МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РАСЧЁТУ ПО КУРСУ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ СИСТЕМЫ С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ С ПОМОЩЬЮ MATHEMATICA

Издательство МЭИ

Москва 2006

УДК 531
М 545

Методические указания к расчёту по курсу “Теоретическая механика”. Решение задач статики системы с неудерживающими связями с помощью MATHEMATICA. М.Ф.Зацепин, О.М.Капустина. М.: Изд-во МЭИ, 2006. 22 с.

Содержат расчётные задания для аудиторных занятий на ПЭВМ при изучении темы “Статика”.

Излагается методика определения в системах с неудерживающими связями некоторых не заданных в условии активных сил, при которых связи находятся в натяжении, и методика последующего вычисления реакций связей. Рассмотрен пример выполнения задания с использованием MATHEMATICA. Даются необходимые пояснения и иллюстрации к решению задачи.

Предназначены для студентов, изучающих курс “Теоретическая механика”.

Описание задания

Цель задания – развитие навыков составления и решения уравнений равновесия механической конструкции; формирование представления о конструкции с неудерживающими связями как об управляемой системе, в которой приведение неудерживающих связей в натяжение возможно за счёт выбора активных сил.

Постановка задачи. Рассматривается находящаяся в положении равновесия плоская механическая конструкция, среди связей которой имеются две гибкие нерастяжимые нити. Требуется выбрать величину и направление силы на заданной линии действия, а также величину и направление момента пары сил, действующих на конструкцию, так, чтобы обе нити оказались натянутыми. При выбранных таким образом силах следует определить реакции внешних и внутренних связей конструкции.

Все элементы конструкции, кроме нитей, считаются абсолютно жёсткими. Трение в шарнирах и точках контакта отсутствует. Во всех вариантах схема конструкции условно разбита вертикальным отрезком AB на левую и правую части. В левой части схемы может быть любой из десяти вариантов $A1$-$A10$, представленных на рис.1-2; в правой части – любой из вариантов $B1$-$B10$ на рис.2-3. Индивидуальное задание составляется путём выбора левой и правой части и совмещения их по отрезку AB. Таким способом можно получить сто различных вариантов схем конструкций.

Числовые значения параметров вычисляются по формулам

$$G_1 = G_{1T} + \Delta G_1,\ G_2 = G_{2T} + \Delta G_2,\ G_3 = G_{3T} + \Delta G_3,$$
$$\alpha = \pi/6 + \Delta_\alpha,\ \beta = \pi/3 + \Delta_\beta,\ \gamma = \pi/4 + \Delta_\gamma, \qquad (1)$$

где

$$\Delta G_1 = 0{,}1 \cdot n, \quad \Delta G_2 = 0{,}1 \cdot N, \quad \Delta G_3 = 0{,}1 \cdot N,$$
$$\Delta_\alpha = 0{,}001 \cdot n, \quad \Delta_\beta = 0{,}001 \cdot N, \quad \Delta_\gamma = 0{,}001 \cdot N,$$

n– номер группы, N – номер факультета. Значения весов $G_{1T}, G_{2T}, \Delta G_{3T}$ в кН заданы в таблице.

Таблица

Номер варианта A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_{1T}	8	4	10	2	2	8	4	12	8	10
Номер варианта B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_{2T}	4	6	8	14	10	8	12	10	12	4
G_{3T}	10	8	4	6	2	4	4	6	10	15

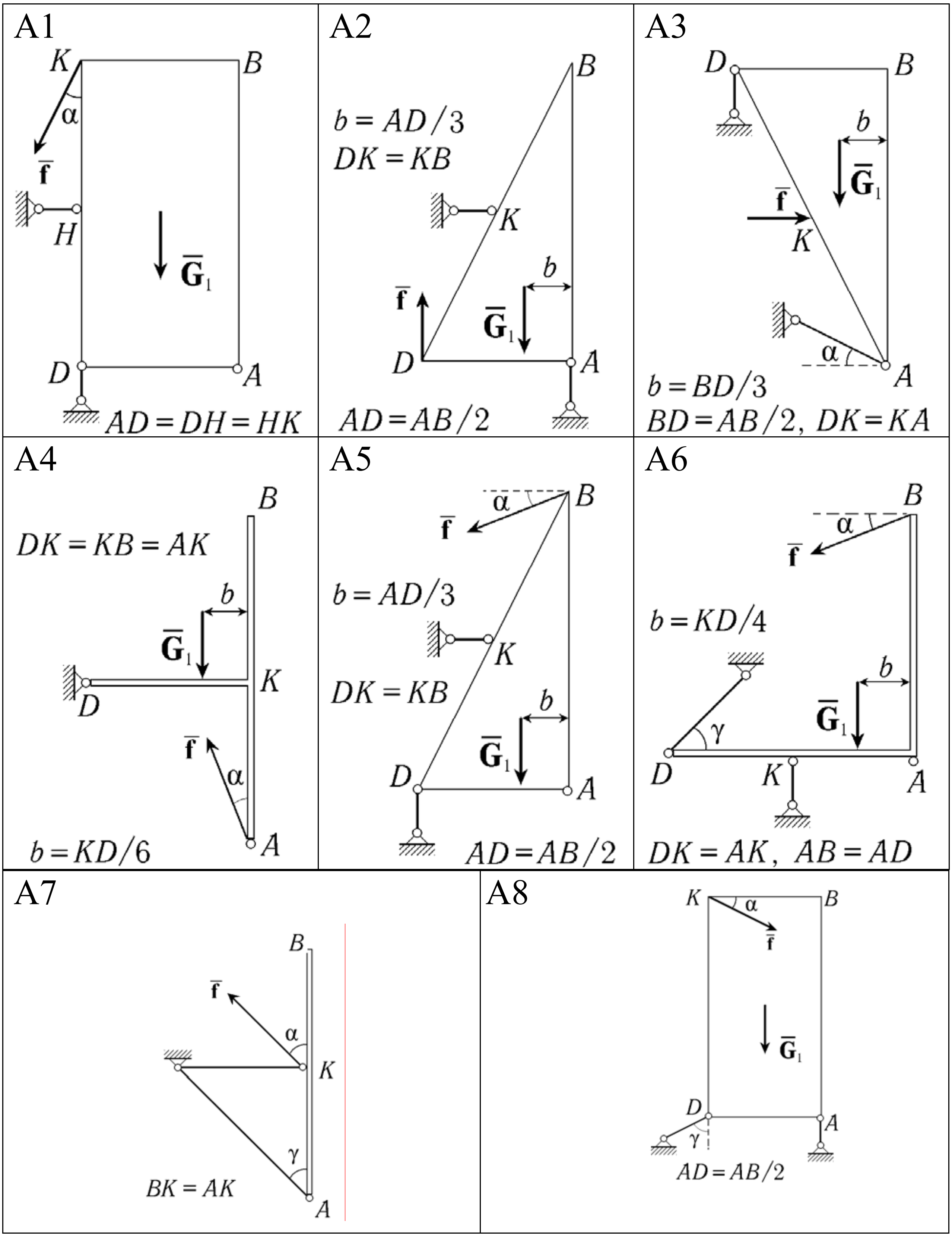

A1
K
B
α
f
H
G1
D
A
AD = DH = HK
A2
B
b = AD/3
DK = KB
K
b
f
G1
D
A
AD = AB/2
A3
D
B
b
G1
f
K
α
A
b = BD/3
BD = AB/2, DK = KA
A4
B
DK = KB = AK
b
G1
K
D
f
α
A
b = KD/6
A5
α
B
f
b = AD/3
K
DK = KB
b
G1
D
A
AD = AB/2
A6
B
α
f
b = KD/4
b
γ
G1
D
K
A
DK = AK, AB = AD
A7
B
f
α
K
γ
BK = AK
A
A8
K
α
B
f
G1
D
A
γ
AD = AB/2

