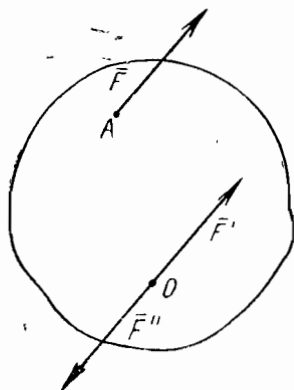


Рис. 3.30

Пусть к абсолютно твердому телу приложена произвольная пространственная система сил

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}.$$

Переносим каждую силу этой системы параллельно самой себе в произвольную точку  $O$  и присоединяем при этом пару на

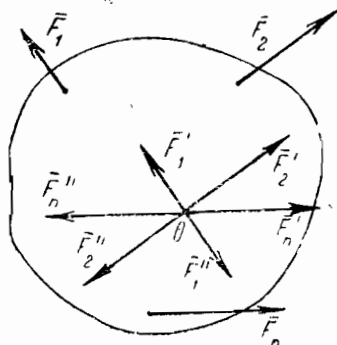


Рис. 3-31

основании доказанной леммы, мы заменим данную систему сил системой сил  $\{\bar{F}'_1, \dots, \bar{F}'_n\}$ , приложенных в точке  $O$  и системой пар  $\{(\bar{F}_1, \bar{F}''_1), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}''_n)\}$  (рис. 3-31).

Тогда

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim \{\bar{F}'_1, \dots, \bar{F}'_n, (\bar{F}_1, \bar{F}''_1), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}''_n)\}.$$

Сходящуюся систему сил  $\{\bar{F}'_1, \dots, \bar{F}'_n\}$  заменим одной эквивалентной силой  $\bar{R} \sim \{\bar{F}'_1, \dots, \bar{F}'_n\}$ , приложенной в точке  $O$  и равной геометрической сумме данных сил

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}'_k = \Sigma \bar{F}$$

(так как силы  $\bar{F}'_k$  соответственно геометрически равны силам  $\bar{F}_k$ ). Систему пар  $\{(\bar{F}_1, \bar{F}''_1), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}''_n)\}$  заменим одной эквивалентной парой

$$(\bar{P}, \bar{P}'') \sim \{(\bar{F}_1, \bar{F}''_1), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}''_n)\},$$

вектор—момент  $\bar{L}_O = m(\bar{P}, \bar{P}'')$  которой равен геометрической сумме вектор—моментов данных пар

$$\bar{L}_O = m(\bar{P}, \bar{P}'') = \sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}''_k).$$

Но по теореме о моментах сил пары

$$\sum_{\kappa=1}^n m(\bar{F}_\kappa, \bar{F}_\kappa) = \sum_{\kappa=1}^n m_O(\bar{F}_\kappa) + \sum_{\kappa=1}^n m_O(\bar{F}_\kappa) = \sum m_O(\bar{F}),$$

ибо все силы  $\bar{F}_\kappa$  приложены в точке  $O$  и  $m_O(\bar{F}_\kappa) = 0$ .

Тогда окончательно получим

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim \{\bar{R}, (\bar{P}, \bar{P}''')\},$$

$$\bar{R} = \Sigma \bar{F}, \quad \bar{L}_O = m(\bar{P}, \bar{P}''') = \Sigma m_O \bar{F}. \quad (3-6)$$

Вектор  $\bar{R}$ , равный геометрической сумме всех сил, называется главным вектором системы сил. Вектор  $\bar{L}_O$ , равный геометрической сумме моментов всех сил относительно любой точки  $O$ , называется главным вектор — моментом данной системы сил относительно этой точки. Замена системы сил силой  $\bar{R}$ , приложенной в точке  $O$ , и парой  $(\bar{P}, \bar{P}''')$  с моментом  $\bar{L}_O$ , назы-

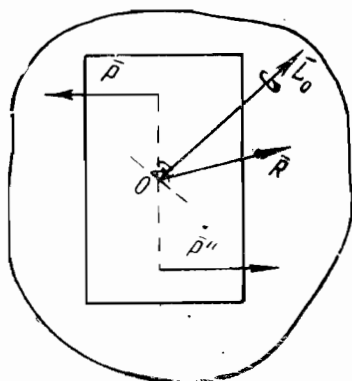


Рис. 3-32

вается приведением системы сил к точке  $O$ , а сама точка  $O$  называется центром приведения (рис. 3.32).

Векторные уравнения (3-6) можно заменить скалярными уравнениями. Для этого спроектируем обе части векторных уравнений (3-6) на оси координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , проходящие через центр приведения  $O$ , и воспользуемся теоремой о том, что проекция момента силы относительно точки оси на эту ось равна моменту силы относительно оси

$$np_x m_O \bar{F} = m_x \bar{F}; \quad L_x = \Sigma np_x m_O \bar{F} = \Sigma m_x(\bar{F}).$$



Получим

$$\begin{aligned}R_x &= \Sigma X, & L_x &= \Sigma m_x \bar{F}, \\R_y &= \Sigma Y, & L_y &= \Sigma m_y \bar{F}, \\R_z &= \Sigma Z, & L_z &= \Sigma m_z \bar{F},\end{aligned}\tag{3-7}$$

где  $R_x, R_y, R_z$  — проекции главного вектора  $\bar{R}$ ,  
а  $L_x, L_y, L_z$  — проекции главного момента  $\bar{L}_O$  на оси координат.

Таким образом, приходим к выводу: проекция главного вектора на какую-либо ось равна сумме проекций всех сил на ту же ось, проекция главного момента системы на какую-либо ось равна сумме моментов всех сил относительно этой оси. Скалярные уравнения (3-7) эквивалентны векторным уравнениям (3-6). Пользуясь уравнениями (3-7), можно найти величины и направления главного вектора  $\bar{R}$  и главного момента  $\bar{L}_O$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{R_x}{R},$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{R_y}{R},$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{k}) = \frac{R_z}{R},$$

$$L_O = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2},$$

$$\cos(\bar{L}, \bar{i}) = \frac{L_x}{L_O},$$

$$\cos(\bar{L}, \bar{j}) = \frac{L_y}{L_O},$$

$$\cos(\bar{L}, \bar{k}) = \frac{L_z}{L_O}.$$

## § 6. Условия равновесия пространственной системы сил

**Теорема.** Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием пространственной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный вектор — момент относительно произвольной точки были равны нулю или иначе, чтобы геометрическая сумма сил

и сумма моментов сил относительно произвольной точки была равна нулю

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \Sigma \bar{F} = 0, \\ L_o &= \Sigma m_o \bar{F} = 0.\end{aligned}\quad (3-8)$$

*Доказательство.* Выберем точку  $O$  за центр приведения и заменим систему силой  $\bar{R}$  и парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim \{\bar{R}, (\bar{P}, \bar{P}'')\}.$$

Для того чтобы тело находилось в состоянии покоя, необходимо, чтобы сила  $\bar{R}$  уравновешивалась парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ , а для этого необходимо, чтобы сила  $\bar{R} = \Sigma \bar{F}$  была равна нулю и момент пары  $L_o = m(\bar{P}, \bar{P}'') = \Sigma m_o \bar{F}$  был равен нулю, ибо пара сил по доказанному не может уравновешиваться силой.

Условия (3-8) являются также достаточными для равновесия системы сил, ибо если  $\bar{R} = 0$  и  $L_o = m(\bar{P}, \bar{P}'') = 0$ , то система сил  $\{\bar{R}, (\bar{P}, \bar{P}'')\} \sim 0$  и, следовательно, заданная система сил  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\}$  находится в равновесии.

Условия равновесия пространственной системы сил в аналитической форме

**Теорема.** Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием пространственной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех этих сил на каждую из координатных осей и сумма их моментов относительно каждой из этих осей была равна нулю

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0, & \Sigma m_x \bar{F} &= 0, \\ \Sigma Y &= 0, & \Sigma m_y \bar{F} &= 0, \\ \Sigma Z &= 0, & \Sigma m_z \bar{F} &= 0.\end{aligned}\quad (3-9)$$

*Доказательство.* На основании предыдущей теоремы для того, чтобы абсолютно твердое тело под действием системы сил находилось в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы величина главного вектора и величина главного момента были равны нулю

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2} = 0; \\ L_o &= \sqrt{(\Sigma m_x \bar{F})^2 + (\Sigma m_y \bar{F})^2 + (\Sigma m_z \bar{F})^2} = 0,\end{aligned}$$

а для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3-9).

### Частные случаи

*Пространственная система сходящихся сил.* Представим себе, что абсолютно твердое тело находится в покое под действием пространственной системы сходящихся сил (рис. 3-33).

В этом случае уравнения

$$\Sigma m_x \bar{F} = 0, \quad \Sigma m_y \bar{F} = 0, \quad \Sigma m_z \bar{F} = 0$$

обращаются в тождество, так как момент каждой силы относительно каждой из координатных осей равен нулю (силы

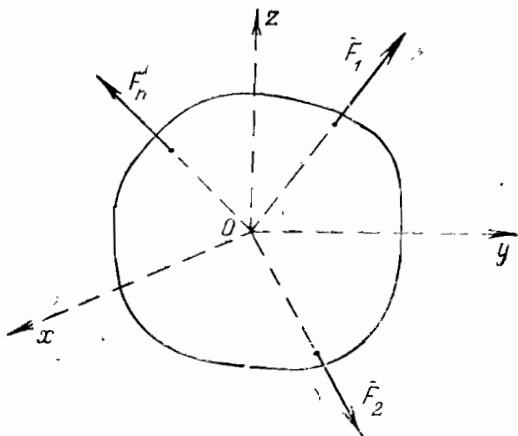


Рис. 3-33

пересекают координатные оси). Из шести уравнений остаются только три

$$\Sigma X = 0,$$

$$\Sigma Y = 0,$$

$$\Sigma Z = 0,$$

которые были получены ранее

*Пространственная система параллельных сил.* Пусть абсолютно твердое тело находится в состоянии покоя под действием пространственной системы параллельных сил. Выберем оси координат так, чтобы одна из осей, например ось  $Oz$ , была параллельна линиям действия данных сил (рис. 3-34). Тогда уравнения равновесия

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma m_z \bar{F} = 0$$

обращаются в тождество и для данной системы параллельных сил получим такие три уравнения равновесия

$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma m_x(\bar{F}) = 0, \quad \Sigma m_y(\bar{F}) = 0.$$

Следовательно, чтобы абсолютно твердое тело находилось в состоянии покоя под действием пространственной системы параллельных сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма

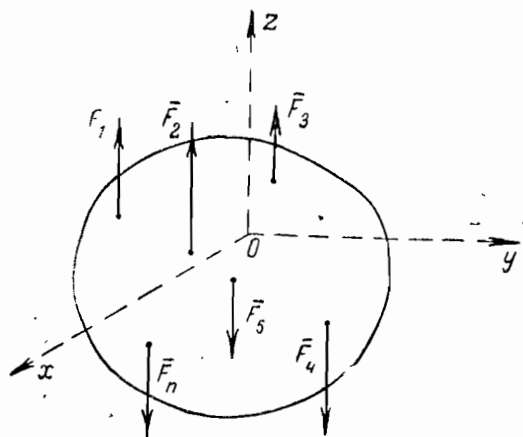


Рис. 3-34

проекций этих сил на ось, параллельную данным силам, и сумма моментов их относительно двух других координатных осей были равны нулю.

*Плоская система сил.* Пусть на абсолютно твердое тело действует плоская система сил, под действием которой оно находится в состоянии покоя. Совместим одну из координатных плоскостей, например плоскость  $xOy$ , с плоскостью действия сил (рис. 3-35). Тогда уравнения равновесия

$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma m_x \bar{F} = 0, \quad \Sigma m_y \bar{F} = 0$$

превращаются в тождества. Далее, так как сила  $F_x$  лежит в плоскости  $xOy$ , то момент этой силы относительно оси  $Oz$  равен моменту этой силы относительно точки  $O$ , то есть

$$m_z \bar{F} = m_o \bar{F}.$$

Здесь  $m_o \bar{F}$  рассматривается как скалярная величина.

Тогда из шести уравнений равновесия (3-9) получим известные уже нам три уравнения равновесия плоской системы сил.

$$\Sigma X = 0,$$

$$\Sigma Y = 0,$$

$$\Sigma m_o \bar{F} = 0.$$

Дальнейшее изложение теории и решение некоторых задач пространственной статики будет требовать знания теоремы Вариньона. Перейдем к формулировке и доказательству этой теоремы.

