Из равенств (а) и (б) видно, каковы здесь значения a_{11}, a_{12}, a_{22}, c_{11} и c_{22} ($c_{12}=0$). При этих значениях коэффициентов уравнение частот (149) примет вид

$$k^4-6\frac{g}{l}k^2+\frac{27}{7}\left(\frac{g}{l}\right)^2=0.$$

Его корнями будут: $k_{1,2}^2=3(1\pm2/\sqrt{7})g/l$, откуда

$$k_1=0{,}86\sqrt{g/l}\quad k_2=2{,}30\sqrt{g/l}. \tag{в}$$

Подставляя теперь в любое из отношений, стоящих в левой части равенства (148), сначала k_1, а затем k_2, получим

$$n_1=1{,}43,\ n_2=-2{,}10. \tag{г}$$

Таким образом, при первом главном колебании оба стержня будут в каждый момент времени отклонены от вертикали в одну и ту же сторону (рис. 374, *а*) и $\varphi_2/\varphi_1=1{,}43$, а при втором главном колебании — в разные стороны (рис. 374, *б*) и $|\varphi_2/\varphi_1|=2{,}10$.

Глава XXXI

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

§ 151. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ УДАРА

При движении тела под действием обычных сил, рассматривавшихся до сих пор, скорости точек тела изменяются непрерывно, т. е. каждому бесконечно малому промежутку времени соответствует бесконечно малое приращение скорости. Действительно, если импульс любой силы $\bar{F}_k$ за промежуток времени τ представить в виде $\bar{F}_k^{\text{ср}}\tau$, где $\bar{F}_k^{\text{ср}}$ — среднее значение этой силы за время τ, то теорема об изменении количества движения точки, на которую действуют силы $\bar{F}_k$, дает

$$m(\bar{v}_1-\bar{v}_0)=\Sigma\bar{F}_k^{\text{ср}}\tau.$$

Отсюда видно, что когда время τ бесконечно мало (стремится к нулю), то при обычных силах и приращение скорости $\Delta\bar{v}=\bar{v}_1-\bar{v}_0$ будет тоже величиной бесконечно малой (стремящейся к нулю).

Однако если в числе действующих сил будут очень большие силы (порядка $1/\tau$), то приращение скорости за малый промежуток времени τ окажется величиной конечной.

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени τ изменяются на конечную величину, называется ударом. Силы, при действии которых происходит удар, будем называть *ударными силами* $\bar{F}_{\text{уд}}$. Промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, назовем *временем удара*.

Так как ударные силы очень велики и за время удара изменяются в значительных пределах, то в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не сами ударные силы, а их импульсы. *Ударный импульс*

$$\overline{S}_{\text{уд}} = \int_0^\tau \overline{F}_{\text{уд}}\,dt = \overline{F}^{\text{ср}}_{\text{уд}}\tau$$

является величиной конечной. Импульсы неударных сил за время τ будут величинами очень малыми и ими практически можно пренебречь.

Будем в дальнейшем обозначать скорость точки *в начале удара* $\overline{v}$, а скорость *в конце удара* $\overline{u}$. Тогда теорема об изменении количества движения точки при ударе примет вид *

$$m(\overline{u}-\overline{v}) = \Sigma\overline{S}_k, \tag{153}$$

т. е. *изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов*. Уравнение (153) является *основным уравнением теории удара* и играет в теории удара такую же роль, как основной закон динамики $m\overline{a}=\overline{F}$ при изучении движений под действием неударных сил.

В заключение отметим, что перемещение точки за время удара будет равно $v^{\text{ср}}\tau$, т. е. величине очень малой, которой практически можно пренебречь.

Итак, из всех полученных результатов вытекает следующее:

1) действием неударных сил (таких, например, как сила тяжести) за время удара можно пренебречь;

2) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;

3) изменения скоростей точек тела за время удара определяются основным уравнением теории удара (153).

§ 152. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УДАРА

Рассмотрим, какой вид принимают общие теоремы динамики для системы материальных точек при ударе.

1. Теорема об изменении количества движения системы при ударе. Уравнение (21), полученное в § 111, сохраняет свой вид и для случая удара. Но так как импульсами обычных сил при ударе пренебрегают, то в правой части останутся только ударные импульсы. Следовательно, при ударе

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \Sigma\overline{S}^e_k, \tag{154}$$

т. е. *изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.*

В проекциях на любую координатную ось x уравнение (154) дает

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \Sigma S^e_{kx}. \tag{154'}$$

* В дальнейшем будем ударный импульс обозначать просто символом $\overline{S}$, так как импульсы неударных сил в теории удара не рассматриваются.

Если геометрическая сумма всех внешних ударных импульсов равна нулю, то, как видно из уравнения (154), количество движения системы за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить количества движения всей системы.

2. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы (теорема моментов) при ударе. Теорема моментов принимает для случая удара вид, несколько отличный от полученного в § 116; объясняется это тем, что точки системы за время удара не перемещаются. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Обозначим равнодействующую внешних ударных импульсов, действующих на точку с массой m_k, через $\bar{S}_k^e$, а равнодействующую действующих на ту же точку внутренних ударных импульсов — через $\bar{S}_k^i$. Тогда по уравнению (153) будет $m_k(\bar{u}_k - \bar{v}_k) = \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i$ или

$$m_k\bar{u}_k = m_k\bar{v}_k + \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i.$$

Входящие в это равенство векторы приложены к точке, которая, как было указано, за время удара остается неподвижной. Тогда, беря моменты этих векторов относительно какого-нибудь центра O, по теореме Вариньона, справедливой для любых векторных величин, найдем, что

$$\bar{m}_O(m_k\bar{u}_k) = \bar{m}_O(m_k\bar{v}_k) + \bar{m}_O(\bar{S}_k^e) + \bar{m}_O(\bar{S}_k^i).$$

Составляя такие равенства для всех точек системы и складывая их почленно, получим

$$\Sigma\bar{m}_O(m_k\bar{u}_k) - \Sigma\bar{m}_O(m_k\bar{v}_k) = \Sigma\bar{m}_O(\bar{S}_k^e) + \Sigma\bar{m}_O(\bar{S}_k^i).$$

Суммы, стоящие слева, представляют собой главные моменты количеств движения системы относительно центра O в конце и в начале удара, которые обозначим $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_0$. Стоящая справа сумма моментов внутренних ударных импульсов по свойству внутренних сил равна нулю. Окончательно находим

$$\bar{K}_1 - \bar{K}_0 = \Sigma\bar{m}_O(\bar{S}_k^e), \tag{155}$$

т. е. *изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-нибудь центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов.*

В проекциях на любую ось x равенство (155) дает

$$K_{1x} - K_{0x} = \Sigma m_x(\bar{S}_k^e). \tag{155'}$$

Из полученных уравнений следует, что если сумма моментов внешних ударных импульсов относительно какого-нибудь центра (или оси) равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра (или оси) за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить главный момент количеств движения системы.

Вопрос о том, как изменяется за время удара кинетическая энергия соударяющихся тел, будет рассмотрен в § 156.

§ 153. КОЭФФИЦИЕНТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ УДАРЕ

Значение ударного импульса, появляющегося при соударении двух тел, зависит не только от их масс и скоростей до удара, но и от упругих свойств соударяющихся тел; эти свойства при ударе характеризуют величиной, называемой *коэффициентом восстановления*.

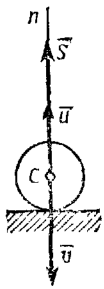

Рис. 375

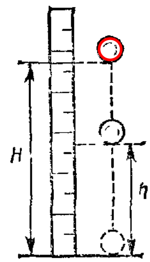

Рис. 376

Рассмотрим шар, падающий вертикально на неподвижную горизонтальную жесткую плиту (рис. 375). Для прямого удара, который при этом произойдет, можно различать две стадии. В течение первой стадии скорости частиц шара, равные в момент начала удара v (движение шара считаем поступательным), убывают до нуля. Шар при этом деформируется и вся его начальная кинетическая энергия $mv^2/2$ переходит во внутреннюю потенциальную энергию деформированного тела. Во второй стадии удара шар под действием внутренних сил (сил упругости) начинает восстанавливать свою форму; при этом его внутренняя потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию движения частиц шара. В конце удара скорости частиц будут равны u, а кинетическая энергия шара $mu^2/2$. Однако полностью механическая энергия шара при этом не восстанавливается, так как часть ее уходит на сообщение шару остаточных деформаций и его нагревание. Поэтому скорость u будет меньше v.

Величина k, равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется коэффициентом восстановления при ударе:

$$k = u/v. \tag{156}$$

Значение коэффициента восстановления для разных тел определяется опытным путем. По данным опыта при изменении скорости v не в очень больших пределах величину k можно считать зависящей только от материала соударяющихся тел.

В качестве предельных случаев рассматривают случай *абсолютно упругого удара* ($k=1$), при котором кинетическая энергия тела после удара полностью восстанавливается, и случай *абсолютно неупругого удара* ($k=0$), когда удар заканчивается в первой стадии и вся кинетическая энергия тела теряется на его деформацию и нагревание.

Экспериментально величину k можно найти, если рассмотреть шар, свободно падающий на плиту с предварительно измеренной высоты H, и определить с помощью стоящей рядом вертикальной рейки (рис. 376) высоту его подъема h после удара. Тогда по формуле Галилея

$$v=\sqrt{2gH}, \quad u=\sqrt{2gh} \quad \text{и}$$
$$k=u/v=\sqrt{h/H}.$$

Значение коэффициента восстановления для тел из различных материалов дается в соответствующих справочниках. В частности, можно считать при скоростях соударения порядка 3 м/с для удара дерева о дерево $k\approx 0{,}5$, стали о сталь $k\approx 0{,}56$, стекла о стекло $k\approx$ $\approx 0{,}94$.

