

Решение задач механики следует классической схеме: явление \rightarrow модель \rightarrow дифференциальное уравнение модели \rightarrow решение уравнения \rightarrow анализ решения. При этом обычно предполагается, что решение уравнения описывает все свойства данной модели явления, следующие из уравнения. Если результаты теоретических исследований не сходятся с практическим опытом, то исследователь уточняет или меняет модель, или уточняет решение. Последнее бывает чаще, так как точных аналитических решений сложных уравнений, как правило, нет, и приходится прибегать к численному анализу, а там — бесконечное поле деятельности для всякого рода уточнений.

Если, например, изучается поведение какой-либо тонкостенной конструкции (явление потери несущей способности), то для анализа напряженно-деформированного состояния привлекаются уравнения равновесия оболочек. Полученные решения дают условия исчерпания несущей способности по предельному состоянию, в частности при достижении условия пластичности. Если же практика расходится с теоретическими результатами, то исследователь начинает задумываться о возможности потери устойчивости конструкции (меняется модель). Привлекаются другие уравнения, полученные с учетом малых отклонений оболочки от основного процесса деформирования, и определяются условия выпучивания.

Однако, как это ни печально констатировать, самым тщательным образом рассчитанные модели, учитывающие все тонкости явления, не дают стопроцентной гарантии работоспособности системы. Колонны зданий (тщательно рассчитанные!) самым неожиданным образом рушатся, самолеты падают, а ракеты взрываются. Что приводит их к этому? Это непонятно, так как все мыслимые и немыслимые расчеты сделаны, проверены и перепроверены! Напрашивается вывод, что есть еще что-то такое, что исследователь не заметил, но что, возможно, уже имеется в модели и уравнениях, ее описывающих.

Цель этой работы — обосновать гипотезу, что белые пятна не в указанной цепочке (явление \rightarrow ... \rightarrow анализ решения), а вне ее. В этой цепочке есть неисследованная боковая ветвь: дифференциальное уравнение модели \rightarrow свойства самого уравнения. Это направление не исследовалось, так как обычно предполагается (повторимся!), что решение уравнения описывает все то, что может дать данное уравнение явления. Возможно, уравнение имеет еще какие-либо свойства, содержащие механический смысл. Обоснование этого тезиса проведем на простых моделях.

Определения

Рассмотрим сначала математическую сторону предлагаемой гипотезы. Пусть некоторый динамический процесс, например, движение точки под действием переменной силы, зависящей от положения точки $x(t)$ и ее скорости $\dot{x}(t)$, описывается нелинейным уравнением движения вида $\ddot{x} + x\dot{x} + x^2 = 0$. Если, наряду с основным процессом с координатой $x(t)$, скоростью $\dot{x}(t)$ и ускорением \ddot{x} , существует и другой, близкий к нему, с координатой, скоростью и ускорением, мало отличающимися от основного процесса $x + \Delta x$, $\dot{x} + \Delta \dot{x}$, $\ddot{x} + \Delta \ddot{x}$, то для приращений (или отклонений) Δx , $\Delta \dot{x}$, $\Delta \ddot{x}$ можно записать линеаризованное уравнение

$$\Delta \ddot{x} + x \Delta \dot{x} + (\dot{x} + 2x) \Delta x = 0 \quad (1)$$

Для приращения Δx это уравнение можно рассматривать как дифференциальное уравнение второго порядка. Поставим для него обобщенную задачу Коши, отличающуюся от классической тем, что в начальные условия будем включать производные любых порядков. Если в начальный момент (момент возмущения) задано смещение Δx и ускорение $\Delta \ddot{x}$, то для того, чтобы свести задачу к классической и построить решение, осталось выразить $\Delta \dot{x}$ через заданные величины. Это можно сделать с помощью уравнения в возмущениях. Получим $\Delta \dot{x} = -(\Delta \ddot{x} + (\dot{x} + 2x) \Delta x) / x$. Отсюда следует, что при малых возмущениях Δx и $\Delta \ddot{x}$ скорость будет неограниченно возрастать при стремлении знаменателя $x(t)$ к нулю. Такое состояние системы будем называть *нестабильным* по отношению к возмущениям Δx и $\Delta \ddot{x}$. Время, соответствующее достижению