**Теорема.** Если пространственная система сил приводится к одной равнодействующей силе  $\bar{R}$ , то момент равнодействующей

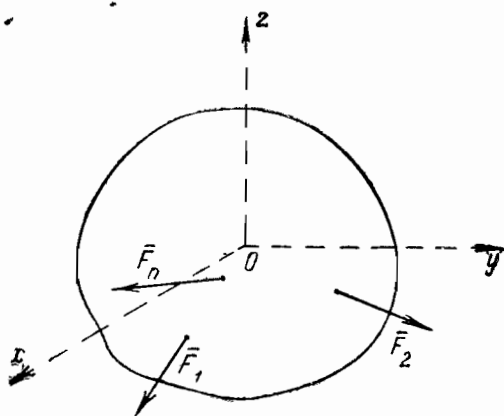


Рис. 3-35

щей относительно любой точки  $O$  равен геометрической сумме моментов всех данных сил относительно той же точки

$$m_o \bar{R} = \Sigma m_o \bar{F}.$$

*Доказательство.* Если в любой точке, взятой на линии действия равнодействующей  $\bar{R}$ , приложить силу  $\bar{R}'$ , равную и противоположно направленную равнодействующей, то система сил  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'\}$  будет эквивалентна нулю (рис. 3-36). Для такой системы сил главный вектор—момент относительно любой точки  $O$  будет равен нулю

$$\bar{L}_O = \sum_{\kappa=1}^n m_o \bar{F}_\kappa + m_o \bar{R}' = 0,$$

но

$$m_O \bar{R}' = -m_O \bar{R},$$

тогда

$$\Sigma m_O \bar{F} - m_O \bar{R} = 0.$$

Отсюда

$$m_O \bar{R} = \Sigma m_O \bar{F}.$$

Следствие из теоремы Вариньона. Если пространственная система сил приводится к одной равнодействующей силе, то момент равнодействующей относительно любой

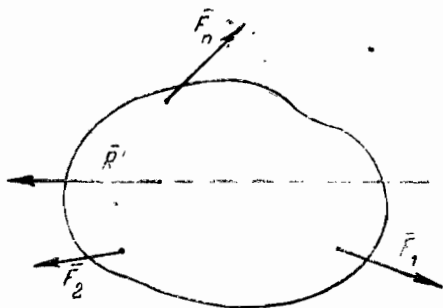


Рис. 3-36

оси равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно той же оси

$$m_x \bar{R} = \Sigma m_x \bar{F}.$$

*Доказательство.* Проектируя векторное равенство

$$m_O \bar{R} = \Sigma m_O \bar{F}$$

на ось  $Ox$ , проходящую через точку  $O$ , получим

$$np_x m_O \bar{R} = \Sigma np_x m_O \bar{F},$$

но

$$np_x m_O \bar{R} = m_x \bar{R}, \quad \Sigma np_x m_O \bar{F} = \Sigma m_x \bar{F}$$

(см. теорему о зависимости между моментами силы относительно точки и оси),

откуда

$$m_x \bar{R} = \Sigma m_x \bar{F}.$$

**Задача 3-5.** Стол стоит на трех ножках, концы которых  $A$ ,  $B$  и  $C$  образуют равносторонний треугольник со стороной  $a$ . Вес стола  $Q$  направлен по вертикали  $zOO_1$ , проходя-

шей через центр  $O_1$  треугольника  $ABC$ . На столе помещен груз  $P$  в точке  $M$ , координаты которой  $x$  и  $y$ ; ось  $Oy$  параллельна  $AB$ . Определить давление каждой ножки на гладкий пол (рис. 3-37).

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , заменяя их

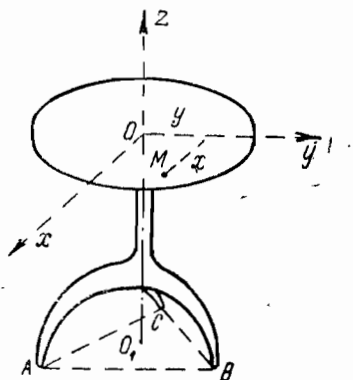


Рис. 3-37

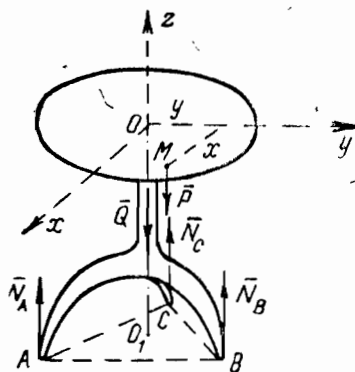


Рис. 3-38

реакциями  $N_A$ ,  $N_B$ ,  $N_C$ , которые направлены по нормальям к полу в точках  $A$ ,  $B$ , и  $C$  (рис. 3-38).

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем стол как абсолютно твердое тело.

3) *Равновесие* (третий шаг). Стол находится в покое под действием пространственной системы параллельных сил, для которой можно составить три уравнения равновесия

$$\Sigma Z = N_A + N_B + N_C - Q - P = 0,$$

$$\Sigma m_x \bar{F} = -N_A \frac{a}{2} + N_B \frac{a}{2} - P_x = 0,$$

$$\Sigma m_y \bar{F} = -N_A \frac{a\sqrt{3}}{6} - N_B \frac{a\sqrt{3}}{6} + N_C \frac{a\sqrt{3}}{3} + P_y = 0,$$

отсюда

$$N_A = \frac{Q+P}{3} + \left( \frac{\sqrt{3}}{3} x - y \right) \frac{P}{a},$$

$$N_B = \frac{Q+P}{3} + \left( y + \frac{\sqrt{3}}{3} x \right) \frac{P}{a},$$

$$N_C = \frac{Q+P}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{a} P.$$

**Задача 3-6.** Однородная прямоугольная рама весом  $20 \text{ кГ}$  прикреплена к стене при помощи шарового шарнира  $A$  и петли  $B$  и удерживается в горизонтальном положении веревкой  $CE$ , привязанной в точке  $C$  рамы и к гвоздю  $E$ , вбитому в

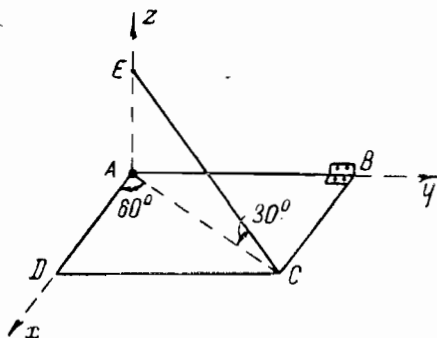


Рис. 3-39

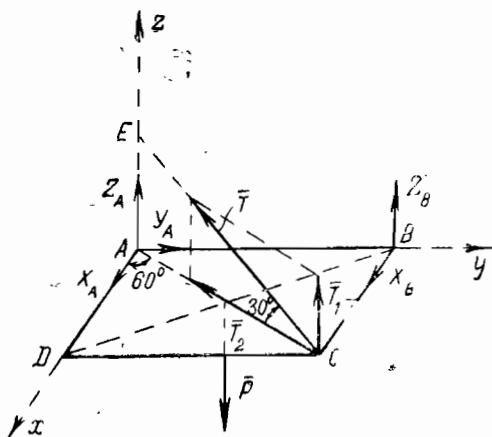


Рис. 3-40

стену на одной вертикали с  $A$ , причем  $\angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$ . Определить натяжение веревки и опорные реакции (рис. 3-39).

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей и заменяем связь в точке  $A$  реакцией  $R_A$ , направление которой неизвестно, и поэтому разла-



гаем ее на составляющие  $X_A, Y_A, Z_A$ , а реакцию в точке  $B$ , перпендикулярную к оси, разлагаем на составляющие  $X_B, Z_B$ . Натяжение обозначаем через  $T$  (рис. 3-40).

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем систему как абсолютно твердое тело.

3) *Равновесие* (третий шаг). Рама находится в покое под действием произвольной пространственной системы сил, для которой можно составить шесть уравнений равновесия и из них определить все шесть неизвестных. При определении момента силы  $T$  относительно координатных осей будем находить момент ее составляющих, одна из которых  $T_1$  параллельна оси  $Z$ , а другая  $T_2$  ей перпендикулярна (рис. 3-40). Уравнения равновесия будут иметь вид

$$\Sigma X = X_A + X_B - T \cos 30^\circ \cos 60^\circ = 0,$$

$$\Sigma Y = Y_A - T \cos 30^\circ \cos 30^\circ = 0,$$

$$\Sigma Z = Z_A + Z_B + T \cos 60^\circ - P = 0,$$

$$\Sigma m_x \bar{F} = -P \frac{AB}{2} + Z_B AB + T \cos 30^\circ AB = 0,$$

$$\Sigma m_y \bar{F} = P \frac{AD}{2} - T \cos 30^\circ AD = 0,$$

$$\Sigma m_z \bar{F} = -X_B AB = 0.$$

Отсюда

$$T = 20 \text{ кг}; \quad X_A = 8,66 \text{ кг}; \quad Y_A = 15 \text{ кг}; \quad Z_A = 10 \text{ кг}; \\ X_B = Z_B = 0.$$

**Задача 3-7.** Горизонтальный вал трансмиссии, несущий два шкива  $C$  и  $D$  ременной передачи, может вращаться в подшипниках  $A$  и  $B$ . Радиусы шкивов  $r_C = 20 \text{ см}$ ,  $r_D = 25 \text{ см}$ ; расстояния шкивов от подшипников:  $a = b = 50 \text{ см}$ , расстояние между шкивами  $c = 100 \text{ см}$ . Натяжение ветвей ремня, надетого на шкив  $C$ , горизонтальны и имеют величины  $T_1$  и  $t_1$ , причем  $T_1 = 2t_1 = 500 \text{ кг}$ ; натяжения ветвей ремня, надетого на шкив  $D$ , образуют с вертикалью угол  $\alpha = 30^\circ$  и имеют величины  $T_2$  и  $t_2$ , причем  $T_2 = 2t_2$ . Определить натяжения  $T_2$  и  $t_2$  в условиях равновесия и реакции подшипников, вызванные натяжениями ремней (рис. 3-41).

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей, заменяя связи реакциями  $\bar{R}_A$  и  $R_B$ , перпендикулярными к оси  $AB$ , и разлагаем их на составляющие  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$  соответственно (рис. 3-42).

**Задача 3-8.** Прямоугольная дверь, имеющая вертикальную ось вращения  $AB$ , открыта на угол  $\angle CAD = 60^\circ$  и удерживается в этом положении двумя веревками, из которых одна  $CD$  перекинута через блок и натягивается грузом  $P = 32 \text{ кГ}$ , другая  $EF$  привязана к точке  $F$  пола. Вес двери  $64 \text{ кГ}$ , ее ширина  $AC = AD = 18 \text{ дм}$ , высота  $AB = 24 \text{ дм}$ . Пренебрегая трением на блоке, определить натяжение  $T$  веревки  $EF$ , а

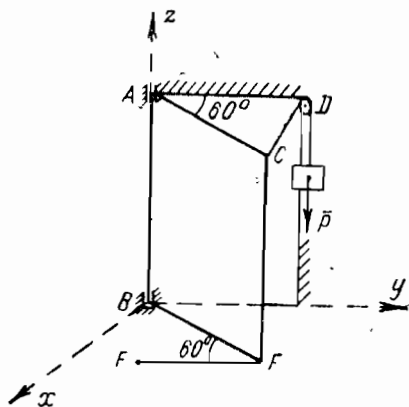


Рис. 3-43

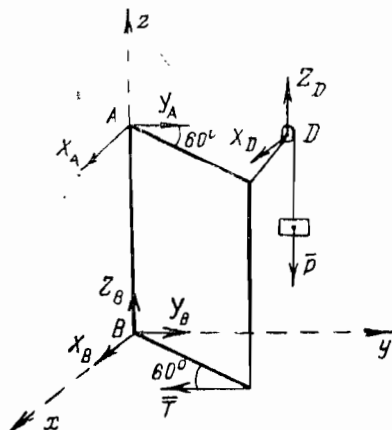


Рис. 3-44

также реакции цилиндрического шарнира в точке  $A$  и подпятника в точке  $B$  (рис. 3-43).

**Решение.**

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаемся от внешних связей и заменяем их реакциями  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{R}_D$  (на рис. 3-44 они не указаны), затем первую разлагаем на  $X_A$ ,  $Y_A$ , вторую на  $X_B$ ,  $Y_B$ ,  $Z_B$  и третью на  $X_D$  и  $Z_D$  (рис. 3-44).

2) *Расчленение* (второй шаг). Расчленяем систему на две группы тел: блок вместе с нитью и грузом и дверь (рис. 3-45).