Рис. 1

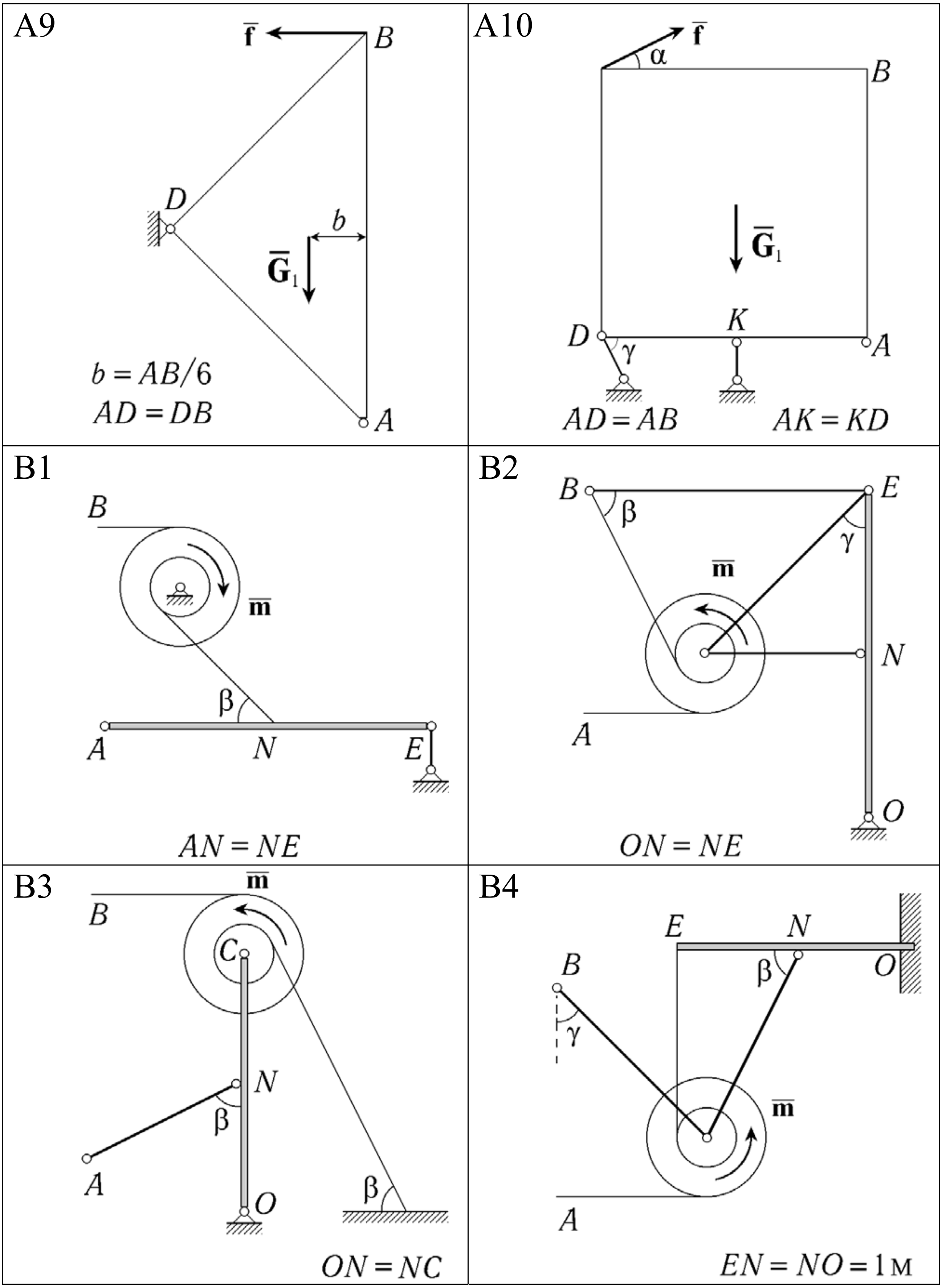

A9
f
B
D
b
G1
b = AB/6
AD = DB
A
A10
α
f
B
G1
K
D
γ
A
AD = AB
AK = KD
B1
B
m
β
A
N
E
AN = NE
B2
B
β
E
γ
m
N
A
O
ON = NE
B3
m
B
C
N
β
A
O
β
ON = NC
B4
E
N
B
β
O
γ
m
A
EN = NO = 1 м

Рис. 2.