§ 154. УДАР ТЕЛА О НЕПОДВИЖНУЮ ПРЕГРАДУ

Рассмотрим тело (шар) массой M, ударяющееся о неподвижную плиту. Действующей на тело ударной силой будет при этом реакция плиты; импульс этой силы за время удара назовем $\bar{S}$. Пусть нормаль к поверхности тела в точке его касания с плитой проходит через центр масс тела (для шара это будет всегда). Такой удар тела называется *центральным*. Если скорость $\bar{v}$ центра масс тела в начале удара направлена по нормали n к плите, то удар будет *прямым*, в противном случае — *косым*.

1. Случай прямого удара. Составляя в этом случае уравнение (154) в проекции на нормаль n (см. рис. 375) и учитывая, что $\bar{Q}_0=M\bar{v}$, а $\bar{Q}_1=M\bar{u}$, получим

$$M(u_n-v_n)=S_n.$$

Но при прямом ударе $u_n=u$, $v_n=-v$, $S_n=S$. Следовательно,

$$M(u+v)=S.$$

Второе уравнение, необходимое для решения задачи, дает равенство (156)

$$u=kv.$$

Из полученных уравнений, зная M, v, k, найдем неизвестные величины u и S. При этом

$$S=M(1+k)v.$$

Как видим, ударный импульс будет тем больше, чем больше коэффициент восстановления k. На эту зависимость S от k и было указано в § 153.

Чтобы определить среднюю величину ударной силы (реакции), надо дополнительно знать время удара τ, которое можно найти экспериментально.

Пример. При падении стального шара массой $m=1$ кг с высоты $H=3$ м на стальную плиту ($k=0{,}56$) получим $v=\sqrt{2gH}\approx 7{,}7$ м/с и $u=kv=4{,}3$ м/с. Ударный импульс $S=mv(1+k)\approx 12$ Н·с

Если время удара $\tau=0{,}0005$ с, то средняя величина ударной реакции $N_{уд}^{ср}=S/\tau=24\,000$ Н.

2. Случай косого удара. Пусть в этом случае скорость $\bar{v}$ центра масс тела в начале удара образует с нормалью к плите угол α, а скорость $\bar{u}$ в конце удара — угол β (рис. 377). Тогда уравнение (154) в проекциях на касательную τ и нормаль n даст

$$M(u_\tau - v_\tau)=0, \qquad M(u_n - v_n)=S.$$

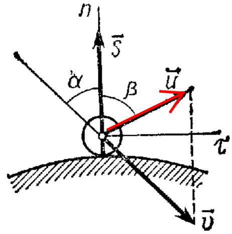

Рис. 377

Коэффициент восстановления в данном случае равен отношению модулей $|u_n|$ и $|v_n|$, так как удар происходит только по направлению нормали к поверхности (влиянием трения пренебрегаем). Тогда с учетом знаков проекций получим $u_n=-kv_n$. В результате окончательно находим

$$u_\tau=v_\tau, \qquad u_n=-kv_n, \qquad S=M\,|v_n|\,(1+k).$$

Из полученных уравнений можно найти модуль и направление скорости в конце удара и ударный импульс, если величины M, v, α и k известны. В частности, из первого равенства, замечая, что $v_\tau=|v_n|\ \mathrm{tg}\,\alpha$ и $u_\tau=|u_n|\ \mathrm{tg}\,\beta$, получаем

$$|u_n|\,\mathrm{tg}\,\beta=|v_n|\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

откуда

$$k=|u_n|/|v_n|=\mathrm{tg}\,\alpha/\mathrm{tg}\,\beta.$$

Следовательно, при косом ударе отношение тангенса угла падения к тангенсу угла отражения равно коэффициенту восстановления. Так как $k<1$, то $\alpha<\beta$, т. е. угол падения всегда меньше угла отражения.

§ 155. ПРЯМОЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР ДВУХ ТЕЛ (УДАР ШАРОВ)

При соударении двух тел удар называется прямым и центральным, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс и когда скорости центров масс в начале удара направлены по этой общей нормали. Таким, в частности, будет удар двух однородных шаров, центры которых до удара движутся вдоль одной и той же прямой.

Пусть массы соударяющихся тел равны M_1 и M_2, скорости их центров масс в начале удара v_1 и v_2, а в конце удара u_1 и u_2. Проведем через центры масс C_1, C_2 координатную ось C_1x, *направленную всегда от* C_1 *к* C_2 (рис. 378). Тогда, чтобы произошел удар, должно быть $v_{1x}>v_{2x}$ (иначе первое тело не догонит второе); кроме того, $u_{1x}\leqslant u_{2x}$, так как ударившее тело не может опередить ударяемое.