3) *Равновесие* (третий шаг). Составляем шесть уравнений для двери, к которой приложена пространственная система сил и уравнение моментов для плоской системы сил, приложенных к блоку с грузом

$$\Sigma X = X_A + X_B - T_1 \cos 30^\circ = 0,$$

$$\Sigma Y = Y_A + Y_B + T_1 \cos 60^\circ - T = 0,$$

$$\Sigma Z = Z_B - Q = 0,$$

$$\Sigma m_x \bar{F} = -Y_A \cdot 24 - Q \cdot 9 \cos 60^\circ - T_1 \cos 60^\circ \cdot 24 = 0,$$

$$\Sigma m_y \bar{F} = X_A \cdot 24 + Q \cdot 9 \cos 30^\circ - T_1 \cos 30^\circ \cdot 24 = 0,$$

$$\Sigma m_z \bar{F} = -T \cdot 18 \cos 30^\circ + T_1 \cdot 18 \cos 30^\circ = 0,$$

$$\Sigma m_D \bar{F} = T_1 r_D - P r_D = 0.$$

Отсюда находим, что

$$T = T_1 = 32 \text{ кГ}, \quad X_A = 6,9 \text{ кГ}, \quad X_B = 20,8 \text{ кГ},$$

$$Y_A = -28 \text{ кГ}, \quad Y_B = 44 \text{ кГ}, \quad Z_B = 64 \text{ кГ}.$$

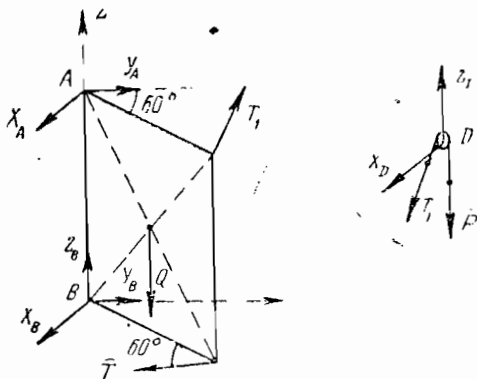


Рис. 3-45

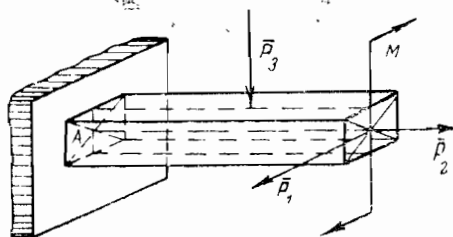


Рис. 3-46

**Задача 3-9.** К торцевому сечению балки, жестко заделанной в стену, приложены пара сил с моментом  $M$  и две горизонтальные силы  $P_1$  и  $P_2$ , приложенные в центре тяжести торцевого сечения. На балку действует еще вертикальная сила  $P_3$ , лежащая в вертикальной плоскости симметрии балки и делящая ось балки пополам. Определить реакции заделки балки, если ее длина равна  $2l$  (рис. 3-46).

Прежде чем перейти к решению этой задачи, сначала выясним вопрос, что здесь мы будем понимать под реакциями заделки. Освободив заделанную часть балки от заделки и действие заделки заменив силами, мы обнаружим, что на каждую точку заделанной части действует сила. Совокупность всех этих сил образует произвольную пространственную систему сил, которую можно заменить одной силой  $\bar{R}$  и парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$  с моментом  $m$ . Сила  $\bar{R}$  и вектор момент пары  $m$  приложены в точке  $A$ . Направление их неизвестно. Разложим эти

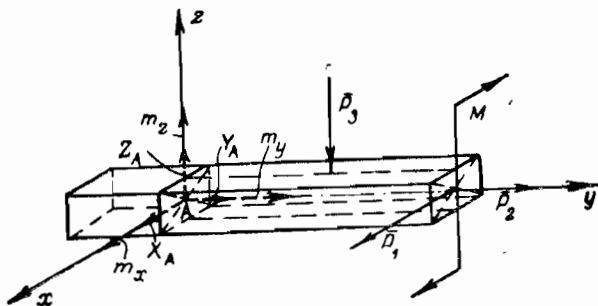


Рис. 3-47

два вектора по положительным направлениям координатных осей, как показано на рис. 3-47.

Здесь  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Z_A$  и  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  соответственно величины составляющих силы  $\bar{R}$  и вектора  $m$  момента пары  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ . Подробнее о реакциях заделки смотри решение задачи 2-10.

### Решение.

1) *Освобождение от внешних связей* (первый шаг). Освобождаем балку от стены и заменяем стену реакцией  $\bar{R}_A$  и парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$  с моментом  $m$  (на рис. 3-47 они не указаны). Затем разлагаем их на составляющие  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Z_A$ ;  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  (рис. 3-47).

2) *Расчленение* (второй шаг). Рассматриваем балку как абсолютно твердое тело.

3) *Равновесие* (третий шаг). Составляем шесть уравнений равновесия для пространственной системы сил, приложенных к балке

$$\Sigma X = X_A + P_x = 0,$$

$$\begin{aligned}\Sigma Y &= Y_A + P_2 = 0, \\ \Sigma Z &= Z_A - P_2 = 0, \\ \Sigma m_x \bar{F} &= m_x - P_1 l = 0, \\ \Sigma m_y \bar{F} &= -M + m_y = 0, \\ \Sigma m_z \bar{F} &= m_z - P_1 2l = 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}X_A &= -P_1, & Y_A &= -P_2, & Z_A &= P_2, \\ m_x &= P_1 l, & m_y &= M, & m_z &= 2P_1 l.\end{aligned}$$

### § 7. Приведение пространственной системы сил к различным центрам. Инварианты пространственной системы сил

Если данную систему сил  $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}$ , приложенную к абсолютно твердому телу, привести к данной точке  $O$ , то ее можно заменить одной силой  $\bar{R} = \Sigma \bar{F}$  и парой  $(\bar{P}, \bar{P}')$  с моментом  $\bar{L}_0 = \Sigma m_0(\bar{F})$  (рис. 3.48).

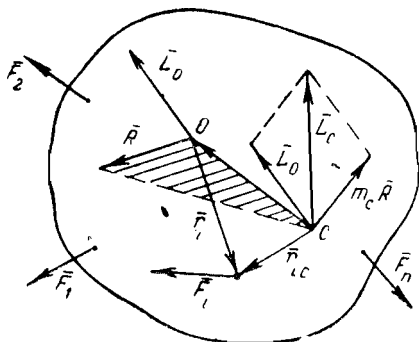


Рис. 3.48

Если систему сил привести теперь к другой точке  $C$ , то главный вектор этой системы  $\bar{R} = \Sigma \bar{F}$  останется неизменным, изменится величина и направление главного вектора — момента  $\bar{L}_0$ .

Посмотрим, как изменится главный вектор — момент, если вместо точки  $O$  взять точку  $C$ . Относительно точки  $C$  он будет равен

$$\begin{aligned}\bar{L}_C &= \Sigma m_C \bar{F}_i = \Sigma (\bar{r}_{ic} \times \bar{F}_i) = \\ &= \Sigma [(\bar{r}_i + \overline{CO}) \times \bar{F}_i] = \\ &= \Sigma (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) + \overline{CO} \times (\Sigma \bar{F}_i) = \bar{L}_0 + (\overline{CO} \times \bar{R}).\end{aligned}$$

Вектор  $\overline{CO} \times \overline{R}$  перпендикулярен к плоскости, содержащей силу  $\overline{R}$ , приложенную в точке  $O$ , и точку  $C$  и представляет собой момент этой силы относительно точки  $C$  (рис. 3.48).

$$\overline{CO} \times \overline{R} = m_C \overline{R}.$$

Итак

$$\overline{L}_C = \overline{L}_0 + m_C \overline{R}. \quad (3-10)$$

Главный момент системы сил относительно нового центра приведения равен прежнему главному моменту плюс момент главного вектора относительно нового центра приведения.

Таким образом, при приведении системы сил к точке  $C$  система заменяется той же силой  $\overline{R} = \Sigma \overline{F}$  и парой с моментом  $\overline{L}_C$ , определяемым равенством (3-10). На рис. 3-48 указано направление вектора  $\overline{L}_C$ , который, согласно равенству (3-10), равен геометрической сумме векторов  $\overline{L}_0$  и  $m_C \overline{R}$ .

Равенство (3-10) спроектируем на направление главного вектора  $\overline{R}$ , тогда получим

$$np_{\overline{R}} \overline{L}_C = np_{\overline{R}} \overline{L}_0 + np_{\overline{R}} m_C \overline{R},$$

но  $np_{\overline{R}} m_C \overline{R} = 0$ , так как вектор  $m_C \overline{R}$  перпендикулярен к плоскости, в которой расположен вектор  $\overline{R}$ .

Следовательно,

$$np_{\overline{R}} \overline{L}_C = np_{\overline{R}} \overline{L}_0,$$

или, что то же самое

$$L_C \cdot \cos(\overline{L}_C, \overline{R}) = L_0 \cos(\overline{L}_0, \overline{R}). \quad (3-11)$$

Это равенство показывает, что проекции главных моментов относительно точек  $O$  и  $C$  на направление главного вектора равны между собой, то есть проекция главного вектора — момента относительно любой точки на направление главного вектора есть величина постоянная, не зависящая от положения центра приведения.

Таким образом, при приведении данной системы сил к различным центрам величина и направление главного вектора и проекция главного вектора — момента на направлении главного вектора остаются постоянными.

Такие величины, которые не изменяют своего значения при тех или иных преобразованиях, называются *инвариантными величинами* или *инвариантами*.

Следовательно, вектор  $\bar{R}$  и скалярная величина  $nr_{\bar{R}} \bar{L}_0$  являются инвариантами пространственной системы сил, так как они не зависят от выбора центра приведения.

Если левую и правую части равенства (3-11) умножим на  $R$ , то получим

$$L_C \cdot R \cdot \cos(\bar{L}_C, \bar{R}) = L_0 R \cdot \cos(\bar{L}_0, \bar{R})$$

или

$$\bar{L}_C \cdot \bar{R} = \bar{L}_0 \cdot \bar{R}.$$

Это же равенство мы получим, если левую и правую части векторного равенства (3-10) умножим скалярно на главный вектор  $\bar{R}$  системы.

Таким образом, скалярное произведение главного вектора — момента системы относительно любой точки на ее главный вектор дает другое выражение для второго инварианта. Из доказанной теоремы об инвариантах следует, что если главный момент  $\bar{L}_0$  разложить на составляющие  $\bar{L}_1$  и  $\bar{L}_2$ , из которых момент  $\bar{L}_1$  коллинеарен, а  $\bar{L}_2$  перпендикулярен к  $\bar{R}$ , то при перемене центра приведения будет изменяться лишь составляющая  $\bar{L}_2 \perp \bar{R}$ . Докажем, что существуют центры приведения, для которых  $\bar{L}_2 = 0$ .

**Теорема.** Существует такая прямая, в любой точке  $A$  которой главный вектор  $\bar{R}$  и главный вектор — момент  $\bar{L}$  системы сил коллинеарны и направлены по этой прямой.

*Доказательство.* Приведем систему сил к точке  $O$  и главный вектор — момент  $\bar{L}_0$  разложим на два составляющих вектора  $\bar{L}_1$  и  $\bar{L}_2$ , из которых первый коллинеарен, а второй перпендикулярен главному вектору  $\bar{R}$ , то есть пару с моментом  $\bar{L}_0$  заменим двумя парами с моментами  $\bar{L}_1$  и  $\bar{L}_2$  (рис. 3-49)

$$\bar{L}_0 = \bar{L}_1 + \bar{L}_2.$$

Главный вектор — момент  $\bar{L}_A$  относительно точки  $A$ , не лежащей на линии действия главного вектора, будет

$$\bar{L}_A = \bar{L}_0 + m_A \bar{R} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + m_A \bar{R}.$$

Если в этом равенстве положить

$$\bar{L}_2 + m_A \bar{R} = 0,$$

то

$$\bar{L}_A = \bar{L}_1.$$

Следовательно, в точке  $A$  главный вектор — момент геометрически равен вектору  $\bar{L}_1$ . Положение точки  $A$  определим из условия  $\bar{L}_2 + m_A \bar{R} = 0$ . Получим

$$L_2 = |m_A \bar{R}| = R \cdot OA.$$

Откуда

$$OA = \frac{L_2}{R} = \frac{L_0 \sin \alpha}{R}.$$

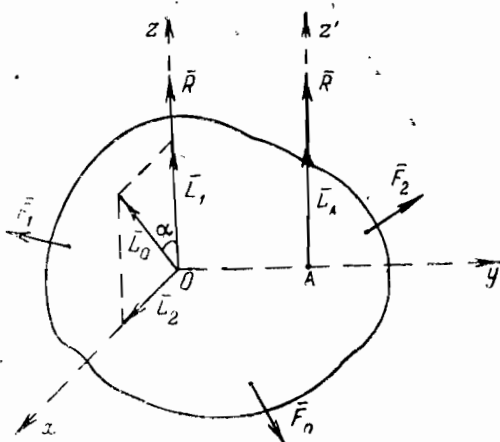


Рис. 3-49

Из чертежа видно также, что момент силы  $\bar{R}$  относительно выбранной точки  $A$  параллелен вектору  $\bar{L}_2$  и направлен в противоположную сторону, следовательно,

$$m_A \bar{R} = -\bar{L}_2.$$

Таким образом, мы доказали, что существует центр приведения  $A$ , для которого главный вектор и главный момент коллинеарны.