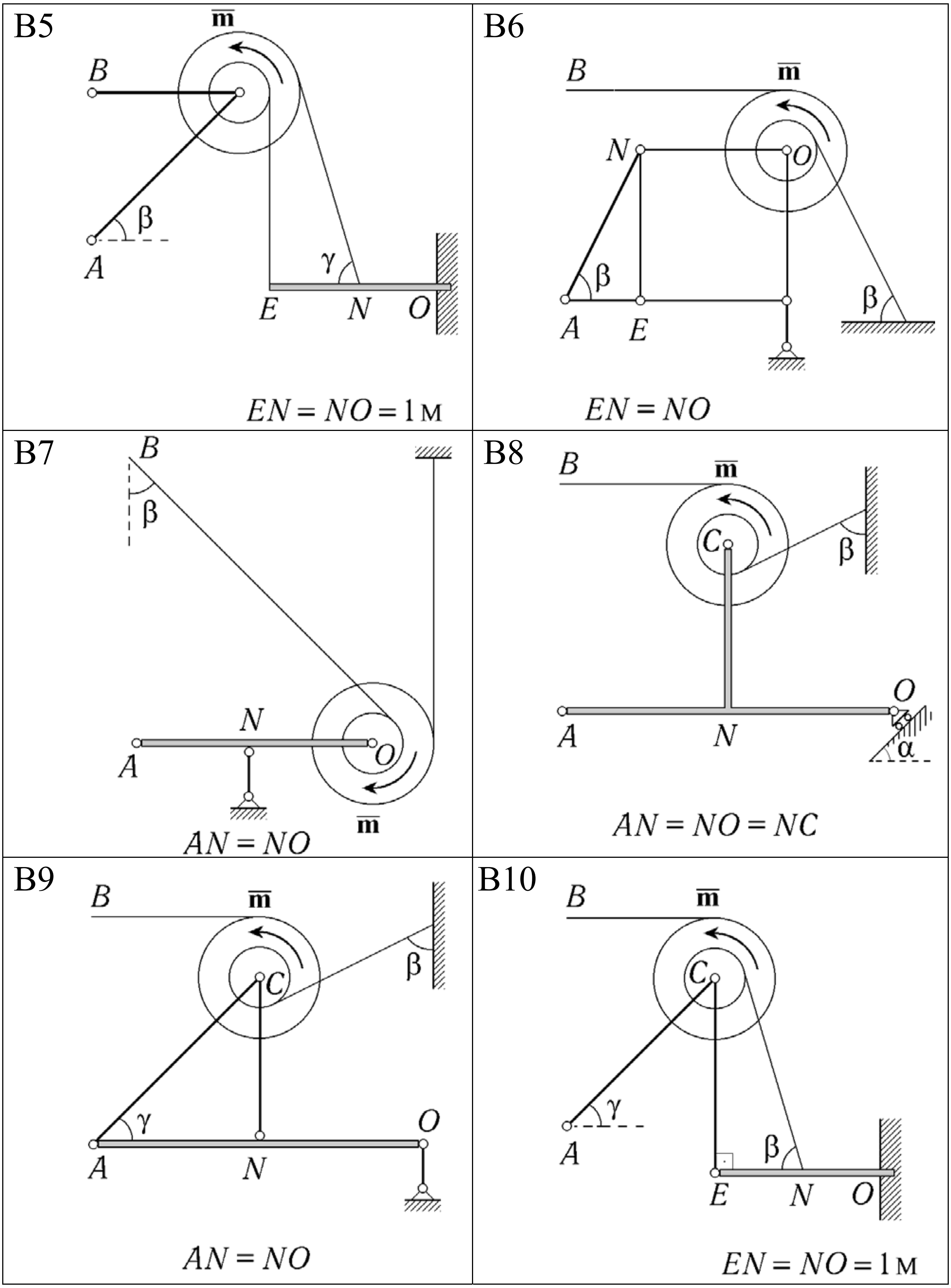

B5
m
B
β
A
γ
E
N
O
EN = NO = 1 м
B6
B
m
N
O
β
A
E
β
EN = NO
B7
B
β
N
A
O
m
AN = NO
B8
B
m
C
β
O
A
N
α
AN = NO = NC
B9
B
m
β
C
γ
O
A
N
AN = NO
B10
B
m
C
γ
A
β
E
N
O
EN = NO = 1 м

Рис. 3.

Во всех вариантах следует считать невесомыми шарниры, нити, стержни, изображённые одной сплошной линией. Для весов остальных тел приняты следующие обозначения: G_1 – вес тела в вариантах $A1$ - $A10$; G_2, G_3 – вес блока и вес тела, отличного от блока, в вариантах $B1$ – $B2$. Величины большого R и малого r радиусов блока одинаковы для всех схем: $R = 2r = 0{,}5м$. Другие необходимые параметры и соотношения между ними указаны на рис.1–3.

Замечание. Рис.1 - 14 выполнены Осадченко Н.В. методами компьютерной графики.

Условия натяжения нитей

Пояснения к получению условий равновесия. Конструкция освобождается от внешних и внутренних связей. При этом связи заменяются соответствующими силами – реакциями связей. Предполагается, что неудерживающие связи находятся в состоянии натяжения. Для определения неизвестных реакций, согласно [1], необходимо составить уравнения равновесия так, как если бы все связи, наложенные на конструкцию, были удерживающими, и дополнить эти уравнения неравенствами, выражающими условия физической реализуемости заданного положения равновесия с помощью неудерживающих связей. При составлении уравнений равновесия может быть использована методика, приведённая в [2].

В настоящем задании рассматриваются статически определённые задачи, в которых для нахождения девяти неизвестных реакций составляется система девяти линейных уравнений равновесия. Эта система приводится к матричному виду

$$AX = f\,A_f + m\,A_m + B, \tag{2}$$

где X – вектор-столбец проекций неизвестных реакций на фиксированные направления; A – матрица коэффициентов при компонентах вектора X; f – подлежащая выбору проекция активной силы на заданную в условии её линию действия; m – подлежащая выбору проекция момента активной пары сил на ось, перпендикулярную плоскости конструкции; A_f, A_m – векторы-столбцы коэффициентов при параметрах f, m; B – вектор-столбец свободных членов.

Элементы матрицы A и столбцов A_f, A_m, B должны быть вычислены по известным значениям числовых параметров (1).

Две гибкие нерастяжимые нити могут оказывать только растягивающие усилия на тела, к которым они прикреплены. Поэтому для осуществления равновесия необходимо, чтобы проекции сил натяжения нитей на направления вдоль нитей от этих тел были бы неотрицательными.

Пусть указанные проекции сил натяжения – i - й и j - й элементы столбца X. Обозначим их через x_i и x_j соответственно. Тогда условия физической реализуемости положения равновесия конструкции примут вид

$$\begin{cases} x_i \geq 0, \\ x_j \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

причём знак равенства здесь соответствует ненатянутым нитям.

Пояснения к получению условий натяжения нитей. Чтобы найти ограничения на параметры f и m, налагаемые условиями (3), умножим слева обе части системы (2) на обратную матрицу A^{-1} и представим решение этой системы в виде линейной функции f и m:

$$X = f\, A_f^* + m\, A_m^* + B^*, \tag{4}$$

где $A_f^* = A^{-1} A_f$, $A_m^* = A^{-1} A_m$, $B^* = A^{-1} B$.

Из векторного равенства (4) получим следующие выражения проекций:

$$\begin{aligned} x_i &= f\, a_{fi}^* + m\, a_{mi}^* + b_i^*, \\ x_j &= f\, a_{fj}^* + m\, a_{mj}^* + b_j^*. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $a_{fi}^*, a_{fj}^*, a_{mi}^*, a_{mj}^*, b_i^*, b_j^*$ – i – е и j – е элементы столбцов A_f^*, A_m^*, B^* соответственно. С учётом выражений (5) запишем условия (3) для натянутых нитей в виде системы двух линейных неравенств относительно f и m:

$$\begin{cases} x_i = f\, a_{fi}^* + m\, a_{mi}^* + b_i^* > 0, \\ x_j = f\, a_{fj}^* + m\, a_{mj}^* + b_j^* > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Замечание. В реальных механических конструкциях условия натяжения нитей (6) должны быть дополнены ограничениями сверху на величины проекций x_i, x_j (чтобы не допустить обрыва нитей). В настоящем задании эти условия не рассматриваются.

Выбор активной силы и активной пары, удовлетворяющей условиям натяжения нитей

Решение системы двух линейных неравенств (6) относительно двух неизвестных f и m может быть получено геометрическим способом. При этом в зависимости от вида линейных трёхчленов в (6) возможны следующие случаи.

1. **Оба трёхчлена в (6) зависят хотя бы от одного из двух параметров *f, m*.** При этих условиях оба уравнения $x_i = 0, x_j = 0$ являются уравнениями прямых на плоскости Ofm. Тогда, как известно [3], множество $\mathcal{D}$ решений системы (6) представляет собой пересечение двух полуплоскостей, положительных по отношению к уравнениям этих прямых.

1.1. Прямые $x_i = 0, x_j = 0$ имеют точку пересечения. В [3] показано, что точка пересечения прямых существует тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\Delta_{fm} = \begin{vmatrix} a^*_{fi} & a^*_{mi} \\ a^*_{fj} & a^*_{mj} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

При условии (7) область $\mathcal{D}$ имеет, например, вид, представленный на рис.4. На этом и последующих рисунках область $x_i > 0$ и область $x_j > 0$ отмечены вертикальной и горизонтальной штриховкой соответственно, а их пересечение этих областей, т.е. область $\mathcal{D}$, – двойной.

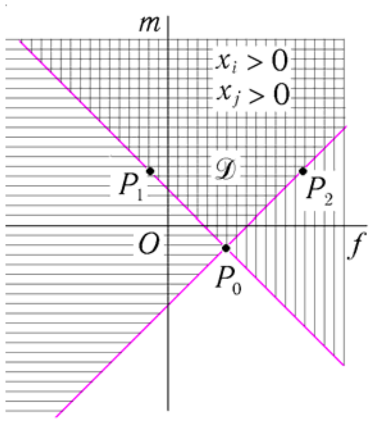


Рис.4.