такого состояния, назовем точкой неустойчивости (*unconstancy point*). Порядок возмущаемых производных определим как порядок точки неустойчивости и обозначим в данном случае (0/2). Из уравнения (1) следует, что неустойчивость (1/2) обнаруживается при $\dot{x} + 2x = 0$. Таким образом, неустойчивость системы можно определить как условие вырождения связи между приращениями производных функций процесса. При анализе возмущений более высокого порядка необходимо продифференцировать (1)

$$\Delta\ddot{x} + x\Delta\ddot{x} + 2(\dot{x} + x)\Delta\dot{x} + (\ddot{x} + 2\dot{x})\Delta x = 0 \quad (2)$$

Теперь для определения условия неустойчивости, например, порядка (0/3) необходимо рассмотреть систему уравнений (1-2). Отнеся заданные извне приращения $\Delta\ddot{x}$ и Δx в правую часть системы, найдем определитель алгебраической системы, полученной для искомых приращений $\Delta\dot{x}$ и $\Delta\ddot{x}$. Приравняв его нулю, найдем условие (0/3)

$$2\dot{x} + 2x - x^2 = 0$$

Будем различать два класса точек неустойчивости. Если в порядок точки (*i/j*) для дифференциального уравнения порядка *n* входят производные порядка $i \leq n$ и $j \leq n$, то такую точку будем называть собственной, в противном случае – несобственной. Уравнение второго порядка имеет три собственных точки: (0/1), (0,2) и (1,2). Количество несобственных точек не ограничено. Так, если вводить в рассмотрение третью производную, то получим точки (0/3), (1/3) и (2/3). Порядок каждой такой точки будем называть порядком третьего уровня ($\max i, j$). Аналогично вводится порядок четвертого и более высокого уровня. Иначе говоря, для дифференциального уравнения *m*-го порядка собственные точки неустойчивости имеют уровень не больше *m*.

Механическая модель

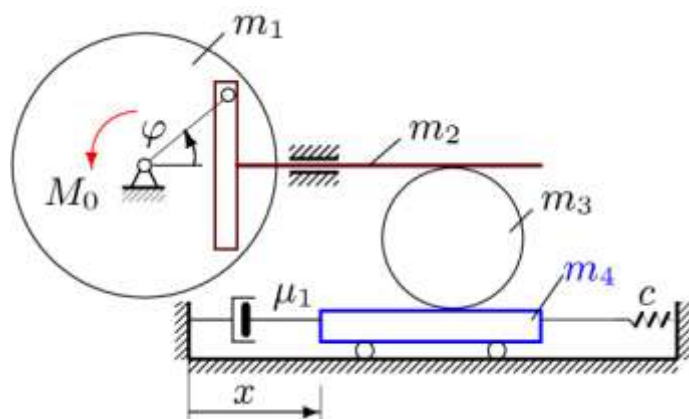


Рис. 1

Изучим для примера механизм с двумя степенями свободы (рис. 1). К маховику массой m_1 приложен вращающий момент M_0 . Палец, закрепленный на маховике, скользит в прорези кулисы, приводя ее в движение. Шток кулисы находится в зацеплении с цилиндром, лежащем на тележке массой m_4 . Масса кулисы m_2 , масса цилиндра m_3 . Выведем уравнения движения механизма. Очевидно, система обладает двумя степенями свободы, поэтому и уравнений тоже будет два. Пользуясь методикой Лагранжа [1], выберем обобщенные координаты: φ — угол поворота маховика, отсчитываемый от положительного направления оси x против часовой стрелки, и x — перемещение тележки. Кинетическая энергия системы имеет вид $T = F\dot{x}^2 + G\dot{x}\dot{\varphi} + H\dot{\varphi}^2$, где $F = (m_4 + 3/8m_3)/2$, $G = 3/8Rm_3 \sin(\varphi)$, $H = (I_1 + R^2(m_2 + 3/8m_3)\sin^2 \varphi)/2$, $I_1 = m_1R^2/2$. Обобщенные силы: $Q_x = -cx - \mu_1\dot{x}$, $Q_\varphi = M_0 - \mu_2\varphi\dot{\varphi}$. Коэффициенты μ_1 и μ_2 отвечают за вязкое сопротивление, при этом за счет множителя

φ вязкое сопротивление на оси маховика растет с углом поворота (смазка густеет). Заметим, что вид несколько необычных сил сопротивления и вся конструкция механизма служат только для иллюстрации явления и сами по себе не являются предметом данной работы. Возможно, в практических задачах модель и ее характеристики следует выбрать поточнее, применительно к конкретной реальности. Здесь же, для примера нам требуется прежде всего модель с нелинейными свойствами, так как в линейных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами точек неустойчивости не будет (это легко показать), а в уравнениях с переменными коэффициентами они не представляют интереса для исследования.