Очевидно, что таким же свойством обладает любой центр приведения, лежащий на прямой  $Az'$ .

Если вектор—момент  $\bar{L}_0$  перпендикулярен к главному вектору  $\bar{R}$  (рис. 3-50), то  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , тогда система сил приводится к одной равнодействующей силе, геометрически рав-



ной главному вектору  $\vec{R}$ , линия действия которой отстоит от точки  $O$  на расстоянии

$$OA = \frac{L_O}{R}.$$

Совокупность силы и пары, вектор — момент которой параллелен силе, называется *динамой* или *динамическим винтом* (рис. 3-51). Если  $\vec{L}_A$  параллелен  $\vec{R}$ , то пара  $(\vec{P}, \vec{P}'')$ , вектор — момент которой равен  $L_A$ , лежит в плоскости перпенди-

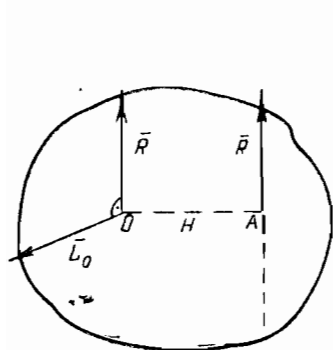


Рис. 3-50

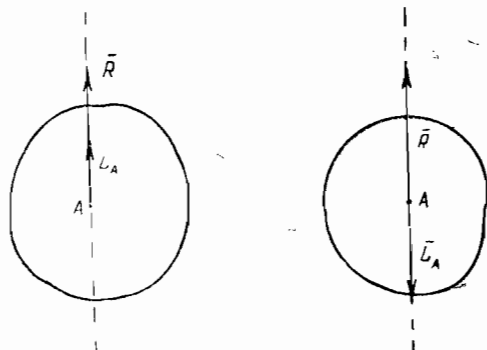


Рис. 3-51

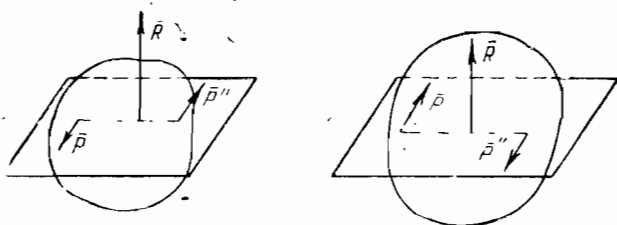


Рис. 3-52

кулярной к  $\vec{R}$ , поэтому динаму можно определить как совокупность силы и пары, плоскость которой перпендикулярна линии действия этой силы (рис. 3-52).

Прямая, при приведении к точкам которой данная система сил заменяется динамой или одной равнодействующей силой, называется *центральной осью системы*.

Покажем, что величина главного момента системы относительно точек центральной оси является минимальной. Возь-

мом точку  $A$ , лежащую на центральной оси  $Az'$  и точку  $B$  в любом месте абсолютно твердого тела. Тогда

$$\bar{L}_B = \bar{L}_A + m_B \bar{R}.$$

Здесь вектор  $m_B \bar{R}$  всегда перпендикулярен к вектору  $\bar{L}_A$ , следовательно,

$$|\bar{L}_A| < |\bar{L}_B|.$$

Вот почему центральную ось называют еще осью минимальных главных моментов.

#### Возможные случаи приведения произвольной пространственной системы сил

Мы знаем, что если произвольную пространственную систему сил привести к любой произвольно взятой точке  $O$  тела, то эта система сил заменяется одной силой  $\bar{R}$  и парой  $(\bar{P}, \bar{P}'')$ , то есть

$$\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim \{\bar{R}, (\bar{P}, \bar{P}'')\},$$

$$\bar{R} = \Sigma \bar{F},$$

$$\bar{L}_O = m (\bar{P}, \bar{P}'') = \Sigma m_O \bar{F}.$$

При приведении системы к точке  $O$  могут быть следующие случаи.

1) Главный вектор  $\bar{R} \neq 0$  и главный момент  $\bar{L}_O = 0$ ; тогда  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim \bar{R}$ , то есть система сил приводится к одной равнодействующей силе, приложенной в точке  $O$ , по величине и направлению равной главному вектору  $\bar{R}$ .

2) Главный вектор  $\bar{R} \neq 0$  и главный момент  $\bar{L}_O \neq 0$ , но  $\bar{L}_O \perp \bar{R}$ ; в этом случае система также приводится к одной равнодействующей силе, приложенной в точке  $A$ , линия действия которой проходит через эту точку, и отстоящей от точки  $O$  на расстоянии

$$AO = \frac{L_O}{R}.$$

Это можно показать еще и так. Пару сил  $(\bar{P}, \bar{P}'')$  заменим эквивалентной парой  $(\bar{R}', \bar{R}'')$ , лежащей в плоскости, перпендикулярной  $\bar{L}_O$  и содержащей силу  $\bar{R}$  так, чтобы  $\bar{R}' = \bar{R} = -\bar{R}''$  (причем сила  $\bar{R}''$  приложена в точке  $O$ ).

Тогда получим

$$\{\bar{R}, (\bar{P}, \bar{P}'')\} \sim \{\bar{R}, (\bar{R}', \bar{R}'')\} \sim \bar{R}',$$

ибо силы  $\bar{R}$  и  $\bar{R}''$  уравниваются. В результате на абсолютно твердое тело будет действовать одна равнодействующая сила, геометрически равная главному вектору  $\bar{R}$  системы, линия действия которой отстоит от точки  $O$  на расстоянии  $OA = \frac{L_0}{R}$  (рис. 3-53).

3) Главный вектор  $R \neq 0$  и главный момент  $L_0 \neq 0$ , причем эти векторы не взаимно перпендикулярны. Система сил приводится к динамике (см. рис. 3-49).

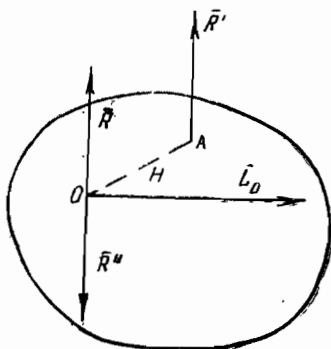


Рис. 3-53

4) Главный вектор  $\bar{R} = 0$  и главный момент  $\bar{L}_0 \neq 0$ , тогда система сил  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\}$  эквивалентна паре сил  $\{\bar{P}, \bar{P}'\}$ , вектор—момент которой  $\bar{L}_0$  не зависит от выбора полюса. В самом деле, из векторного равенства  $\bar{L}_C = \bar{L}_0 + m_C(\bar{R})$ , где  $C$  — произвольная точка, учитывая, что главный вектор  $\bar{R} = 0$ , следует, что  $m_C(\bar{R}) = 0$  и  $\bar{L}_C = \bar{L}_0$ .

5) Главный вектор  $\bar{R} = 0$  и главный момент  $\bar{L}_0 = 0$ , тогда  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\} \sim 0$ , то есть система сил, приложенная к абсолютно твердому телу, находится в равновесии, а тело в состоянии покоя.

Таким образом, произвольная система сил либо приводится к равнодействующей, либо к паре сил, либо к динамике, либо находится в равновесии.

## Глава IV. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

### § 1. Центр системы параллельных сил, координаты центра системы параллельных сил

В ряде задач механики, в частности при изучении задач статики, приходится встречаться с непрерывным распределением параллельных сил, важнейшими из которых являются силы тяжести. Изучение таких сил тесно связано с понятием центра системы параллельных сил.

*Центром системы параллельных сил называется точка  $C$ , лежащая на линии действия равнодействующей этой системы сил и обладающая следующим свойством: если все данные параллельные силы повернуть вокруг точек их приложения на один и тот же угол в одну и ту же сторону, то равнодействующая новой повернутой системы параллельных сил пройдет через эту же точку  $C$ .*

Докажем существование такой точки  $C$ . Представим себе, что к телу в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  соответственно приложены параллельные силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , которые приводятся к одной равнодействующей силе  $\vec{R} \sim \{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\}$  (рис. 4.1). Найдем эту равнодействующую  $\vec{R}$ . Для этого поступим так: сложим две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , затем полученную равнодействующую  $\vec{R}_1$  этих двух сил сложим с третьей силой  $\vec{F}_3$  и т.д.

Таким образом, путем последовательного сложения параллельных сил мы найдем величину и направление их равнодействующей, которая определяется векторным равенством  $\vec{R} = \Sigma \vec{F}$ , а также ее точку  $C$  приложения (рис. 4-1).

Повернем теперь все силы вокруг точек их приложения на любой угол  $\alpha$  в любом каком-нибудь одном направлении и посмотрим, что произойдет с направлением, величиной и точкой приложения равнодействующей  $\vec{R}'$  новой повернутой системы сил  $\vec{F}'_1, \dots, \vec{F}'_n$ , которые на рис. 4-1 указаны пунктиром.

Величина  $\bar{R}'$  и ее направление определяются векторным равенством  $\bar{R}' = \Sigma \bar{F}'$ , которое показывает, что направление силы  $\bar{R}'$  стало параллельным линиям действия сил  $\bar{F}'_1, \dots, \bar{F}'_n$ , то есть направление ее изменилось, а величина осталась прежней, так как поворот сил произошёл без изменения их величины, а потому  $|\bar{R}'| = |\bar{R}|$ . Что же касается точки приложения силы  $\bar{R}'$ , то она совпадает с точкой  $C$  приложения силы  $\bar{R}$ , так как точка приложения равнодействующей двух лю-

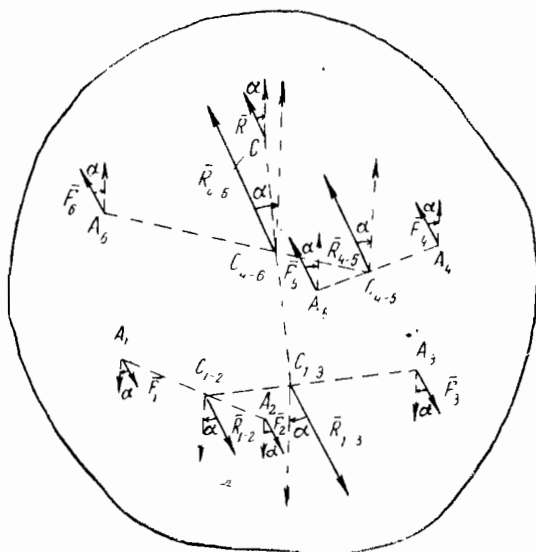


Рис. 4-1

бых последовательно складываемых сил до и после их поворота будет делить неизменное расстояние между точками их приложения на те же части, так как эти части обратно пропорциональны величинам данных сил (§ 6, глава 2)<sub>i</sub>.

Итак, мы показали, что точка  $C$  является центром системы параллельных сил.