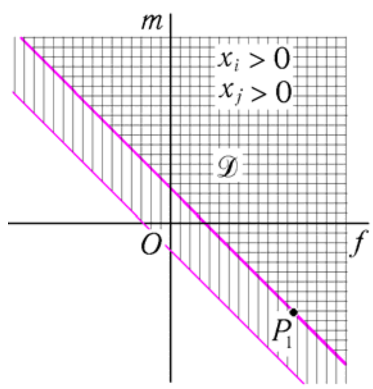


Рис.5.

1.2. Прямые $x_i = 0, x_j = 0$ параллельны. Если условие (7) не выполнено, то

$$a^*_{fi} : a^*_{fj} = a^*_{mi} : a^*_{mj}.$$

Если при этом

$$a^*_{fi} : a^*_{fj} = a^*_{mi} : a^*_{mj} \neq b^*_i : b^*_j,$$

то прямые $x_i = 0, x_j = 0$ параллельны [3]. В таком случае система (6) либо имеет решение, например, в виде области $\mathcal{D}$, изображённой на рис.5 или рис.6, либо не имеет решения, как это показано на рис.7.

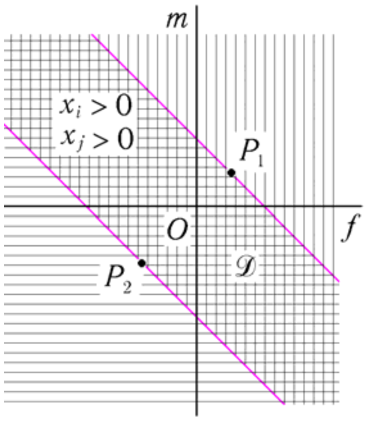


Рис.6.

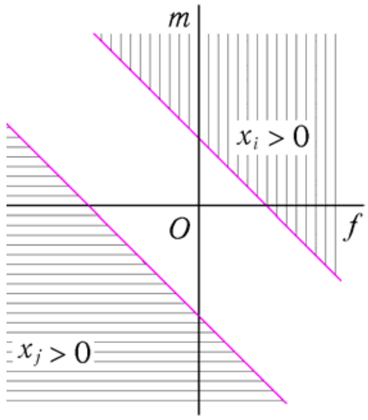


Рис.7.

1.3. Прямые $x_i = 0, x_j = 0$ совпадают. Если одновременно с условием (7) выполняется и условие
$$a^*_{fi} : a^*_{fj} = a^*_{mi} : a^*_{mj} = b^*_i : b^*_j = \lambda,$$

то, согласно [3], прямые $x_i = 0, x_j = 0$ совпадают. При положительном λ область $\mathscr{D}$ имеет, например, вид, представленный на рис.8, а при отрицательном λ система (6) несовместна, т.е. область $\mathscr{D}$ пуста, как показано на рис.9.

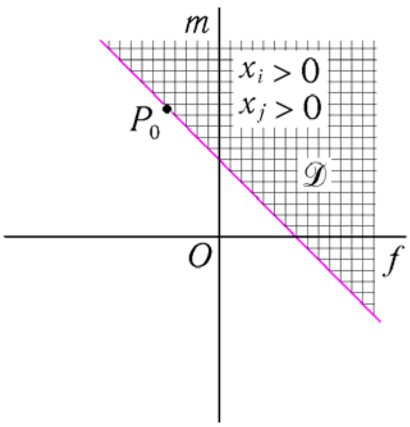


Рис.8.

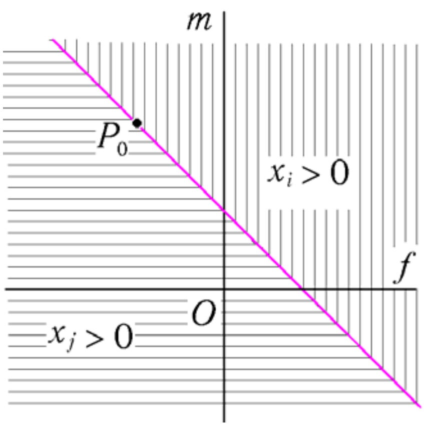


Рис.9.

2. **Один или оба трёхчлена в (6) не зависят от обоих параметров *f, m*.** В таком случае либо только одно из уравнений $x_i = 0, x_j = 0$ определяет прямую на плоскости *Ofm*, либо ни одно из них не является уравнением прямой.

2.1. $a^*_{fi} = a^*_{mi} = 0, a^*_{fj} \neq 0$ или $a^*_{mj} \neq 0$, т.е $x_i = 0$. – верное или неверное тождество, $x_j = 0$ – уравнение прямой. Из (6) тогда получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x_i = b^*_i > 0, \\ x_j = f\, a^*_{fj} + m\, a^*_{mj} + b^*_j > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Если $b_i^* > 0$, то область $x_i > 0$ – это вся плоскость Ofm, а область $\mathscr{D}$ совпадает с областью $x_j > 0$. На рис.10 дана графическая иллюстрация такого варианта. Если же $b_i^* \le 0$, то область $\mathscr{D}$ пуста.

2.2. $a_{fj}^* = a_{mj}^* = 0, a_{fi}^* \ne 0$ или $a_{mi}^* \ne 0$, т.е. $x_j = 0$ – верное или неверное тождество, $x_i = 0$ – уравнение прямой. При этих условиях система (6) примет вид

$$\begin{cases} x_i = f\,a_{fi}^* + m\,a_{mi}^* + b_i^* > 0, \\ x_j = b_j^* > 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Ясно, что по существу настоящий вариант совпадает с рассмотренным в пункте 2.1. При $b_j^* > 0$ область $\mathscr{D}$ совпадает с областью $x_i > 0$, изображённой на рис.11. При $b_j^* \le 0$ область $\mathscr{D}$ пуста.

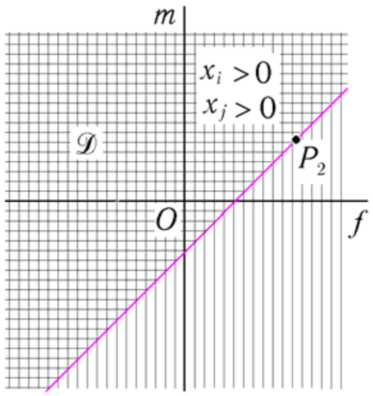


Рис.10.

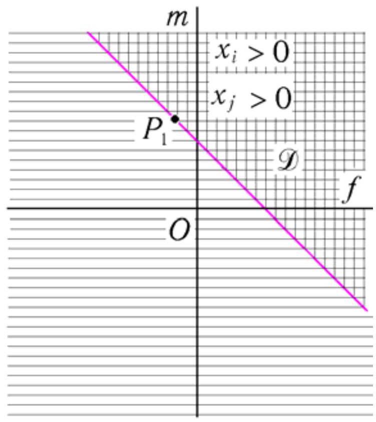


Рис.11.