Считая M_1, M_2, v_{1x}, v_{2x} и k известными, найдем u_{1x} и u_{2x}. Для этого применим теорему об изменении количества движения к соударяющимся телам, рассматривая их как одну систему. Тогда ударные силы, действующие между телами, будут внутренними и

$\Sigma \bar{S}_k^e = 0$. В результате уравнение (154′) дает $Q_{1x} = Q_{0x}$ или

$$M_1 u_{1x} + M_2 u_{2x} = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}. \qquad (157)$$

Второе уравнение найдем из выражения для коэффициента восстановления. При соударении двух тел интенсивность удара (ударный импульс) зависит не от абсолютного значения скорости каждого из тел, а от того, насколько скорость ударяющего тела превышает скорость ударяемого, т. е. от разности $v_{1x} - v_{2x}$. Поэтому при ударе двух тел, если учесть, что всегда $v_{1x} > v_{2x}$, и $u_{1x} \leqslant u_{2x}$, получим:

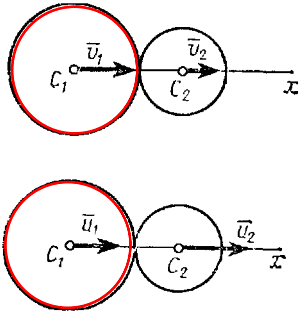

Рис. 378

$$k = \left| \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \right| = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \qquad (158)$$

или

$$u_{1x} - u_{2x} = -k(v_{1x} - v_{2x}). \qquad (158')$$

Система уравнений (157), (158) и позволяет решить поставленную задачу. Ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, найдем, составив уравнение (154′) для какого-нибудь одного из тел, например для первого. Тогда

$$S_{1x} = M_1(u_{1x} - v_{1x}),\ S_{2x} = -S_{1x}. \qquad (159)$$

Рассмотрим два предельных случая.

1. Абсолютно неупругий удар ($k = 0$). В этом случае из уравнений (158) и (157) находим

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}}{M_1 + M_2}. \qquad (160)$$

Оба тела после удара движутся с одной и той же скоростью. Действующий на тела ударный импульс при этом равен

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}).$$

2. Абсолютно упругий удар ($k = 1$). В этом случае из уравнений (157) и (158) получаем

$$\left.\begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}), \\ u_{2x} &= v_{2x} + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}). \end{aligned}\right\} \qquad (161)$$

Действующий на тела ударный импульс при этом равен

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}).$$

Как видим, при абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом.

В частном случае, когда $M_1=M_2$, получаем из уравнений (161) $u_{1x}=v_{2x}$, $u_{2x}=v_{1x}$; таким образом, два тела одинаковой массы при абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.

Задача 186. Два шара массой M_1 и M_2 подвешены так, как показано на рис. 379. Первый шар отклоняют на угол α и отпускают без начальной скорости. После удара второй шар отклоняется на угол β. Найти коэффициент восстановления для шаров при ударе.

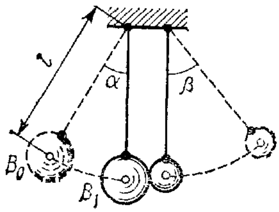

Рис. 379

Решение. По данным задачи можно определить скорость v_1 центра первого шара в начале удара и скорость u_2 центра второго шара в конце удара. Из теоремы об изменении кинетической энергии на перемещении B_0B_1 находим для первого шара

$$M_1v_1^2=2P_1h=2M_1gl(1-\cos\alpha),$$

где l — расстояние центра шара от точки подвеса. Отсюда $v_1=2\sqrt{gl}\sin(\alpha/2)$. Аналогично находим, что $u_2=2\sqrt{gl}\sin(\beta/2)$.

Так как в нашем случае $v_2=0$, уравнения (157) и (158) дают:

$$M_1u_{1x}+M_2u_{2x}=M_1v_{1x}, \qquad u_{2x}-u_{1x}=kv_{1x}.$$

Исключая из этих уравнений u_{1x} и замечая, что $v_{1x}=v_1$, а $u_{2x}=u_2$, получим

$$M_1v_1(1+k)=(M_1+M_2)u_2.$$

Отсюда окончательно находим:

$$k=\frac{(M_1+M_2)u_2}{M_1v_1}-1=\frac{(M_1+M_2)\sin(\beta/2)}{M_1\sin(\alpha/2)}-1.$$

§ 156. ПОТЕРЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ НЕУПРУГОМ УДАРЕ ДВУХ ТЕЛ. ТЕОРЕМА КАРНО

Из рассуждений, приведенных в § 153, следует, что при неупругом ударе происходит потеря кинетической энергии соударяющихся тел. Наибольшей эта потеря будет при абсолютно неупругом ударе. Подсчитаем, какую кинетическую энергию теряет система при абсолютно неупругом ударе двух тел.