#### Координаты центра системы параллельных сил

Обозначим прямоугольные координаты центра системы параллельных сил  $C$  и точки  $A_i$  приложения любой параллельной силы  $\bar{F}_i$  через  $x_c, y_c, z_c; x_i, y_i, z_i$  соответственно

(рис. 4-2). Так как данная система параллельных сил приводится к одной равнодействующей силе, то по теореме Вариньона можно записать

$$\begin{aligned} m_x \bar{R} &= \Sigma m_x \bar{F}_i, \\ m_y \bar{R} &= \Sigma m_y \bar{F}_i, \\ m_z \bar{R} &= \Sigma m_z \bar{F}_i. \end{aligned} \quad (4-1)$$

По ранее доказанному (см. § 2, глава III) моменты любой силы  $\bar{F}$  относительно неподвижных прямоугольных осей соответственно выражаются через проекции  $F_x, F_y, F_z$  этой силы и координаты  $x, y, z$  точки ее приложения по формулам

$$\begin{aligned} m_x \bar{F} &= yF_z - zF_y, \\ m_y \bar{F} &= zF_x - xF_z, \\ m_z \bar{F} &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (4-2)$$

Воспользуемся формулами (4-1) и (4-2) для определения координат центра системы параллельных сил. Повернем все

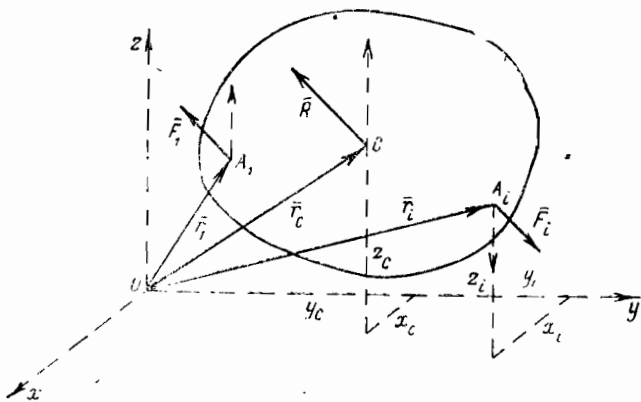


Рис. 4-2

силы вокруг точек их приложения так, чтобы они были параллельны оси  $z$ , тогда проекции любой параллельной силы  $\bar{F}_i$  и проекции равнодействующей  $\bar{R}$  этих сил на координатные оси будут соответственно равны (рис. 4-2)

$$\begin{aligned} F_{ix} &= F_{iy} = 0, & F_{iz} &= F_i, \\ R_x &= R_y = 0, & R_z &= \Sigma F_i. \end{aligned}$$

Здесь под  $F_i$  нужно понимать алгебраическую величину силы, равную проекции  $\overline{F}_{iz}$ , то есть величину, взятую со знаком плюс или минус, в зависимости от направления силы  $F_i$ . Из (4-2) теперь найдем

$$\begin{aligned} m_x \overline{R} &= y_c R_z, & m_x \overline{F}_i &= y_i F_{iz}, \\ m_y \overline{R} &= -x_c R_z, & m_y \overline{F}_i &= -x_i F_{iz}, \\ m_z \overline{R} &= 0, & m_z \overline{F}_i &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в формулы (4-1), получим

$$\begin{aligned} y_c (\Sigma F_i) &= \Sigma F_i y_i, \\ x_c (\Sigma F_i) &= \Sigma F_i x_i, \end{aligned}$$

где

$$\Sigma F_i = R_z.$$

Отсюда

$$x_c = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i}, \quad y_c = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i}.$$

Аналогично, если повернуть все силы вокруг их точек приложения так, чтобы они были параллельны оси  $x$ , то получим

$$y_c = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i}, \quad z_c = \frac{\Sigma F_i z_i}{\Sigma F_i}.$$

Таким образом, координаты центра системы параллельных сил окончательно определяются по формулам

$$x_c = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i}, \quad y_c = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i}, \quad z_c = \frac{\Sigma F_i z_i}{\Sigma F_i}. \quad (4-3)$$

Если левые и правые части этих формул соответственно умножить на  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  и затем сложить, то получим формулу, определяющую радиус-вектор  $\overline{r}_c$  центра системы параллельных сил

$$\overline{r}_c = \frac{\Sigma F_i \overline{r}_i}{\Sigma F_i},$$

где  $\overline{r}_c = x_c \bar{i} + y_c \bar{j} + z_c \bar{k}$  — радиус-вектор центра системы параллельных сил, а  $\overline{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k}$  — радиус-вектор  $\overline{r}_i$  точки приложения силы  $\overline{F}_i$ .

Выражения  $\Sigma F_i \overline{r}_i$ ,  $\Sigma F_i x_i$ ,  $\Sigma F_i y_i$ ,  $\Sigma F_i z_i$  соответственно называются статическими моментами параллельных сил относительно начала координат  $O$  и относительно координатных плоскостей  $xOy$ ,  $yOz$ ,  $zOx$  соответственно.

**Задача 4-1.** Определить центр системы параллельных сил  $\bar{P}_i$  направленных в одну сторону и приложенных в вершинах прямоугольного параллелепипеда, ребра которого  $AB=20$  см,  $AC=10$  см,  $AD=5$  см. Величина сил в вершинах  $A, B, C, D, E, F, G, H$  соответственно равна 1 кгГ, 2 кгГ, 3 кгГ, 4 кгГ, 5 кгГ, 3 кгГ, 4 кгГ, 3 кгГ (рис. 4-3).

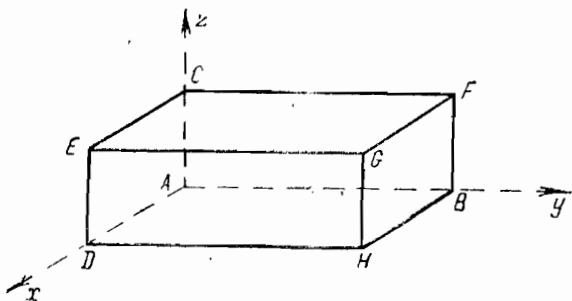


Рис. 4-3

$E, F, G, H$  соответственно равна 1 кгГ, 2 кгГ, 3 кгГ, 4 кгГ, 5 кгГ, 3 кгГ, 4 кгГ, 3 кгГ (рис. 4-3).

**Решение.**

Координаты центра системы параллельных сил определяются по формулам (4-3), которые для нашего случая будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{P_A x_A + \dots + P_H x_H}{P_A + \dots + P_H}, \\ y_C &= \frac{P_A y_A + \dots + P_H y_H}{P_A + \dots + P_H}, \\ z_C &= \frac{P_A z_A + \dots + P_H z_H}{P_A + \dots + P_H}. \end{aligned} \quad (4-4)$$

Здесь через  $P_A, \dots, P_H$  и  $x_A, y_A, z_A, \dots, x_H, y_H, z_H$  соответственно обозначены величины данных сил, приложенных в точках  $A, B, \dots, H$ , и координаты этих точек. Подставляя в эти формулы значения сил и координаты точек их приложения, найдем координаты центра системы параллельных сил

$$x_C = 3,2 \text{ см}, \quad y_C = 9,6 \text{ см}, \quad z_C = 6 \text{ см}.$$

## § 2. Центр тяжести

Всякое тело можно представить состоящим из большого числа малых материальных частиц. На каждую такую частицу действует сила тяжести.



Представим себе тело, на каждую материальную частицу которого действует сила тяжести  $\bar{p}_i$ . Равнодействующая  $\bar{P} = \Sigma \bar{p}_i$  называется весом тела, а центр  $C$  системы этих параллельных сил центром тяжести тела (рис. 4-4).

Если тело будет менять свое положение в пространстве, то силы  $\bar{p}_i$  относительно тела будут только поворачиваться во-

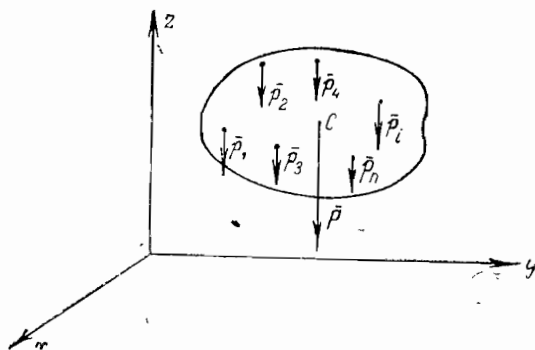


Рис. 4-4

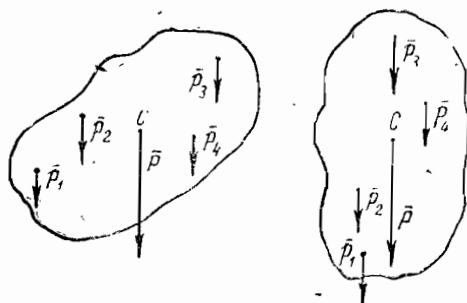


Рис. 4-5

круг своих точек приложения, сохраняя при этом свою параллельность, величину и точки приложения. При таком повороте параллельных сил центр  $C$  системы этих сил не изменит своего положения относительно тела (рис. 4-5).

#### Координаты центра тяжести тела

Если через  $x_i, y_i, z_i$  обозначить координаты точек приложения сил  $\bar{p}_i$ , а через  $x_c, y_c, z_c$  координаты центра тяжести

тела, то, заменяя  $F_i$  на  $p_i$  в формулах (4-3), найдем координаты центра тяжести тела

$$x_c = \frac{\sum p_i x_i}{P}, \quad y_c = \frac{\sum p_i y_i}{P}, \quad z_c = \frac{\sum p_i z_i}{P}, \quad (4-5)$$

где  $P = \sum p_i$  — вес тела и суммирование распространено на все материальные частицы тела.

Отметим, что при получении этих формул на твердое тело не было наложено никаких ограничений ни на его форму, ни на то, из какого материала оно состоит, является ли тело однородным или нет. Поэтому они являются общими формулами, определяющими координаты центра тяжести любого тела. Из них, как частный случай, найдем центр тяжести однородного тела, однородной плоской фигуры и однородной плоской линии. Тело, плоская фигура и линия называются *однородными*, если вес  $\nu$  единицы объема тела, вес  $\lambda$  единицы площади плоской фигуры и вес  $\gamma$  единицы длины линии будут иметь соответственно одно и то же значение во всех частях тела, плоской фигуры и линии, то есть всюду будут постоянны

$$\nu = \text{пост}; \quad \lambda = \text{пост}; \quad \gamma = \text{пост}.$$

#### Частные случаи

1. *Координаты центра тяжести однородного тела.* Разобьем однородное тело на большое число очень малых частиц, тогда вес  $p_i$  любой такой частицы будет равен произведению ее объема на вес  $\gamma$  единицы объема тела

$$p_i = \gamma \Delta v_i.$$

Подставляя эти значения сил  $p_i$  в формулы (4-5) и сокращая на  $\gamma$ , получим

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta V_i}{V}, \quad y_c = \frac{\sum y_i \Delta V_i}{V}, \quad z_c = \frac{\sum z_i \Delta V_i}{V}, \quad V = \sum \Delta V_i,$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — координаты центра тяжести частицы. В пределе получим формулы, определяющие координаты центра тяжести однородного тела в такой форме

$$x_c = \frac{\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum x_i \Delta V_i}{V} = \frac{\int x dV}{V},$$

$$y_c = \frac{\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum y_i \Delta V_i}{V} = \frac{\int y dV}{V},$$

$$z_c = \frac{\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum z_i \Delta V_i}{V} = \frac{\int_V z dV}{V},$$

где  $V$  — объем тела.

Отсюда видим, что координаты центра тяжести однородного тела не зависят от веса тела. Они зависят только от его объема и формы. Вот почему говорят, что эти формулы определяют координаты центра тяжести объема.

Величины  $\int x dV$ ,  $\int y dV$ ,  $\int z dV$  соответственно называются статическими моментами объема тела относительно координатных плоскостей  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$ .

2. *Координаты центра тяжести плоской фигуры.* Если тело имеет форму тонкой однородной пластинки, то его можно рассматривать как плоскую однородную фигуру. Разобьем ее на большое число очень малых площадок прямыми, параллельными координатным осям. Вес  $p_i$  каждой такой площадки будет равен  $p_i = \lambda \Delta S_i$ , произведению ее площади  $\Delta S_i$  на вес единицы площади фигуры. Если эти значения сил  $p_i$  подставим в первые два уравнения (4-5), получим координаты центра тяжести однородной плоской фигуры

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta S_i}{S},$$

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta S_i}{S},$$

где  $S$  — площадь плоской фигуры,

$x_i$ ,  $y_i$  — координаты частицы  $\Delta S_i$ .

Переходя к пределу, когда размеры частицы  $\Delta S_i$  стремятся к нулю, получим

$$x_c = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\sum x_i \Delta S_i}{S} = \frac{\int_S x dS}{S},$$

$$y_c = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\sum y_i \Delta S_i}{S} = \frac{\int_S y dS}{S}.$$

Из этих формул видно, что координаты центра тяжести плоской фигуры зависят от ее площади и формы, а потому говорят, что эти формулы определяют координаты центра тяжести плоской фигуры.

Величины  $\int_S x dS$ ,  $\int_S y dS$  соответственно называются статическими моментами площади фигуры относительно координатных осей  $x$  и  $y$ .

3. *Координаты центра тяжести плоской однородной линии.* Если тело имеет форму очень тонкой однородной проволоки, расположенной в одной плоскости, причем толщиной ее можно пренебречь, то задача о нахождении центра тяжести такого тела сводится к нахождению центра тяжести однородной линии. Эту линию разобьем на большое число очень малых дуг, тогда вес  $p_i$  такой дуги будет равен  $p_i = \gamma \Delta l_i$  произведению ее длины  $\Delta l_i$  на вес  $\gamma$  единицы длины линии. Если эти значения сил  $p_i$  подставить в первые два уравнения (4-5), то координаты центра тяжести однородной плоской линии будут

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{l},$$

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta l_i}{l},$$

где  $l$  — длина линии,

$x_i, y_i$  — координаты центра тяжести элемента дуги  $\Delta l_i$ .