По заданной кинетической энергии и обобщенным силам получим уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Для этого системе Maple создадим две процедуры: дифференцирования по обобщенной скорости или координате **DL** и процедуру получения i -го уравнения Лагранжа ($i=1,2$ в данной задаче) **Lagr2**. Обобщенные координаты для компактности программирования обозначены как **x1=x**, **x2=φ**. В результате, получим систему двух уравнений второго порядка вида

$$a_1 \ddot{x} + a_2 \ddot{\varphi} \sin \varphi + a_3 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + a_4 \dot{x} + a_5 x = 0,$$

$$b_1 \ddot{x} \sin \varphi + b_2 \ddot{\varphi} + b_3 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi + b_4 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi + b_5 \varphi \dot{\varphi} + b_6 = 0. \quad (3)$$

Для анализа стабильности эту систему надо записать в вариациях. Процедуры варьирования в Maple нет, заменим ее процедурой дифференцирования. Для того, чтобы одной процедурой можно было бы получать вариации любого порядка, добавим условным оператором производную нулевого порядка, полученный оператор назовем **Dif**. Теперь все готово для нахождения точек неустойчивости. Ограничимся в этом примере собственными точками. Линеаризация системы (2) дает:

$$k_{11} \Delta \ddot{x} + k_{12} \Delta \ddot{\varphi} + k_{13} \Delta \dot{x} + k_{14} \Delta \dot{\varphi} + k_{15} \Delta x + k_{16} \Delta \varphi = 0,$$

$$k_{21} \Delta \ddot{x} + k_{22} \Delta \ddot{\varphi} + k_{23} \Delta \dot{x} + k_{24} \Delta \dot{\varphi} + k_{25} \Delta x + k_{26} \Delta \varphi = 0$$

Неустойчивость порядка (1/2) соответствует равенству нулю определителя матрицы

$$\begin{bmatrix} k_{15} & k_{16} \\ k_{25} & k_{26} \end{bmatrix},$$

а условие неустойчивости (0/2) определим из равенства

$$\begin{bmatrix} k_{13} & k_{14} \\ k_{23} & k_{24} \end{bmatrix} = 0$$

Оба эти равенства содержат как функции $x(t)$ и $\varphi(t)$ так и их скорости и ускорения, которые необходимо найти интегрированием уравнений движения. Для этого воспользуемся оператором **dsolve** с некоторыми начальными условиями. Для получения матрицы коэффициентов при i -х производных ($i=0,1$) создадим процедуру **NC**. В целом программа имеет вид

restart;

Процедура дифференцирования любого порядка по t

Dif:=proc(x,i) if i=0 then x else diff(x,t\$ i) fi end;