Считая, что соударяющиеся тела движутся поступательно, и обозначая их общую скорость после абсолютно неупругого удара через u, получим для кинетической энергии системы в начале и в конце удара значения:

$$2T_0=M_1v_{1x}^2+M_2v_{2x}^2, \qquad 2T_1=(M_1+M_2)u_x^2. \tag{162}$$

Потерянная при ударе кинетическая энергия равна T_0-T_1. Представим эту разность в виде

$$T_0-T_1=T_0-2T_1+T_1. \tag{163}$$

Так как из формулы (160) следует, что

$$(M_1+M_2)u_x=M_1v_{1x}+M_2v_{2x},$$

то отсюда

$$2T_1=(M_1+M_2)u_x^2=(M_1v_{1x}+M_2v_{2x})u_x. \tag{164}$$

Подставляя в правую часть равенства (163) вместо T_0 и T_1 их значения из формул (162), а вместо $2T_1$ — правую часть выражения (164), получим:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}\left(M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2 - 2M_1 v_{1x} u_x - 2M_2 v_{2x} u_x + M_1 u_x^2 + M_2 u_x^2\right)$$

или

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} M_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_{2x} - u_x)^2. \qquad (165)$$

Разности $(v_{1x} - u_x)$ и $(v_{2x} - u_x)$ показывают, насколько уменьшилась при ударе скорость каждого из соударяющихся тел. Их можно назвать *потерянными при ударе скоростями*. Тогда из формулы (165) вытекает следующая теорема Карно *: *кинетическая энергия, потерянная системой тел при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями.*

Если удар не является абсолютно неупругим ($k \neq 0$), то аналогичными преобразованиями можно найти, что кинетическая энергия, потерянная при ударе двух тел, определяется равенством

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2} M_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_{2x} - u_x)^2\right]. \qquad (165')$$

Рассмотрим частный случай абсолютно неупругого удара по первоначально неподвижному телу. В этом случае $v_2 = 0$ и

$$T_0 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2, \qquad u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}.$$

Тогда

$$T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) u^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1^2 v_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\cdot\frac{M_1 v_1^2}{2}$$

или

$$T_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} T_0. \qquad (166)$$

Формула (166) показывает, какая энергия остается у системы после удара. Отметим два интересных предельных случая.

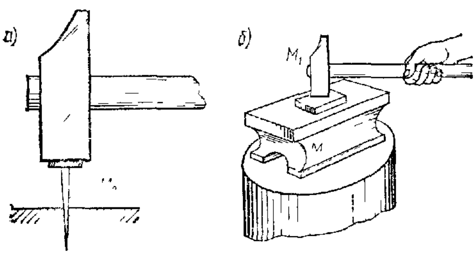

Рис. 380

1. *Масса ударяющего тела много больше массы ударяемого* ($M_1 \gg M_2$). В этом случае можно считать $M_1 + M_2 \approx M_1$, и формула

* Лаза́р Карно (1753—1823) — выдающийся французский ученый (математик и механик) и видный деятель эпохи французской революции.

(166) дает $T_1 \approx T_0$. Следовательно, хотя удар и является абсолютно неупругим, потеря кинетической энергии при ударе почти не происходит, и система после удара начнет двигаться почти с той же кинетической энергией, которая у нее была в начале удара.

На практике такой результат нужно, очевидно, получать при забивании гвоздей, свай и т. п. Следовательно, в этом случае нужно, чтобы масса молотка была намного больше массы гвоздя (рис. 380, *а*).

2. Масса ударяемого тела много больше массы ударяющего ($M_2 \gg M_1$). В этом случае можно считать $M_1/(M_1+M_2) \approx 0$, и формула (166) дает $T_2 \approx 0$. Таким образом, здесь при ударе почти вся кинетическая энергия расходуется на деформацию соударяющихся тел, по окончании удара тела́ можно считать неподвижными.

Практически такой результат нужно, очевидно, получать при ковке, клепке и т. п. Следовательно, в этих случаях нужно, чтобы масса поковки вместе с наковальней (или масса заклепки вместе с поддержкой) была много больше массы молота (рис. 380, *б*).

§ 157*. УДАР ПО ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ТЕЛУ. ЦЕНТР УДАРА

Рассмотрим тело, имеющее ось вращения z (рис. 381). Пусть в некоторый момент времени к телу будет приложен ударный импульс $\bar{S}$. Тогда по уравнению (155′)

$$K_{1z} - K_{0z} = m_z(\bar{S}),$$

так как моменты относительно оси z импульсивных реакций $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_B$, возникающих в подшипниках, будут равны нулю.