Переходя к пределу, получим

$$x_c = \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \frac{\sum x_i \Delta l_i}{l} = \frac{\int x dl}{l},$$

$$y_c = \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \frac{\sum y_i \Delta l_i}{l} = \frac{\int y dl}{l}.$$

Отсюда видим, что координаты центра тяжести однородной плоской линии зависят только от ее длины и формы, а потому говорят, что эти формулы определяют координаты центра тяжести плоской линии.

Величины  $\int x dl$ ,  $\int y dl$  соответственно называются статическими моментами линии относительно координатных осей  $x$  и  $y$ .

Таким образом, определение координат центров тяжести твердого тела, объема, площади и линии сводится к определению пределов сумм  $\sum x_i p_i$ ,  $\sum x_i \Delta V_i$ ,  $\sum x_i \Delta S_i$ ,  $\sum x_i \Delta l_i$  и т. д., входящих в числители формул, определяющих эти координаты. Способы нахождения этих сумм подробно излагаются в

курсе интегрального исчисления, а потому здесь на них останавливаться не будем.

Рассмотрим способы, которые позволяют элементарным путем без вычисления указанных интегралов определить центр тяжести тела, объема, площади и линии в некоторых простейших случаях.

### § 3. Способы определения центров тяжести некоторых тел

Способ симметрии. В основе его лежит следующая теорема: если тело имеет плоскость, ось или центр материальной симметрии, то центр тяжести тела соответственно находится в этой плоскости, на этой оси или в этом центре.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, выясним, что мы будем понимать под плоскостью, осью и центром материальной симметрии тела.

Если тело имеет плоскость, ось или центр материальной симметрии, то это значит, что любой материальной точки  $M_i$

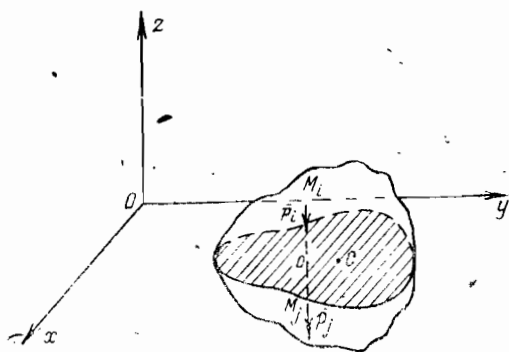


Рис. 4-6

веса  $p_i$  соответствует другая её точка  $M_j$  тела такого же веса  $p_j = p_i$ , причем прямая  $M_i M_j$ , соединяющая эти две точки, перпендикулярна к плоскости или оси и делится ими и центром симметрии пополам.

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Пусть плоскость  $xy$  является плоскостью материальной симметрии тела, тогда  $p_i = p_j$ ,  $x_i = x_j$ ,  $y_i = y_j$ ,  $z_i = -z_j$  (рис. 4-6). В этом случае  $z_c = \frac{\sum z_i p_i}{P} = 0$ , ибо  $\sum z_i p_i = 0$ .

Следовательно, центр тяжести  $S$  тела лежит в плоскости  $xy$ .

2. Пусть ось  $z$  является осью материальной симметрии тела, тогда  $p_i = p_j$ ,  $x_i = -x_j$ ,  $y_i = -y_j$ ,  $z_i = -z_j$  (рис. 4-7).

В этом случае

$$x_C = \frac{\sum p_i x_i}{P} = 0, \quad y_C = \frac{\sum p_i y_i}{P} = 0,$$

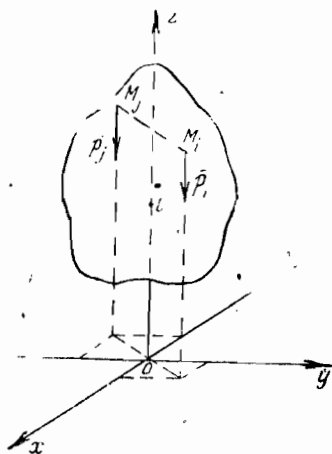


Рис. 4-7

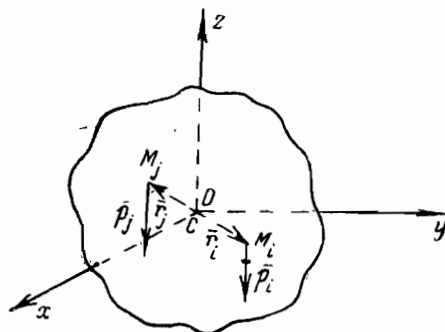


Рис. 4-8

так как

$$\sum p_i x_i = 0, \quad \sum p_i y_i = 0.$$

Следовательно, центр тяжести  $S$  лежит на оси  $z$ .

3. Пусть точка  $O$  является центром материальной симметрии тела, тогда  $p_i = p_j$ ,  $\vec{r}_i = -\vec{r}_j$  (рис. 4-8). В этом случае  $\vec{r}_C = \frac{\sum p_i \vec{r}_i}{P} = 0$ , так как  $\sum p_i \vec{r}_i = 0$ .

Следовательно, центр тяжести  $S$  тела совпадает с центром  $O$  его материальной симметрии. Опираясь на эту теорему, можем сразу сказать, что центр тяжести однородного прямолинейного отрезка находится в его середине, центр тяжести параллелограмма в точке пересечения его диагоналей, так как эта точка является центром его симметрии, центр тяжести однородной линии, изогнутой по эллипсу или контуру пра-

вильного многоугольника, лежит в их геометрическом центре, центр тяжести площади однородной пластинки, имеющей форму эллипса или правильного многоугольника, будет находиться в геометрическом центре этих фигур, центр тяжести куба, шара, эллипсоида вращения находится в геометрическом центре этих тел и т. д. (рис. 4-9).

Из рис. 4-9 видно, что центр тяжести некоторых линий и фигур находится вне этих линий и фигур, хотя относительно

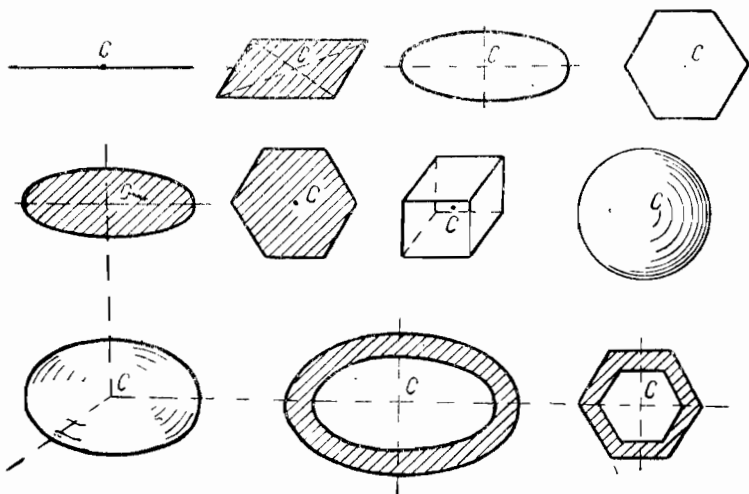


Рис. 4-9

их он всегда занимает строго определенное положение независимо от того, как они расположены. Эта теорема позволяет сказать, что центр тяжести любого однородного тела вращения находится на оси вращения, так как эта ось является осью симметрии для этого тела. Опираясь на эту теорему, легко определить положение центра тяжести некоторых фигур и тел. В качестве примера найдем центр тяжести площади однородного треугольника и центр тяжести однородной треугольной пирамиды.

#### Центр тяжести площади треугольника

Покажем, что центр тяжести площади однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан. В самом деле, разобьем площадь треугольника прямыми, параллельными, например, стороне  $AD$ , на сколь угодно большое число

сколь угодно узких полосок, которые в пределе можно рассматривать как отрезки прямых. Центр тяжести каждого такого отрезка находится в его середине, где приложен вес  $p_i$  отрезка.

Таким образом, определение центра тяжести площади треугольника свелось к определению центра системы параллель-

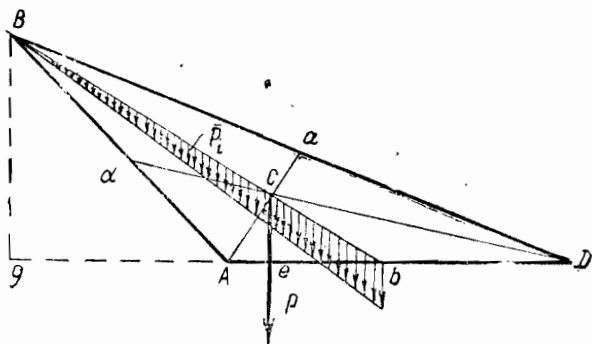


Рис. 4-10

ных сил, непрерывно приложенных в точках, геометрическое место которых представляет собой прямую  $Bb$ , являющуюся медианой треугольника (рис. 4-10).

Следовательно, центр тяжести треугольника лежит на медиане. Отсюда приходим к выводу, что центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан.

#### Центр тяжести однородной треугольной пирамиды

Разобьем пирамиду  $ABDE$  плоскостями, параллельными ее основанию  $ABD$ , на большое число тонких пластинок. Вес  $p_i$  площади каждого такого треугольника будет приложен в точке пересечения его медиан.

Следовательно, нахождение центра тяжести пирамиды свелось к определению центра системы параллельных сил  $p_i$ , непрерывно распределенных по прямой  $Ee$ , соединяющей вершину пирамиды с центром тяжести  $e$  ее основания, лежащим на медиане  $BF$  (рис. 4-11).

Центр системы параллельных сил  $p_i$  очевидно также будет находиться на этой прямой. Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что центр тяжести лежит на прямой  $Bb$ .

Следовательно, центр тяжести  $C$  пирамиды находится в точке пересечения прямых  $Ee$  и  $Bb$ . Найдем положение его



на прямой  $eE$ . Соединим прямой точки  $v$  и  $e$  и рассмотрим треугольник  $bFE$  и  $EFB$ . Эти треугольники подобны, так как угол  $\angle F$  у них общий, а стороны, образующие его, пропорциональны

$$\frac{Fb}{FE} = \frac{Fe}{FB} = \frac{1}{3}.$$

Из их подобия следует, что

$$be \parallel BE, \quad \frac{be}{BE} = \frac{1}{3},$$

а из подобия треугольников  $bce$  и  $BCE$  находим

$$\frac{be}{BE} = \frac{ec}{CE} = \frac{1}{3},$$

отсюда

$$CE = 3ec,$$

тогда

$$Ee = 4ec,$$

следовательно,

$$ec = \frac{1}{4} eE.$$

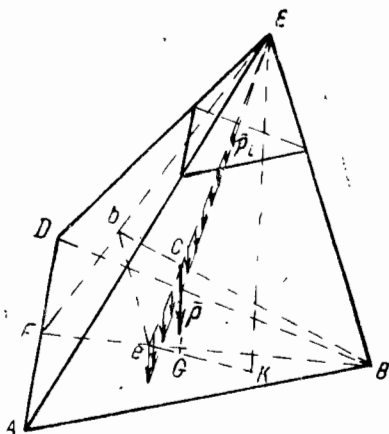
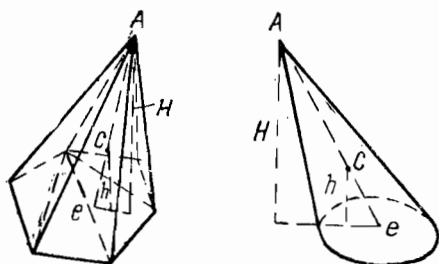


Рис. 4-11

Отсюда видим, что центр тяжести однородной пирамиды лежит на прямолинейном отрезке, соединяющем вершину пирамиды с центром тяжести ее основания, на расстоянии, равном одной четверти этого отрезка от центра тяжести основания пирамиды.

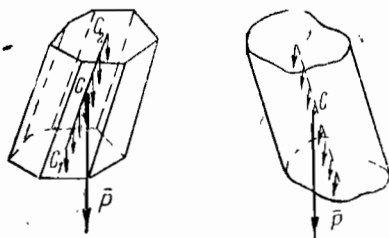
Любую многоугольную пирамиду можно разбить на ряд треугольных пирамид, а любой конус рассматривать как предел вписанных в него пирамид, а поэтому полученные результаты, очевидно, будут справедливы для любой пирамиды и любого конуса (рис. 4-12). Также можно найти центр тяжести любой призмы и любого цилиндра (не усеченных). Он будет находиться в середине прямолинейного отрезка, соединяющего центра тяжести их оснований. Это следует из того, что вес  $P_i$  каждого плоского многоугольника или плоской фигуры, получившихся соответственно от пересечения призмы и цилиндра плоскостями, параллельными их основаниям, соответственно один и тот же, так как эти многоугольники и фигуры равны между собой, и приложен в их центрах тяжести, ко-

торые расположены по прямой  $C_1 C_2$ , соединяющей центры тяжести оснований призмы и цилиндра. Но центр системы равных и параллельных между собой сил, непрерывно распре-



$$eC = \frac{1}{4} eA \quad h = \frac{1}{4} H$$

Рис. 4-12



$$C, C_2 = \frac{1}{2} C, C_2$$

Рис. 4-13

деленных по отрезку  $C_1, C_2$ , будет находиться в его середине  $C$  (рис. 4-13).