Процедура дифференцирования кинетической энергии по переменной z

DL:=proc(T,z) subs(xx=z, diff(subs(z=xx,T),xx)); end;

```

with(LinearAlgebra) : x1:=X(t) : x2:=Y(t) :
with(PDEtools,declare) : with(plots) : declare(x1,x2) :
Процедура получения i-го уравнения Лагранжа 2-го рода
(кинетическая энергия T, обобщенные координаты x1,x2, обобщенные силы Q)
Lagr2:=proc(T,Q,i) simplify(diff(DL(T,diff(x||i,t)),t)-DL(T,x||i))-Q: end:
-----
Процедура нахождения условия неустойчивости с подстановкой ускорений (xtt,ytt) из уравнений движения
NC:=proc(M) local A,i,j,Dtr;
A:=Matrix(2) :
for i to 2 do
for j to 2 do
A[i,j]:=subs(xx=Dif(x||j,M),diff(subs(Dif(x||j,M)=xx,eq[i]),xx));
od:
od:
Dtr:=simplify(Determinant(A));
collect( numer(simplify(subs({diff(x1,t$2)=xtt,diff(x2,t$2)=ytt},Dtr)),X(t));
end proc:
-----
Константы задачи (одинаковые значения 1 задаем для компактности списком, используя оператор повторения
$)
mu1:=10: mu2:=10: m1:=3:
m2,m3,m4,R:=1$4:
I1:=m1*R^2/2:
C:=3/8*R*m3:
F:=(m4+3/8*m3)/2:
G:=C*sin(x2) :
H:=(I1+R^2*(m2+3/8*m3)*sin(x2)^2)/2:
c,M0:=100$2:
Кинетическая энергия
T:=diff(x1,t)^2*F+diff(x1,t)*diff(x2,t)*G+diff(x2,t)^2*H:
Обобщенные силы
Q1:=-c*x1-mu1*diff(x1,t) : Q2:=M0-mu2*x2*diff(x2,t) :
Исследуемая система уравнения в форме Лагранжа
for i to 2 do eq[i]:=Lagr2(T,Q||i,i) od:
Решение системы дифференциальных уравнений
sol:=dsolve({eq[1],eq[2],X(0)=0,D(X)(0)=0,
Y(0)=0,D(Y)(0)=1},{X(t),Y(t)},type=numeric,output=listprocedure) :
Построение графиков. Параметры графиков, одинаковые во всех случаях, заносим в константу opt
opt:=0..5,numpoints=500,thickness=2,title=cat("mu2=",convert(mu2,string)) :
s1:=odeplot(sol,[t,diff(x1,t)],opt,color=black,legend=["Скорость тележки v1"]);
s2:=odeplot(sol,[t,diff(x2,t)],opt,color=green,legend=["Угловая скорость
маховика v2"]);
s3:=odeplot(sol,[t,X(t)],opt,color=blue,legend=["Координата x"]);
s4:=odeplot(sol,[t,Y(t)],opt,color=red,legend=["Угол Fi"]);
display(s1,s2,s3,s4);
Выражение ускорений из уравнений движения
EQ:=subs(diff(x1,t$2)=xtt,diff(x2,t$2)=ytt,{eq[1],eq[2]}):
assign(solve(EQ,{xtt,ytt}));
Оператор odeplot в найденные условия NC(0) и NC(1) подставляет найденные функции, хранящиеся в
переменной sol и строит графики
odeplot(sol,[t,NC(0)],opt,color=red,legend=["1/2"]);
odeplot(sol,[t,NC(1)],opt,color=magenta,legend=["0/2"]);

```

На рис. 2 приведены результаты интегрирования уравнений движения при вязкости $\mu_2 = 10$ Нмс, а на рис. 3 при $\mu_2 = 5$ Нмс. Для соответствующих вязкостей на рис. 4 и 5 даны зависимости от времени определителей условия неустойчивости (1/2) и на рис. 6 и 7 порядка (0/2). Обращение в нуль этих определителей соответствует некоторой критической точке на оси времени. Для большей вязкости неустойчивости не наблюдается (исключая начальный момент для порядка (0/2)). Таким образом, можно сделать вывод о стабилизирующем влиянии вязкости.