2.3. $a_{fi}^* = a_{mi}^* = a_{fj}^* = a_{mj}^* = 0$, т.е. $x_i = 0, x_j = 0$ – два верных или неверных тождества. Запишем систему (6) при таких значениях коэффициентов

$$\begin{cases} x_i = b_i^* > 0, \\ x_j = b_j^* > 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Если $b_i^* > 0$ и $b_j^* > 0,$ то система (10) справедлива при любых значениях f и m, и, следовательно, область $\mathscr{D}$ совпадает со всей плоскостью Ofm на рис.12. Если же хотя бы одно из значений b_i^* или b_j^* не положительно, то область $\mathscr{D}$ пуста.

Механическая интерпретация результатов выбора *f* и *m*. Если выбранная точка $P(f,m)$ принадлежит области $\mathscr{D}$ на рис.4 – 6, 8, 10 – 12, то неравенства (6) выполняются и, следовательно, обе нити находятся в натяжении.

Не существует значений f и m, при которых в заданном положении равновесия конструкции обе нити были бы натянуты, т. е.система (6) несовместна, в следующих случаях:

1) представленном на рис.7;

2) представленном на рис.9;

3) в вариантах 2.1, 2.3 при условии $b_i^* \le 0$; в вариантах 2.2, 2.3 при условии $b_j^* \le 0$.

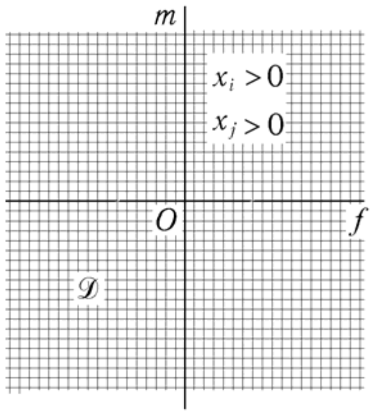


Рис. 12.

Случаи несовместности системы (6) различаются по своему механическому смыслу. В первом случае конструкция не может находиться в равновесии в заданном положении ни при каких *f* и *m*, если обе неудерживающие связи являются нитями. Во втором и в третьем случаях равновесие можно осуществить при помощи нитей, но одна из них или обе будут не натянуты.

Действительно, несколько изменим задачу и допустим, что при равновесии конструкции нити могут быть натянуты или не натянуты. Тогда на силы натяжения нитей следует наложить ограничения (3). Запишем эти условия, заменив в системе (6) знаки строгих неравенств на знаки нестрогих:

$$\begin{cases} x_i = f\,a_{fi}^* + m\,a_{mi}^* + b_i^* \ge 0, \\ x_j = f\,a_{fj}^* + m\,a_{mj}^* + b_j^* \ge 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Теперь равновесие конструкции возможно, если точка $P(f,m)$ принадлежит:

- области $\mathscr{D}$ вместе со своей границей на рис.4 – 6, 8 – 12;

Равновесие конструкции невозможно ни при каких значениях *f* и *m* в случаях:

- представленном на рис.7;

- в вариантах 2.1, 2.3 при условии $b_i^* < 0$; в вариантах 2.2, 2.3 при условии $b_j^* < 0$.

В отличие от решения системы (6), множество решений системы (11) включает такие точки плоскости *Ofm*, в которых либо одна из нитей не натянута, например:

- точка P_1 или точка P_2 на границе области $\mathscr{D}$ на рис.4 – 6, рис.10,11;

- любая точка плоскости *Ofm* в случае 2.3, если $x_i = b_i^* = 0, x_j = b_j^* > 0$ или $x_j = b_j^* = 0, x_i = b_i^* > 0$;

либо обе нити не натянуты, например:

- точка P_0 на рис.4, 8, 9;

- точка P_2 на рис.10 при $x_i = b_i^* = 0$;

- точка P_1 на рис.11 при $x_j = b_j^* = 0$

- любая точка плоскости *Ofm* в случае 2.3, если $x_i = b_i^* = 0, x_j = b_j^* = 0$.

Решение задачи на ПЭВМ

Для решения системы уравнений равновесия и системы неравенств могут быть использованы любые методы, как аналитические, так и численные [4]. Компьютерные системы символьной математики: MATHEMATICA, MATHCAD, MAPLE, MATLAB позволяют всё решение задачи от ввода уравнений равновесия до оформления выполнить на компьютере. Ниже приведён пример использования в указанных целях “MATHEMATICA 5”. Студент получает программу-шаблон, которую он может использовать для решения собственной задачи.

При использовании “MATHEMATICA 5” студент составляет уравнения равновесия конструкции в скалярной форме, проверочное уравнение. С помощью программы, построенной в форме методических указаний, он приводит решение системы уравнений равновесия к виду (4), составляет и решает систему неравенств (6), вычисляет реакции связей, выполняет проверку решения, получает графическое представление множества $\bar{X}$ и точки *P*. Во время защиты работы учащийся должен продемонстрировать понимание метода получения решения.

Контроль решения. Проверка проводится, как в [2], подстановкой решения в проверочное уравнение и последующего вычисления относительной “невязки” δ между его левой и правой частью:

$$\delta = \left(\frac{\Delta}{\max\limits_{1 \le k \le 9} |x_k|} \right) \cdot 100\%.$$

Здесь Δ – абсолютная “невязка” проверочного уравнения, равная разности его левой и правой части; $\max\limits_{1 \le k \le 9} |x_k|$ – модуль максимальной по абсолютной величине компоненты *X*. Точность решения считается приемлемой, если $\delta < 1\%$.

Защита расчёта. При защите расчёта студент должен ответить на вопросы и выполнить задания, подобные следующим:

1. Привести примеры удерживающих и неудерживающих связей.

2. Написать уравнения равновесия одного из тел конструкции в предположении, что нити, прикреплённые к нему, не натянуты.

3. Показать на рисунке, изображающем на плоскости *Ofm* множество решений системы (6), точки, в которых:

– одна или обе нити не натянуты;

– равновесие конструкции невозможно;

4. Получить аналитическое выражение условий, не допускающих обрыва нитей. Построить на плоскости *Ofm* множество решений системы неравенств, выражающих эти условия и условия натяжения нитей (6).

Пример выполнения задания

Постановка задачи. Пусть студент, обучающийся в группе с номером $n = 7$ на факультете с номером $N = 3$, получил вариант задания *A*1– *B*10. Для решения этого задания найдём на рис.1 схему варианта *A*1, а на рис.3 – схему варианта *B*10. Соединив по вертикальному отрезку *AB* левую часть – вариант *A*1 и правую часть – вариант *B*10, получим полную схему конструкции, представленную на рис.13.

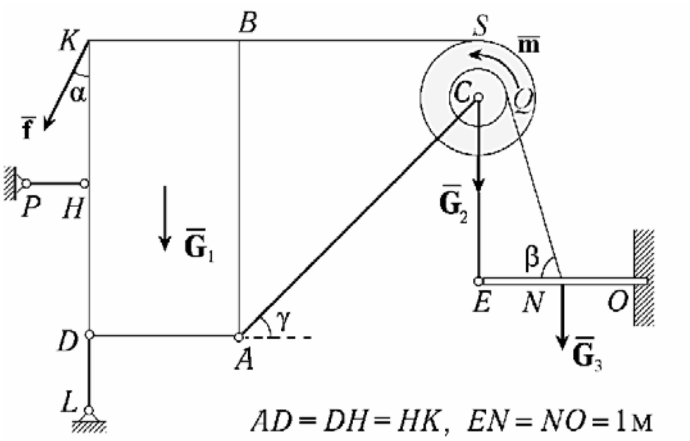


Рис.13.