Очевидно, что центр тяжести призмы и цилиндра будет отстоять от их основания на расстоянии равном одной второй их высоты.

#### Способ, основанный на применении теорем Гюльдена

**Первая теорема Гюльдена.** Объем  $V$ , полученный от вращения плоской однородной фигуры вокруг оси, лежащей с ней в одной плоскости и не пересекающей ее контура, равен площади  $S$  фигуры, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести  $C$

$$V = S \cdot 2\pi x_C,$$

где  $x_C$  — расстояние центра тяжести фигуры до оси вращения.

**Доказательство.** Предположим, нам дана однородная плоская фигура, площадь которой равна  $S$ , и ось вращения  $y$ , лежащая с фигурой в одной плоскости  $xy$  (рис. 4-14). Требуется определить объем, который получится от вращения этой фигуры вокруг оси  $Oy$ .

Для этого разобьем данную фигуру прямыми параллельными осями координат на большое число очень малых прямоугольников. Площадь любого из них обозначим через  $\Delta s_i$ , координату его центра тяжести, который находится в центре пересечения диагоналей, обозначим через  $x_i$ . Расстояние от

центра тяжести фигуры до оси вращения обозначим через  $x_c$ . При вращении фигуры вокруг оси  $Oy$  каждая прямоугольная площадка  $\Delta S_i$  опишет круглое кольцо. Найдем его объем. Для чего разрежем это кольцо и выпрямим его, тогда полу-

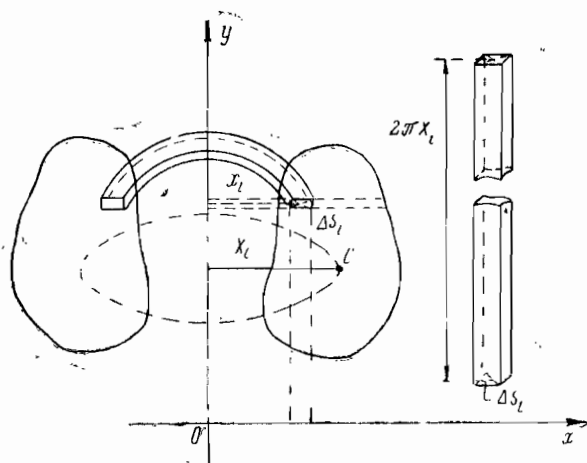


Рис. 4-14

чим элементарную усеченную прямоугольную призму. Объем  $\Delta V_i$  этой призмы будет равен произведению площади  $\Delta S_i$  основания призмы на ее среднюю высоту  $2\pi x_i$ , то есть

$$\Delta V_i = \Delta S_i \cdot 2\pi x_i.$$

Переходя к пределу при  $\Delta S_i \rightarrow 0$ , найдем объем  $V$  тела вращения

$$V = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \Sigma \Delta V_i = 2\pi \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \Sigma \Delta S_i \cdot x_i.$$

Учитывая далее, что

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \Sigma \Delta S_i \cdot x_i = S x_c,$$

получим

$$V = 2\pi x_c \cdot S,$$

где  $S$  — площадь фигуры.

Воспользуемся доказанной теоремой для определения центра тяжести площади полукруга.

### Центр тяжести площади полукруга

Дан полукруг радиуса  $R$ , требуется определить положение его центра тяжести  $C$ . Совместим ось вращения  $Oy$  с диаметром полукруга, а ось  $Ox$  возьмем так, чтобы она являлась осью его симметрии (рис. 4-15). Тогда определение центра тяжести полукруга сводится к определению его абсциссы  $x_C$  так как  $y_C = 0$ . При вращении полукруга вокруг оси  $Oy$  он опишет шар, объем которого, согласно теореме Гульдена, будет равен

$$V = S \cdot 2\pi x_C = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi x_C = \pi^2 R^2 x_C.$$

С другой стороны, объем шара равен

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Откуда находим

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \pi^2 R^2 x_C,$$

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}.$$

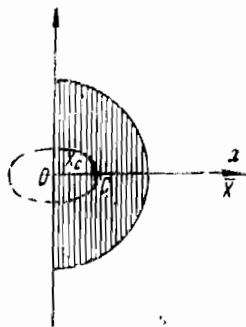


Рис. 4-15

Эта формула определяет положение центра тяжести площади полукруга.

*Вторая теорема Гульдена.* Боковая поверхность  $S_{бок}$ , полученная от вращения однородной плоской кривой вокруг оси, лежащей с ней в одной плоскости и ее не пересекающей, равна длине кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести этой кривой

$$S_{бок} = l \cdot 2\pi x_C,$$

где  $x_C$  — расстояние от центра тяжести до оси вращения.

*Доказательство.* Предположим, нам дана плоская, однородная кривая  $AB$  длины  $l$  и ось вращения  $Oy$  (рис. 4-16). Требуется определить боковую поверхность  $S_{бок}$ , которую опишет эта кривая.

При доказательстве теоремы будем линию  $AB$  рассматривать как предельное положение очень узкой плоской полоски ширины  $\delta$  (рис. 4-16). При своем вращении вокруг оси  $Oy$  эта полоска опишет очень тонкую оболочку, объем которой по первой теореме Гульдена будет равен

$$V = S \cdot 2\pi x_C,$$

где через  $S$  обозначена площадь полоски, а через  $x_C$  расстояние ее центра тяжести до оси вращения.

Площадь  $S$  этой полоски при ее малой ширине будет равна

$$S = l \cdot \delta.$$

С другой стороны, объем  $V$  полученной оболочки можно представить как произведение ее боковой поверхности  $S_{бок}$  на ее толщину, равную  $\delta$

$$V = S_{бок} \cdot \delta.$$

Тогда

$$S_{бок} \cdot \delta = S \cdot 2\pi x_C = l \delta \cdot 2\pi x_C,$$

следовательно,

$$S_{бок} = l \cdot 2\pi x_C.$$

Решим два примера на определение центра тяжести с помощью второй теоремы Гульдена.

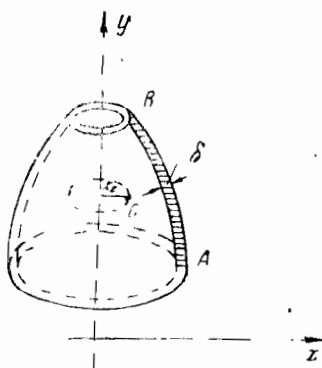


Рис. 4-16

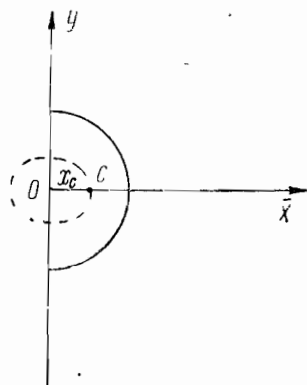


Рис. 4-17

### Центр тяжести полуокружности

Дана полуокружность радиуса  $R$ . Требуется определить положение ее центра тяжести  $x_C$ .

Совместим ось вращения  $Oy$  с диаметром полуокружности, а ось  $Ox$  возьмем так, чтобы она была осью ее симметрии (рис. 4-17). В этом случае  $y_C = 0$  и задача сводится к определению абсциссы  $x_C$  центра тяжести  $C$  полуокружности. При вращении полуокружности вокруг оси  $Oy$  она опишет боковую поверхность шара, которая, согласно второй теореме Гульдена, равна

$$S = l \cdot 2\pi x_C,$$

но

$$S = 4\pi R^2, \quad l = \pi R,$$

отсюда

$$x_C = \frac{S}{2\pi l} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R} = \frac{2}{\pi} R \approx 0,63 R.$$

Эта формула определяет положение центра тяжести полуокружности.

#### Центр тяжести дуги окружности

Дана дуга окружности радиуса  $R$  с центральным углом равным  $2\alpha$ . Требуется определить положение ее центра тяжести  $C$  (рис. 4-18).

Так как ось  $Ox$  является осью симметрии, то  $y_C = 0$ . Остается определить координату  $x_C$ . При вращении дуги  $\cup AB$  вокруг  $Oy$  она опишет боковую поверхность шарового пояса, которая по второй теореме Гульдена будет равна

$$S_{\text{бок}} = l \cdot 2\pi x_C,$$

где  $l = \cup AB$ .

Как известно, боковая поверхность шарового пояса равна

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot H,$$

где  $H = AB$  — высота шарового слоя.

Тогда

$$2\pi R \cdot H = l \cdot 2\pi x_C,$$

$$x_C = \frac{H}{l} R.$$

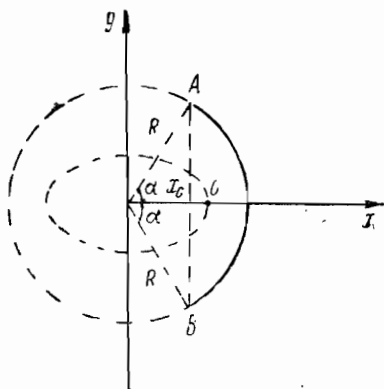


Рис. 4-18

Из рис. 4-18 видно, что  $H = 2R \sin \alpha$ ,  $l = R \cdot 2\alpha$ . Подставляя эти значения хорды  $H$  и дуги  $l$  в последнее равенство, получим

$$x_C = \frac{\sin \alpha}{\alpha} R.$$

Эта формула определяет положение центра тяжести дуги окружности. В ней  $\alpha$  выражается в радианах. Из этой формулы как частный случай получим формулу  $x_C = \frac{2}{\pi} R$ , опре-

деляющую положение центра тяжести полуокружности; если положим  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

#### Центр тяжести площади однородного круглого сектора

Разобьем дугу  $\cup AB$  кругового сектора  $OAB$  на большое число малых дуг  $ij$  и точки деления соединим с его центром  $O$ , тогда площадь сектора разобьется на большое число очень малых круговых секторов, которые в пределе можно рассмат-

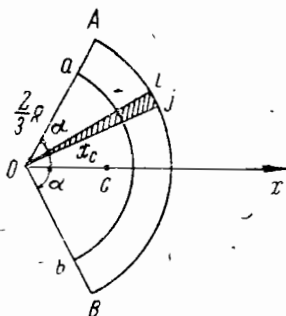


Рис. 4-19

ривать как плоские треугольники (рис. 4-19). Центры тяжести всех этих треугольников будут расположены по дуге  $ab$  окружности радиуса  $\frac{2}{3}R$ .

Таким образом, центр тяжести кругового сектора совпадает с центром тяжести дуги  $ab$  окружности и его положение, следовательно, будет определяться формулой

$$x_C = \frac{2}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} R.$$

Если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то  $x_C = \frac{4}{\pi} R$ , то есть получили уже известную нам формулу, определяющую положение центра тяжести площади полукруга.

Рассмотренные примеры показывают, что формулы Гульдена позволяют определять положение центра тяжести таких однородных линий и плоских фигур, при вращении которых вокруг оси будут известны их боковые поверхности и объемы.

### Способ разбиения

Этот способ позволяет найти положение центра тяжести тела, которое можно разбить на такие части, что положение центра тяжести каждой из них будет известно, или же тела, имеющего вырезы, причем такие, что центры тяжести вырезанных частей и центр тяжести этого тела без вырезов извест-

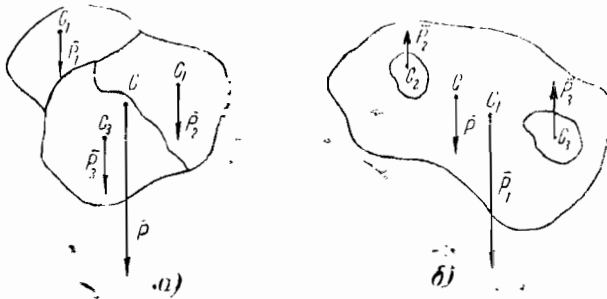


Рис. 4-20

ны. Тогда задача о нахождении центра тяжести такого тела, очевидно, сведется к нахождению центра системы параллельных сил, каждая из которых представляет собой вес соответствующей части тела или части вырезанной из тела.

В самом деле. Представим себе два тела, из которых одно разбито на три части, а второе имеет два выреза (рис. 4-20). Здесь через  $G_i$  соответственно обозначены точки приложения сил  $P_i$ , причем сила  $P_1$  во втором случае обозначает вес тела без вырезов.