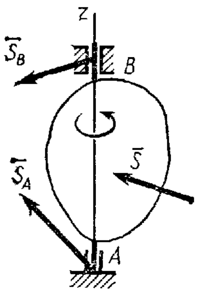

Рис. 381

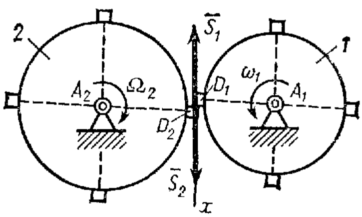

Рис. 382

Условимся обозначать угловую скорость тела в начале удара через ω, а в конце удара — через Ω. Тогда $K_{0z} = J_z\omega$, $K_{1z} = J_z\Omega$ и окончательно получим:

$$J_z(\Omega - \omega) = m_z(\bar{S}) \quad \text{или} \quad \Omega = \omega + \frac{m_z(\bar{S})}{J_z}. \qquad (167)$$

Формула (167) определяет изменение угловой скорости тела при ударе. Из нее следует, что *угловая скорость тела за время удара изменяется на величину, равную отношению момента ударного импульса к моменту инерции тела относительно оси вращения.*

Задача 187. Колесо *1*, вращающееся с угловой скоростью ω_1, ударяет выступом D_1 о выступ D_2 первоначально неподвижного колеса *2* (рис. 382). Радиусы колес и их моменты инерции относительно осей A_1 и A_2 соответственно равны r_1,

r_2, J_1, J_2. Определить угловую скорость Ω_2 колеса 2 в конце удара, если коэффициент восстановления при ударе равен k.

Решение. При ударе на колеса действуют численно равные ударные импульсы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ ($S_1=S_2=S$). Тогда, составив уравнение (167) для каждого из колес и учтя, что $\omega_2=0$, получим:

$$J_1(\Omega_1-\omega_1)=-Sr_1, \quad J_2\Omega_2=Sr_2.$$

Исключив из этих уравнений S, придем к равенству

$$J_1r_2(\Omega_1-\omega_1)+J_2r_1\Omega_2=0. \qquad \text{(a)}$$

Так как скорости точек D_1 и D_2 в начале и в конце удара равны соответственно $v_1=\omega_1r_1$, $u_1=\Omega_1r_1$, $v_2=0$, $u_2=\Omega_2r_2$, то формула (158′), определяющая коэффициент восстановления при прямом ударе, даст

$$\Omega_1r_1-\Omega_2r_2=-k\omega_1r_1. \qquad \text{(б)}$$

Исключив из уравнений (а) и (б) Ω_1, найдем окончательно

$$\Omega_2=\frac{J_1r_1r_2}{J_1r_2^2+J_2r_1^2}(1+k)\,\omega_1.$$

Импульсивные реакции. Найдем, чему равны при ударе импульсивные реакции подпятника A и подшипника B. Проведем оси $Axyz$ так, чтобы центр масс C тела лежал в плоскости Ayz (рис. 383, *а*). Изобразим искомые импульсивные реакции их составляющими вдоль этих осей. Пусть $AB=b$, а расстояние точки C от оси Az равно a. Составим уравнения (154′) в проекциях на все три оси, а уравнения (155′) в проекциях на оси Ax и Ay (уравнение в проекции на ось Az уже использовано при получении равенства 167). Поскольку тело за время удара не перемещается, векторы $\overline{v}_C$ и $\overline{u}_C$ будут параллельны оси Ax; следовательно, $Q_{0x}=-Mv_C=-Ma\omega$, $Q_{1x}=-Ma\Omega$, $Q_y=Q_z=0$. Используя одновременно при составлении уравнений (155′) формулы (34) из § 115, получим

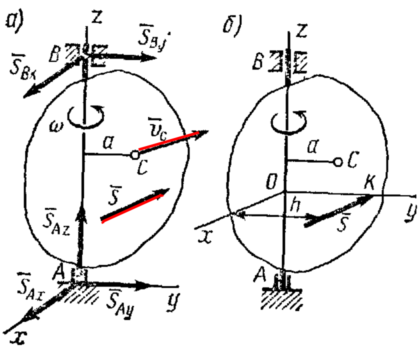

Рис. 383

$$\left.\begin{aligned}
&-Ma(\Omega-\omega)=S_{Ax}+S_{Bx}+S_x,\\
&0=S_{Ay}+S_{By}+S_y, \quad 0=S_{Az}+S_z,\\
&-J_{xz}(\Omega-\omega)=-S_{By}b+m_x(\overline{S}),\\
&-J_{yz}(\Omega-\omega)=S_{Bx}b+m_y(\overline{S}).
\end{aligned}\right\} \qquad (168)$$

Уравнения (168) и служат для определения неизвестных импульсивных реакций S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By}. Входящая сюда разность $\Omega-\omega$ находится из равенства (167).