В конструкции заданы: вес прямоугольной пластинки – G_1, вес блока – G_2, вес балки – G_3. Все элементы конструкции, кроме двух гибких нерастяжимых нитей *BS*, *NQ*, считаются абсолютно жёсткими. Стержни *PH*, *DL*, *AC*, *CE* – невесомы. Трение в шарнирах, точках контакта нитей и блока отсутствует.

Пусть:

$$G_1 = 8{,}7\ kH,\ G_2 = 4{,}3\ kH,\ G_3 = 15{,}7\ kH,\ \sin\alpha = 0{,}531,\ \sin\beta = 1{,}05,\ \sin\gamma = 0{,}788,$$

$$DA = KB = a,\ AB = DK = 2\,a,\quad EN = NO = 1\ м,\quad r = 0{,}25\ м,\quad R = 2r,\quad r, R\ –$$

малый и большой радиус блока соответственно.

Требуется выбрать значения f и m, при которых нити BS и NQ находятся в натяжении, и определить соответствующую этим значениям реакцию жёсткой заделки в точке O, усилия в стержнях PH, DL, AC, CE, силы натяжения нитей BS и NQ.

Составление уравнений равновесия

В соответствии с методикой [5] нахождения неизвестных реакций освободим систему от внешних и внутренних связей, заменив их реакциями связей, как показано на рис.14.

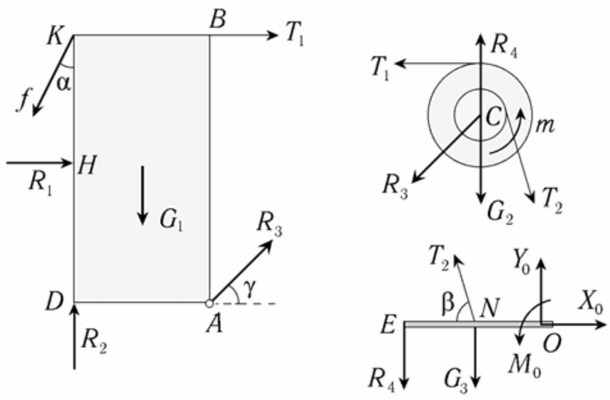


Рис. 14

Изображая силу в виде направленного отрезка, укажем рядом обозначение проекции силы на это направление. При изображении пары сил около символа пары поместим обозначение проекции момента пары на ось, перпендикулярную плоскости пары и направленную в ту сторону, откуда обход параллелограмма, определяемого силами пары, виден происходящим против часовой стрелки. Запишем систему уравнений равновесия всей конструкции в виде уравнений равновесия каждого из трёх весомых тел: прямоугольной пластины, блока, балки:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = R_1 + R_3\cos\gamma + T_1 - f\sin\alpha = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = R_2 + R_3\sin\gamma - f\cos\alpha - G_1 = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} M_{Hz}(\overline{F}_k) = aR_3(\cos\gamma + \sin\gamma) - aT_1 + {}$$
$$+ af\sin\alpha - 0{,}5aG_1 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -R_3\cos\gamma - T_1 + T_2\cos\beta = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = -R_3\sin\gamma + R_4 - T_2\sin\beta - G_2 = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cz}(\overline{F}_k) = T_1R - T_2r + m = 0, \qquad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -T_2\cos\beta + X_0 = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = -R_4 + T_2\sin\beta + Y_O - G_3 = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} M_{Nz}(\overline{F}_k) = R_4 + Y_O + M_O = 0.$$

В качестве проверочного примем уравнение равновесия относительно проекций сил на ось y конструкции, освобожденной только от внешних связей,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = R_2 + Y_O - f\cos\alpha - G_1 - G_2 - G_3 = 0. \qquad (13)$$

При использовании “MATHEMATICA 5” следует ввести исходные данные, уравнения (12), (13) в текст программы-шаблона, с помощью которой в среде “MATHEMATICA 5” привести решение системы уравнений равновесия к виду (4), составить и решить систему неравенств (6), дать графическое представление множества и точки P, вычислить реакции связей и “невязку” δ.

Ниже приведёны фрагменты программы, решающей задачу

■ *Ввод исходных данных*

Введём исходные данные

```
g1 = 8.7; g2 = 4.3; g3 = 15.7; α = 0.531;
β = 1.05; γ = 0.788; a = 1;
rad = .36; rad1 = .72;
```

■ *Составление уравнений равновесия*

```
eqns = {r1 + r3 Cos[γ] + t1 - f Sin[α] == 0,

  r2 + r3 Sin[γ] - f Cos[α] - g1 == 0,

  a r3 (Cos[γ] + Sin[γ]) - a t1 + a f Sin[α] - .5 a g1 == 0,

  -r3 Cos[γ] - t1 + t2 Cos[β] == 0,

  -r3 Sin[γ] + r4 - t2 Sin[β] - g2 == 0,

  t1 rad1 - t2 rad + m == 0, -t2 Cos[β] + xo == 0,

  -r4 + t2 Sin[β] + yo - g3 == 0, r4 + yo + mo == 0};
TableForm[Table[StringForm["``=0;", eqns[[i, 1]]], {i, 9}]]
```

```
-0.506396 f + r1 + 0.705265 r3 + t1=0;
-8.7 - 0.862301 f + r2 + 0.708944 r3=0;
-4.35 + 0.506396 f + 1.41421 r3 - t1=0;
-0.705265 r3 - t1 + 0.497571 t2=0;
-4.3 - 0.708944 r3 + r4 - 0.867423 t2=0;
m + 0.72 t1 - 0.36 t2=0;
-0.497571 t2 + xo=0;
-15.7 - r4 + 0.867423 t2 + yo=0;
mo + r4 + yo=0;
```

В качестве проверочного примем уравнение равновесия относительно проекций сил на ось Oy для всей конструкции, освобождённой только от внешних связей.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = R_2 + Y_O - f\cos\alpha - G_1 - G_2 - G_3 = 0.$$

Введём левую часть этого уравнения в программу

```
Δ = r2 + yo - f Cos[α] - g1 - g2 - g3;
StringForm["``= 0;", Δ]
```

```
-28.7 - 0.862301 f + r2 + yo= 0;
```

■ Решение уравнений равновесия

■ Выражение реакций из уравнений равновесия через параметры f и m с помощью функции Solve (первый способ)

Выразим реакции из уравнений равновесия через параметры f и m с помощью функции Solve

```
x1 = x = {r1, r2, t1, r3, xo, yo, r4, t2, mo};
varsnm = {"r1", "r2", "t1", "r3", "xo", "yo", "r4", "t2", "mo"};
x = x /. Solve[eqns, x];
StringForm["X = ``= ``;", varsnm // MatrixForm,
 Table[StringForm["``", x[[1, i]]], {i, 9}] // MatrixForm]
```

$$X = \begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ t1 \\ r3 \\ xo \\ yo \\ r4 \\ t2 \\ mo \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.28711 + 0.00732158\,f - 4.11357\,m \\ 8.67896 + 0.86475\,f - 1.37595\,m \\ -4.30803 + 0.501511\,f + 2.74476\,m \\ 0.029674 - 0.00345443\,f + 1.94084\,m \\ -4.28711 + 0.499074\,f + 4.11357\,m \\ 20.021 - 0.002449\,f + 1.37595\,m \\ -3.15274 + 0.867595\,f + 8.54719\,m \\ -8.61607 + 1.00302\,f + 8.26729\,m \\ -16.8683 - 0.865146\,f - 9.92314\,m \end{pmatrix};$$