Считая вырез частью тела, второе тело можно рассматривать также состоящим из трех частей: двух его вырезов и его самого без них. Вес первого тела равен  $P = P_1 + P_2 + P_3$ , вес второго —  $P = P_1 - P_2 - P_3$ . Вот почему на рис. 4-20 силы  $P_2$  и  $P_3$  направлены вверх. Из этого рисунка видно, что нахождение центра тяжести каждого тела сводится к определению центра системы трех параллельных сил  $P_1, P_2, P_3$ . Его мы найдем по формулам (4-4), определяющим центр системы любого числа параллельных сил.

Обозначим координаты точек приложения сил  $P, P_1, P_2, P_3$  соответственно через

$$(x_c, y_c, z_c), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3),$$



их проекции на ось  $z$  теми же буквами, но взятыми с соответствующими знаками, тогда по формулам (4-4) найдем координаты центра тяжести первого тела

$$x_C = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3},$$

$$y_C = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3}{P_1 + P_2 + P_3},$$

$$z_C = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

и координаты центра тяжести второго тела

$$x_C = \frac{P_1 x_1 - P_2 x_2 - P_3 x_3}{P_1 - P_2 - P_3},$$

$$y_C = \frac{P_1 y_1 - P_2 y_2 - P_3 y_3}{P_1 - P_2 - P_3},$$

$$z_C = \frac{P_1 z_1 - P_2 z_2 - P_3 z_3}{P_1 - P_2 - P_3}.$$

Если же рассматриваемые тела представляют собой две плоские однородные фигуры, то вес  $P_i$  каждой ее части будет равен  $P_i = \lambda S_i$  произведению площади этой части на вес  $\lambda$  единицы площади. Подставляя эти значения сил  $P_i$  в первые два равенства формул (4-4), найдем координаты центра тяжести первой и второй плоских фигур

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3}, \quad y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3},$$

$$x_C = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2 - S_3 x_3}{S_1 - S_2 - S_3}, \quad y_C = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2 - S_3 y_3}{S_1 - S_2 - S_3},$$

**Примеры на определение центров тяжести тел, плоских фигур и линий способом разбиения**

**Задача 4-2.** Тело состоит из цилиндра и конуса, сложенных своими равными основаниями. Высота цилиндра равна  $H$ , высота конуса равна  $h$ . Каково должно быть отношение  $\frac{h}{H}$ , чтобы центр тяжести этого тела совпадал с геометрическим центром основания конуса? (рис. 4-21).

**Решение.**

Данное тело имеет ось  $Z$  симметрии и состоит из двух тел: цилиндра и конуса, объемы которых соответственно равны

$$V_1 = \pi R^2 H \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Центр тяжести тела находится на оси  $Z$ . Если точку  $C$  принять за начало отсчета, тогда координаты центров тяжести тела, цилиндра и конуса соответственно будут равны

$$z_C = 0, \quad z_1 = -\frac{H}{2}, \quad z_2 = \frac{h}{4}.$$

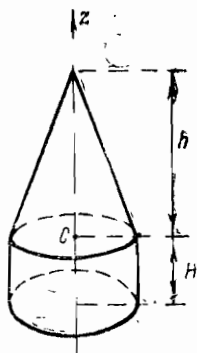


Рис. 4-21

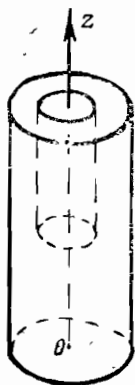


Рис. 4-22

Подставляя эти значения в формулу

$$z_C = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P_1 + P_2} = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2},$$

где  $P_1 = \gamma V_1$ ,  $P_2 = \gamma V_2$ ,  $\gamma$  — удельный вес, и сокращая на  $\pi R^2$ , получим

$$\frac{\frac{h^3}{12} - \frac{H^3}{2}}{H - \frac{h}{3}} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{h^3}{12} - \frac{H^3}{2} = 0,$$

тогда

$$\frac{h}{H} = \sqrt[3]{6}.$$

**Задача 4-3.** Из круглого цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$  вырезан цилиндр, имеющий с ним общую ось, с радиусом основания  $r = 1/2 R$  и высотой  $h = 1/2 H$  (рис. 4-22). Найти положение центра тяжести оставшейся части.

**Решение.**

Данное тело имеет ось  $Z$  симметрии, следовательно, его центр тяжести будет находиться на этой оси. Обозначим объем цилиндра без выреза через

$$V_1 = \pi R^2 H,$$

а объем вырезанного цилиндра через

$$V_2 = \pi r^2 h = \frac{1}{8} \pi R^2 H.$$

Если центр тяжести основания цилиндра радиуса  $R$  примем за начало отсчета, то координаты центров тяжести цилиндров соответственно будут равны

$$z_1 = \frac{H}{2}, \quad z_2 = H - \frac{h}{2} = \frac{3H}{4}.$$

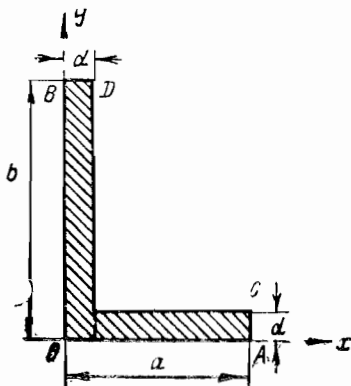


Рис. 4-23

Подставляя значения объемов и координат их центров тяжести в формулу

$$Z_c = \frac{V_1 z_1 - V_2 z_2}{V_1 - V_2}.$$

и сокращая на  $\pi R^2 H$ , получим

$$z_c = \frac{\frac{H}{2} - \frac{3H}{32}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{13}{28} H.$$

**Задача 4-4.** Найти координаты центра тяжести поперечного сечения неравнобокого уголка, полки которого имеют ширину  $OA=a$ ,  $OB=b$  и толщину  $AC=BD=d$  (рис. 4-23).

### Решение.

Данную фигуру разобьем на два прямоугольника, основание и высота которых соответственно равны  $d$  и  $b$ ,  $(a-d)$  и  $d$ , тогда площади этих прямоугольников и координаты их центров тяжести будут

$$S_1 = bd, \quad x_1 = \frac{d}{2}, \quad y_1 = \frac{b}{2},$$

$$S_2 = (a-d)d, \quad x_2 = d + \frac{a-d}{2} = \frac{a+d}{2}, \quad y_2 = \frac{d}{2}.$$

Подставляя эти значения формулы

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2}, \quad y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}$$

и сокращая на  $d$ , найдем координаты центра тяжести данной плоской фигуры

$$x_C = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(a+b-d)}, \quad y_C = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(a+b-d)}.$$

Полагая в этих формулах  $d=0$ , получим формулы

$$x_C = \frac{a^2}{2(a+b)}, \quad y_C = \frac{b^2}{2(a+b)},$$

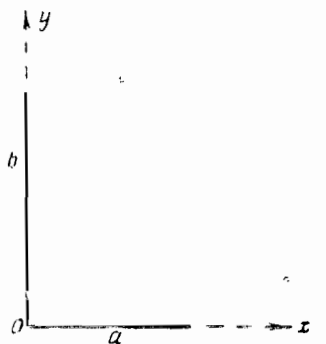


Рис. 4-24

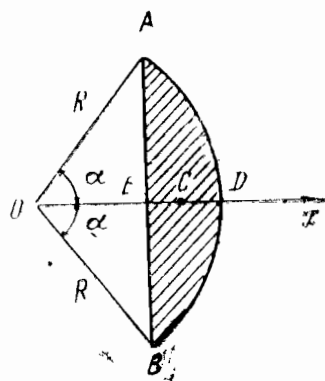


Рис. 4-25

которые определяют положение центра тяжести однородной линии, имеющей форму прямого угла (рис. 4-24).

**Задача 4-5.** Найти центр тяжести  $C$  площади кругового сегмента  $ADB$ , центральный угол и радиус которого соответственно равны  $2\alpha$  и  $R$  (рис. 4-25).

**Решение.**

Центр тяжести  $C$  кругового сегмента находится на оси  $Ox$  симметрии. Его координату  $x_C$  найдем по формуле

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2},$$

где через  $S_1 = \frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot 2\alpha = R^2 \alpha$  и  $x_1 = \frac{2}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} R$ ,

$$S_2 = OE \cdot AE = R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad x_2 = \frac{2}{3} OE = \frac{2}{3} R \cos \alpha.$$

Соответственно обозначены площадь кругового сегмента  $OAB$  и координаты его центра тяжести, площадь треугольника  $OAB$  и координата его центра тяжести. Подставляя эти зна-

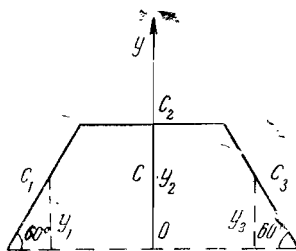


Рис. 4-26

чения в формулу и произведя несложные преобразования, найдем координату центра тяжести кругового сегмента

$$x_C = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

Полагая  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , найдем уже известную нам формулу  $x_C = \frac{4}{3\pi} R$ , которая определяет положение центра тяжести полукруга.

**Задача 4-6.** Определить положение центра тяжести полупериметра правильного шестиугольника, сторона которого равна  $a$  (рис. 4-26).

**Решение.**

Центр тяжести полупериметра шестиугольника лежит на оси  $Oy$  симметрии. Длина каждой стороны и ординаты их центров тяжести соответственно будут равны

$$l_1 = a, \quad y_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}, \quad l_2 = a, \quad y_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad l_3 = a, \quad y_3 = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Подставляя эти значения в формулу

$$y_c = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3}{l_1 + l_2 + l_3},$$

найдем ординату центра тяжести полупериметра шестиугольника

$$y_c = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**Задача 4-7.** Определить положение центра тяжести  $C$  стержневого контура  $AFBD$ , состоящего из дуги  $ADB$  четверти

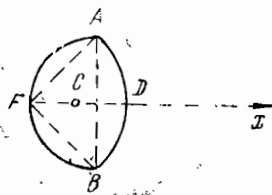


Рис. 4-27

окружности радиуса  $FD=R$  и из дуги полуокружности  $AFB$ , построенной на хорде  $AB$ , как на диаметре. Линейные плотности стержней одинаковы (рис. 4-27).

**Решение.**

Центр тяжести лежит на оси  $Ox$  симметрии. Положение его на ней найдем по формуле

$$x_c = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2}{l_1 + l_2},$$

где

$$l_1 = \pi \cdot EF = \frac{\pi R \sqrt{2}}{2}, \quad x_1 = EF = \frac{2 \cdot EF}{\pi} = R \frac{\sqrt{2}}{2} = R \frac{\sqrt{2}}{\pi},$$

$$l_2 = \frac{\pi R}{2}, \quad x_2 = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2R \sqrt{2}}{\pi}.$$

Подставляя эти значения в формулу и произведя несложные преобразования, найдем координату центра тяжести данного стержневого контура

$$x_c = R(\sqrt{2} - 1) + \frac{2R}{\pi} (3 - 2\sqrt{2}).$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

### СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

#### Глава I. АКСИОМЫ СТАТИКИ

	Стр.
§ 1. Основные понятия и определения . . . . .	3
§ 2. Аксиомы статики . . . . .	5
§ 3. Методика решения задач статики . . . . .	17

#### Глава II. СТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Система сходящихся сил на плоскости . . . . .	30
§ 2. Момент силы относительно точки плоскости . . . . .	48
§ 3. Пара сил. Свойство пар сил на плоскости . . . . .	49
§ 4. Сложение и условие равновесия системы пар на плоскости . . . . .	53
§ 5. Произвольная плоская система сил . . . . .	55
§ 6. Возможные случаи приведения произвольной плоской системы сил . . . . .	63
§ 7. Различные виды уравнений равновесия произвольной плоской системы сил . . . . .	68
§ 8. Статически определенные и статически неопределенные задачи . . . . .	71
§ 9. Трение скольжения . . . . .	86

#### Глава III. СТАТИКА В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Пространственная система сходящихся сил . . . . .	93
§ 2. Момент силы относительно точки, как вектор . . . . .	106
§ 3. Момент силы относительно оси . . . . .	109
§ 4. Теория пар в пространстве . . . . .	113
§ 5. Приведение пространственной системы сил к данному центру . . . . .	120
§ 6. Условия равновесия пространственной системы сил . . . . .	123
§ 7. Приведение пространственной системы сил к различным центрам. Инварианты пространственной системы сил . . . . .	136

#### Глава IV. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 1. Центр системы параллельных сил, координаты центра системы параллельных сил . . . . .	143
§ 2. Центр тяжести . . . . .	147
§ 3. Способы определения центров тяжести некоторых тел . . . . .	152