Центр удара. Появление при ударе импульсивных реакций нежелательно, так как может привести к ускорению износа или даже к разрушению частей конструкции (подшипников, вала и т. п.). Найдем, можно ли произвести удар по телу, закрепленному на оси, так, чтобы импульсивные реакции в подшипниках A и B вообще не возникли. Для этого найдем, при каких условиях можно удовлетворить уравнениям (168), положив в них $\overline{S}_A=\overline{S}_B=0$. Если $\overline{S}_A=\overline{S}_B=0$, то 2-е и 3-е из уравнений (168) примут вид: $S_y=0$, $S_z=0$. Чтобы удовлетворить этим уравнениям, надо направить импульс $\overline{S}$ перпендикулярно плоскости Ayz, т. е. (по принятому условию) плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс тела. Допустим, что импульс $\overline{S}$ имеет такое направление (рис. 383, *б*). Поскольку при $\overline{S}_A=\overline{S}_B=0$ вид системы (168) не зависит от выбора на оси Az начала координат, проведем для упрощения дальнейших расчетов плоскость Oxy так, чтобы импульс $\overline{S}$ лежал в этой плоскости. Тогда $m_x(\overline{S})=m_y(S)=0$ и последние два уравнения системы (168) при $S_B=0$ дадут $J_{xz}=J_{yz}=0$. Это означает (см. § 104), что плоскость

Oxy, в которой лежит импульс $\overline{S}$, должна проходить через такую точку O, для которой ось z является главной осью инерции тела; в частности, как показано в § 104, условия $J_{xz}=J_{yz}=0$ будут выполняться, если плоскость Oxy является для тела плоскостью симметрии.

Обратимся, наконец, к 1-му из уравнений (168). Поскольку $\overline{S}_A=\overline{S}_B=0$ и $S_x=-S$ (см. рис. 383, *б*), оно принимает вид $Ma(\Omega-\omega)=S$. Одновременно уравнение (167), так как в нашем случае $m_z(\overline{S})=Sh$, дает $J_z(\Omega-\omega)=Sh$. Исключая из двух полученных равенств разность $\Omega-\omega$, находим

$$h=J_z/(Ma). \tag{169}$$

Формула (169) определяет, на каком расстоянии h от оси z должен быть приложен ударный импульс.

Итак, для того чтобы при ударе по телу, закрепленному на оси z, в точках закрепления этой оси не возникло импульсивных реакций, надо:

1) чтобы ударный импульс был расположен в плоскости Oxy, перпендикулярной оси z и проходящей через такую точку O тела, для которой ось z является главной осью инерции (в частности, плоскость Oxy может быть плоскостью симметрии тела);

2) чтобы удар был направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения z и центр масс C тела;

3) чтобы ударный импульс был приложен на расстоянии $h=J_z/Ma$ от оси (по ту сторону от оси, где находится центр масс).

Точка K, через которую при этом будет проходить ударный импульс, не вызывающий ударных реакций в точках закрепления оси, называется *центром удара*.

Заметим, что согласно формуле (169) центр удара совпадает с центром качаний физического маятника. Следовательно, как было показано в § 129, $h>a$, т. е. расстояние от оси до центра удара больше, чем до центра масс. Если ось вращения проходит через центр масс тела, то $a=0$, и мы получаем $h=\infty$. В этом случае центра удара на конечном расстоянии не существует, и любой удар по телу будет передаваться на ось.

Приложения полученных результатов иллюстрируются следующими примерами.

1. При конструировании вращающегося курка (см. задачу 189) или маятникового копра (прибор в виде маятника для испытания материалов на удар) и т. п. надо ось вращения располагать так, чтобы точка тела, производящая удар, была по отношению к этой оси центром удара.

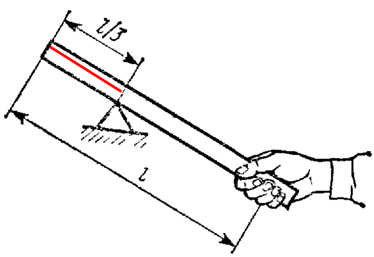

Рис. 384

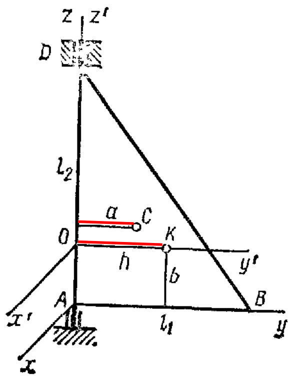

Рис. 385

2. При работе ручным молотом его надо брать за рукоятку в таком месте, чтобы точка, которой производится удар, была относительно руки центром удара. В противном случае руку будет «обжигать».