■ Нахождение общего решения уравнений равновесия матричным методом (второй способ)

▪ Пребразование уравнений равновесия к матричному виду $AX = f\,A_f + m\,A_m + B$

Построим матрицы A, A_f, A_m, B

```
mateqns = LinearEquationsToMatrices[eqns,
   Join[x1, {f, m}]];

 mata = TakeColumns[mateqns[[1]], 9];

 af = TakeColumns[-mateqns[[1]], {10}];

 am = TakeColumns[-mateqns[[1]], {11}];
```

```
b = mateqns[[2]];
StringForm["X=``;  A = ``;   Af = ``;   Am = ``;   B = ``;",
 varsnm // MatrixForm, mata // MatrixForm, af // MatrixForm,
 am // MatrixForm, b // MatrixForm]
```

$$X=\begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ t1 \\ r3 \\ xo \\ yo \\ r4 \\ t2 \\ mo \end{pmatrix};\quad A = \begin{pmatrix} 1. & 0 & 1. & 0.705265 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1. & 0 & 0.708944 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1. & 1.41421 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1. & -0.705265 & 0 & 0 & 0 & 0.497571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.708944 & 0 & 0 & 1. & -0.867423 & 0 \\ 0 & 0 & 0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 0 & 0 & -0.497571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 0.867423 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 0 & 1. \end{pmatrix};$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0.506396 \\ 0.862301 \\ -0.506396 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1. \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 0. \\ 8.7 \\ 4.35 \\ 0. \\ 4.3 \\ 0. \\ 0. \\ 15.7 \\ 0. \end{pmatrix};$$

Запишем уравнения равновесия в матричном виде

```
StringForm["```` = f`` + m``+``", mata // MatrixForm,
 varsnm // MatrixForm, af // MatrixForm, am // MatrixForm,
 b // MatrixForm]
```

$$\begin{pmatrix} 1. & 0 & 1. & 0.705265 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1. & 0 & 0.708944 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1. & 1.41421 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1. & -0.705265 & 0 & 0 & 0 & 0.497571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.708944 & 0 & 0 & 1. & -0.867423 & 0 \\ 0 & 0 & 0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 0 & 0 & -0.497571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 0.867423 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 0 & 1. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ t1 \\ r3 \\ xo \\ yo \\ r4 \\ t2 \\ mo \end{pmatrix} =$$

$$= f \begin{pmatrix} 0.506396 \\ 0.862301 \\ -0.506396 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1. \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0. \\ 8.7 \\ 4.35 \\ 0. \\ 4.3 \\ 0. \\ 0. \\ 15.7 \\ 0. \end{pmatrix}$$

▪ Нахождение общего решения уравнений равновесия в виде $X = f\, A_f^* + m\, A_m^* + B^*$

Построим матрицы A^{-1}, $A_f^* = A^{-1} A_f$, $A_m^* = A^{-1} A_m$, $B^* = A^{-1} B$

```
a1 = Inverse[mata];
af1 = a1 . af;
am1 = a1 . am;
b1 = a1 . b;
```

Запишем общее решение уравнений равновесия в виде $X = f\, A_f^* + m\, A_m^* + B^*$

```
StringForm["X  =  `` = f`` + m``+``;", varsnm // MatrixForm,
  af1 // MatrixForm, am1 // MatrixForm, b1 // MatrixForm]
```

$$X = \begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ t1 \\ r3 \\ xo \\ yo \\ r4 \\ t2 \\ mo \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0.00732158 \\ 0.86475 \\ 0.501511 \\ -0.00345443 \\ 0.499074 \\ -0.002449 \\ 0.867595 \\ 1.00302 \\ -0.865146 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -4.11357 \\ -1.37595 \\ 2.74476 \\ 1.94084 \\ 4.11357 \\ 1.37595 \\ 8.54719 \\ 8.26729 \\ -9.92314 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.28711 \\ 8.67896 \\ -4.30803 \\ 0.029674 \\ -4.28711 \\ 20.021 \\ -3.15274 \\ -8.61607 \\ -16.8683 \end{pmatrix};$$

■ *Определение активных сил, при которых нити находятся в натяжении, вычисление реакций*

▪ Составление неравенств, определяющих условия натяжения нитей, задание параметров, небходимых для вычислений

Запишем условия натяжения нитей в виде системы двух линейных неравенств относительно f, m

```
{{r1, r2, t1, r3, xo, yo, r4, t2, mo}} = x;
 ColumnForm[{StringForm["T1=``>0", t1], StringForm["T2=``>0", t2]}]
```

$T_1 = -4.30803 + 0.501511\, f + 2.74476\, m > 0$
$T_2 = -8.61607 + 1.00302\, f + 8.26729\, m > 0$

Зададим характерные значения переменных f, m

```
fmax = 100;
fmin = -fmax;
mmax = 100;
mmin = -mmax;
```

▪ Решение неравенств, определяющих условия натяжения нитей

Зададим количество и найдём точки, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} T_1 > 0, \\ T_2 > 0 \end{cases}$ в области $A = \{(f, m) : f_{\min} \le f \le f_{\max},\ m_{\min} \le m \le m_{\max}\}$

```
nslv = 2;
coordp =
  {f, m} /. FindInstance[{t1 > 0 && t2 > 0 && fmin < f < fmax && mmin < m < mmax},
    {f, m}, nslv]
```

```
{{-72., 31.5}, {21., 10.}}
```

▪ Выбор параметров *f* и *m*, при которых нити находятся в натяжении, вычисление реакций и погрешности решения

Если решение системы неравенств $\begin{cases} T_1 > 0, \\ T_2 > 0 \end{cases}$ в области A не существует, то в следующей ячейке формируется и выводится сообщение об этом, а решение ищется на всей плоскости *Ofm*. В качестве окончательного решения может быть выбрана любая из найденных точек (f, m). Здесь, например, берётся первая из двух полученных точек. Если система неравенств несовместна, то выводится сообщение об этом.

В следующей ячейке вычисляются значения реакций в выбранной точке $P\ (f, m)$ и погрешность δ полученного решения. Проверка проводится подстановкой реакций в проверочное уравнение и последующего вычисления относительной "невязки" δ между его левой и правой частью $\delta = \left| \frac{\Delta}{\max\limits_{1 \le k \le 9}\{|X_k|\}} \right|$ 100%, Δ - разность левой и правой части проверочного уравнения, $\max\limits_{1 \le k \le 9}\{|X_k|\}$ - абсолютная величина наибольшей по модулю компоненты вектора X.

В этой же ячейке формируются для последующего вывода на экран графические объекты, представляющие множества решений неравенств $T_1 > 0$, $T_2 > 0$, системы неравенств $\begin{cases} T_1 > 0, \\ T_2 > 0 \end{cases}$.