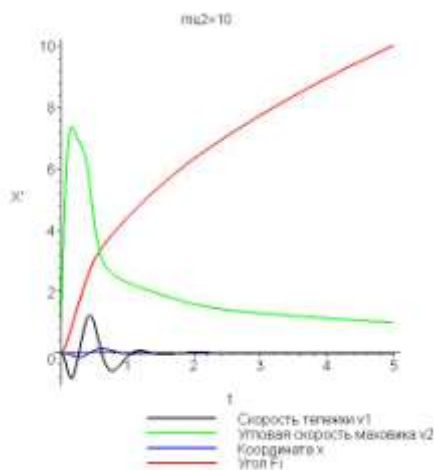


Рис.2

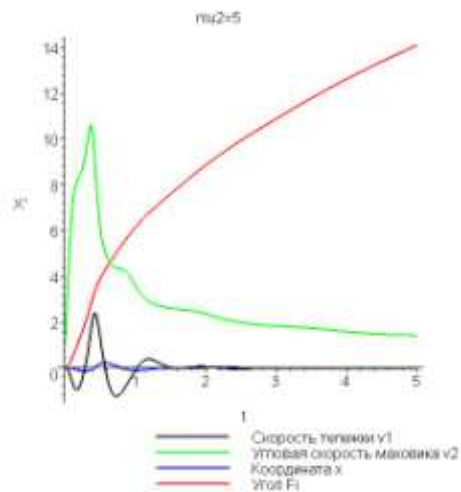


Рис.3

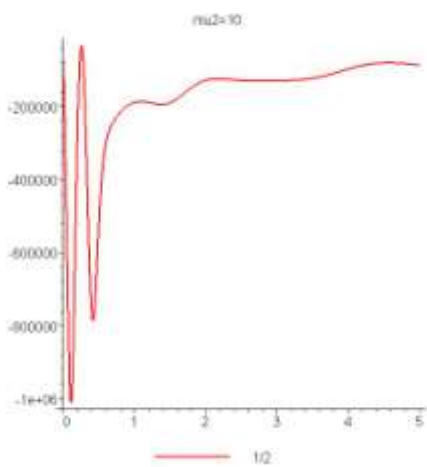


Рис. 4

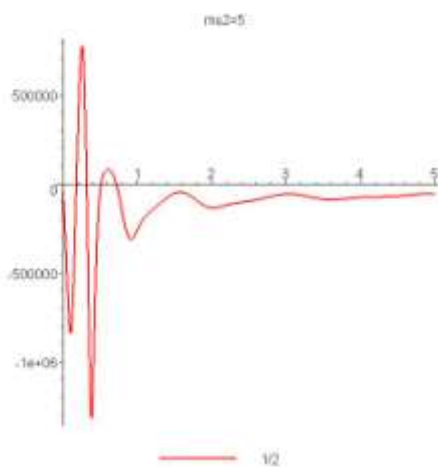


Рис.5

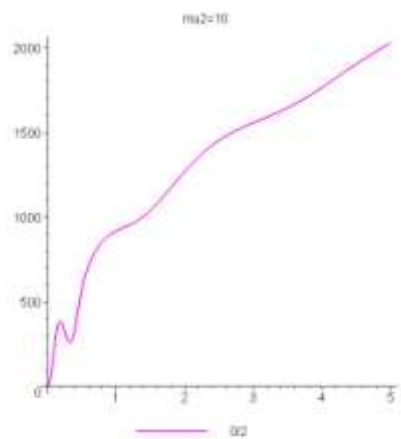


Рис.6

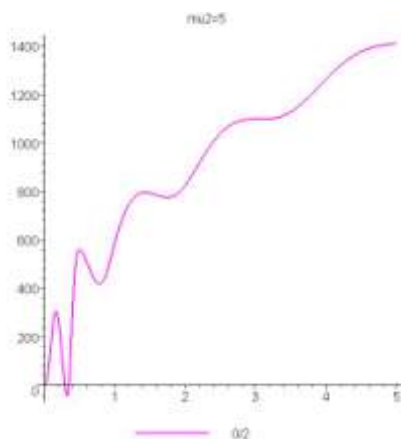


Рис.7

Выводы

Что может означать обнаруженное вырождение связи между приращениями производных различных порядков, названное нестабильностью? Как будет вести себя система в этот момент? Что представляет собой возмущение третьей производной? Скорость силы? Как реализовать возмущение определенного вида?

Точных ответов пока нет, но можно с уверенностью сказать, что во-первых, безнаказанно система точку нестабильности не минует. Вполне возможно, что для рассмотренного маховика с кулисой возмущение указанного вида (и как угодно малое по величине!) в точке нестабильности ($t=0.3$ и $t=0.36$ на рис.7) приведет к вибрациям или даже удару в то время как это же возмущение в другие моменты дает отклик того же порядка, что и само возмущение. Найденное явление принципиально отличается от явления потери устойчивости. Система либо устойчива, либо нет. Здесь же нестабильность может проявиться только при наличии возмущения. Если нет возмущения, то и точку нестабильности система благополучно минует. Возможно, именно эта неопределенность объясняет многие «случайные» катастрофы, отказы двигателей и, может быть, даже тектонические явления – землетрясения и извержения вулканов. Спусковым крючком для веками копившихся в недрах Земли напряжений могут быть точки нестабильности. На это указывают последние тектонические гипотезы [2].

Во-вторых, как показывает решенная задача, систему легко стабилизировать, незначительно меняя ее характеристики, например, увеличением вязкости. Можно «верить» или «не верить» в явление нестабильности, но если есть возможность в ответственных конструкциях (атомных реакторах, космических кораблях или подводных лодках) вывести систему из зоны нестабильности, то лучше это сделать.

Для процесса выпучивания сжатых реологических стержней точки нестабильности имеют хорошее экспериментальное подтверждение [3].

Литература

1. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика/ под.ред. А.И.Кириллова — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002.
2. Долицкий А.В. Вращение мантии по ядру: движение географических и геомагнитных полюсов, периодичность геологических и тектонических процессов. — М.:ОИФЗ РАН, 2000.
3. Kirsanov M.N. Singular Points Of The Creep Deformation And Buckling Of A Column//International Journal Eng.Science, 1997,V5,N3, pp. 221-227.

Задача

Анализ дифференциальных уравнений движения

Программные средства

Maple

Результаты

С помощью Maple-программы найдены условия вырождения связи приращений производных.