3. При ударе палкой, чтобы не «обжечь» руку (рис. 384), надо ударять тем местом, которое по отношению к руке будет центром удара. Если палку считать од-

нородным стержнем длиной l, а ось вращения совпадающей с его концом, то тогда $a=l/2$, $J_z=Ml^2/3$ и $h=J_z/Ma=2l/3$.

Следовательно, (рис. 384) удар надо производить тем местом стержня, которое находится на расстоянии $2l/3$ от руки или $l/3$ от другого конца стержня.

Задача 188. Мишень представляет собой тонкую однородную пластину, которая может вращаться вокруг оси Az (рис. 385). Форма мишени — прямоугольный треугольник ABD с катетами $AB=l_1$, $AD=l_2$. Определить, где у мишени находится центр удара, если известно, что для пластины ABD осевой момент инерции $J_z=Ml_1^2/6$, а центробежный — $J_{yz}=Ml_1l_2/12$ (M — масса пластины, оси Ayz в плоскости пластины).

Решение. Так как у треугольной пластины ABD центр тяжести C находится на расстоянии $a=l_1/3$ от оси Az, то по формуле (169) расстояние центра удара K от той же оси будет $h=J_z/(Ma)=3J_z/(Ml_1)=l_1/2$.

Остается определить, на каком расстоянии b находится центр удара от оси Ay. Для этого надо найти на оси Az точку O, для которой эта ось будет главной. Если через точку O провести оси $Ox'y'z'$, параллельные осям $Axyz$, то точка O будет главной, когда $J_{x'z'}=\Sigma m_k x'_k z'_k=0$ и $J_{y'z'}=\Sigma m_k y'_k z'_k=0$.

Первое условие, очевидно, всегда выполняется, так как для пластины все $x'_k=0$. Чтобы найти, когда выполняется второе условие, воспользуемся тем, что нам известно значение $J_{yz}=\Sigma m_k y_k z_k$ и что $y'_k=y_k$, а $z'_k=z_k-b$. Тогда $J_{y'z'}=$ $=\Sigma m_k y_k (z_k-b)=J_{yz}-(\Sigma m_k y_k)b=J_{yz}-My_C b$, где $y_C=a=l_1/3$. Следовательно, $J_{y'z'}=0$, если $b=J_{yz}/(Ma)=l_2/4$.

Итак, центр удара находится в точке K с координатами $y=h=l_1/2$, $z=b=l_2/4$.

Задача 189. Вращающийся курок AD в момент начала удара по ударнику B (рис. 386) имеет угловую скорость ω. Определить скорость ударника в конце удара и импульсивное давление на ось A. Массы M и m курка и ударника, момент инерций J_A курка относительно оси A, коэффициент восстановления k и расстояния a и b известны (точка C — центр масс курка).

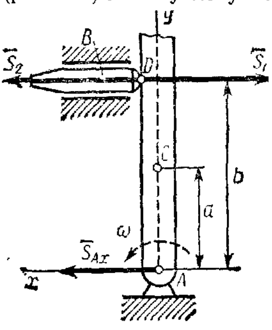

Рис. 386

Решение. Обозначим ударные импульсы, действующие на курок и ударник при ударе через $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Тогда для курка [по уравнению (167)] и для ударника [по уравнению (154')], учитывая, что $S_1=$ $=S_2=S$, а $v_B=0$, получим:

$$J_A(\Omega-\omega)=-Sb, \qquad mu_B=S. \tag{а}$$

У момента Sb взят знак минус, так как момент направлен противоположно направлению вращения курка. Кроме того, поскольку для точки D курка $v_D=\omega b$, а $u_D=\Omega b$ (v_D — скорость в начале удара, u_D — в конце), то формула (158'), определяющая коэффициент восстановления при прямом ударе двух тел, дает:

$$u_D-u_B=-k(v_D-v_B) \quad \text{или} \quad \Omega b-u_B=-k\omega b.$$

Подставляя сюда Ω и S из уравнений (а), найдем скорость ударника в конце удара:

$$u_B=\frac{J_A b(1+k)}{J_A+mb^2}\,\omega.$$

Для определения $\bar{S}_A$ — импульсивной реакции, действующей со стороны оси на курок, составляем для курка уравнение (154) в проекциях на оси Ax и Ay. Учитывая, что $Q_{0x}=Mv_{Cx}=M\omega a$, $Q_{1x}=Mu_{Cx}=M\Omega a$, найдем:

$$Ma(\Omega-\omega)=-S+S_{Ax}, \qquad S_{Ay}=0. \tag{б}$$

Но из уравнений (а) $S=mu_B$, $\Omega-\omega=-mbu_B/J_A$. Подставляя эти величины в равенство (б) и заменяя u_B его значением, получим окончательно

$$S_{Ax}=\frac{J_A-Mab}{J_A+mb^2}\,mb(1+k)\,\omega.$$

При $b=J_A/(Ma)$ точка D является центром удара и $S_A=0$.