Содержимое ячейки здесь не приводится. Результаты её работы имеют вид

$$P(\ -72.,\ 31.5\ ) \in\ \mathcal{D} = \left\{ (f,\ m) : \begin{array}{l} T_1\ =\ -4.30803 + 0.501511\,\mathrm{f} + 2.74476\,\mathrm{m} > 0, \\ T_2\ =\ -8.61607 + 1.00302\,\mathrm{f} + 8.26729\,\mathrm{m} > 0. \end{array} \right\};$$

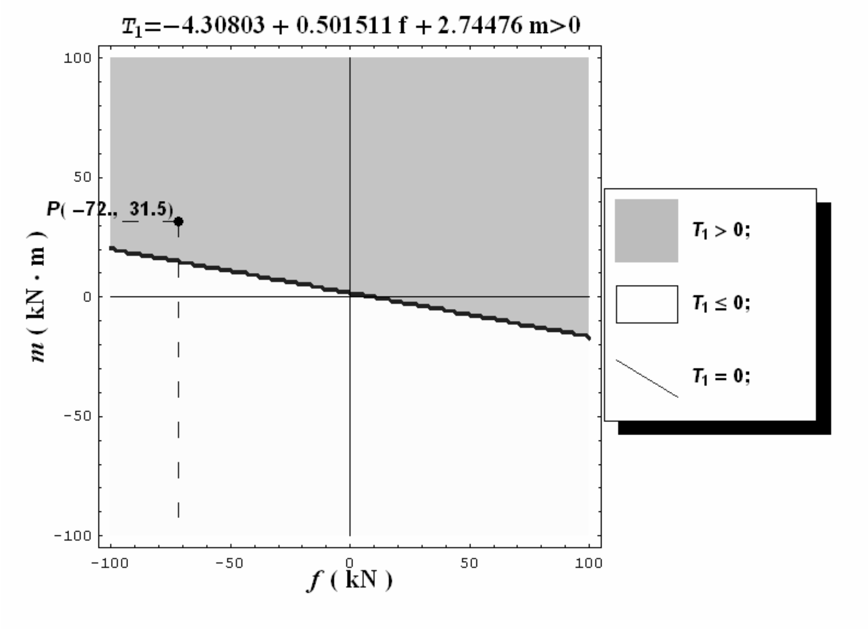
$$X(\ -72.,\ 31.5) = (\ R_1\ R_2\ T_1\ R_3\ X_0\ Y_0\ R_4\ T_2\ M_0)^T =$$

$$= (-125.817\ \ -96.925\ \ 46.043\ \ 61.415\ \ 89.357\ \ 63.54\ \ 203.617\ \ 179.586\ \ -267.157)^T;$$

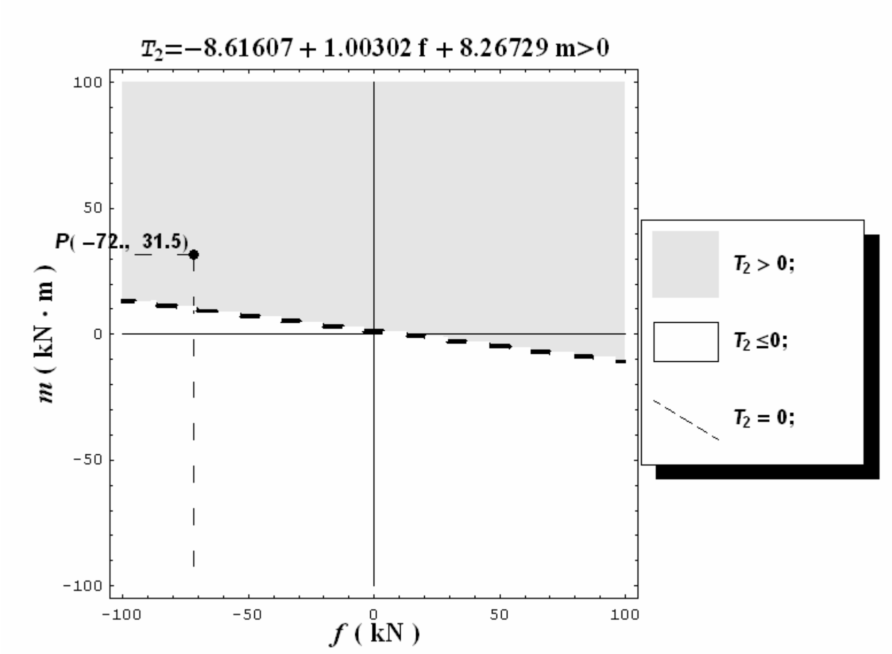
$$\delta\ =\ 2.057 \times 10^{-14}\ \ \%;$$

▪ Графическое представление решения задачи

▪ **Изображение множества решений неравенства $T_1 > 0$ на координатной плоскости Ofm**

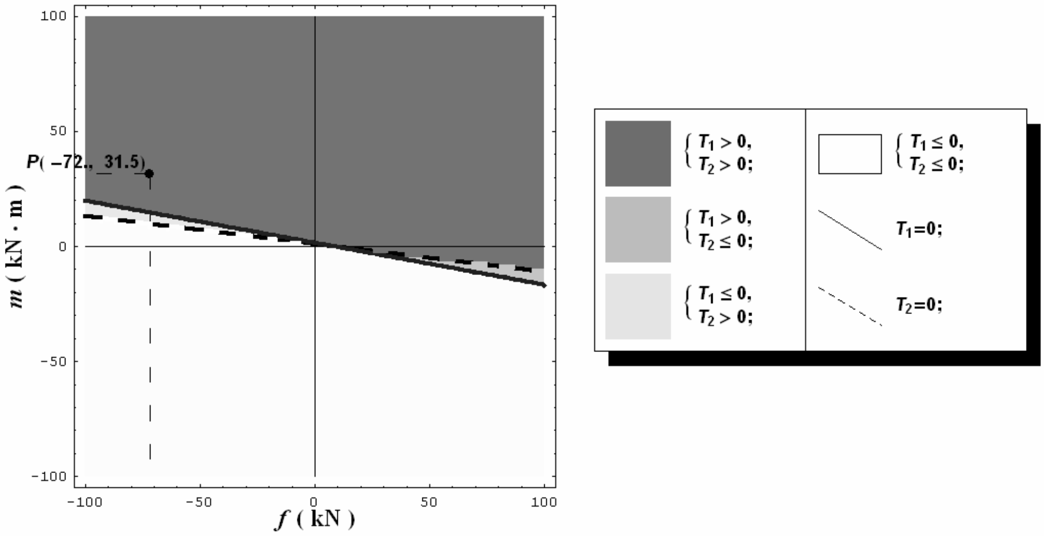


▪ **Изображение множества решений неравенства $T_2 > 0$ на координатной плоскости Ofm**



▪ **Изображение множества решений системы неравенств $\begin{cases} T_1 > 0, \\ T_2 > 0 \end{cases}$ на координатной плоскости *Ofm***

$T_1 = -4.30803 + 0.501511\,f + 2.74476\,m > 0$
$T_2 = -8.61607 + 1.00302\,f + 8.26729\,m > 0$



ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник. СПб: Лань, 2002. 736с.
2. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ. М.: Высш. шк., 1986.С. 10.
3. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979. С.45-50.
4. Корецкий А.В., Осадченко Н.В. Решение задач статики на персональном компьютере: Методическое пособие. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 64 с.
5. Капустина О.М., Зацепин М.Ф. Методические указания по курсу «Теоретическая механика». Статика системы с неудерживающими связями. М.: Изд-во МЭИ, 1994.-24 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Описание задания 3
Условия натяжения нитей 7
Выбор активной силы и активной пары, удовлетворяющей условиям натяжения нитей 8
Решение задачи на ПЭВМ 13
Пример выполнения задания 14
Составление уравнений равновесия 15
ЛИТЕРАТУРА 22