§ 66. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Найдем зависимость между относительным, переносным и абсолютным ускорениями точки. Из равенства (84) получим

$$\bar{a}_{аб} = \frac{d\bar{v}_{аб}}{dt} = \frac{d\bar{v}_{от}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{пер}}{dt}. \tag{85}$$

Производные здесь определяют изменение каждого из векторов при абсолютном движении. Эти изменения слагаются в общем случае из изменений при относительном и при переносном движениях, что ниже будет непосредственно показано. Следовательно, если условиться изменения, которые векторы $\bar{v}_{от}$ и $\bar{v}_{пер}$ получают *при относительном движении*, отмечать индексом «1», а *при переносном движении* — индексом «2», то равенство (85) примет вид

$$\bar{a}_{аб} = \frac{(d\bar{v}_{от})_1}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{от})_2}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{пер})_1}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{пер})_2}{dt}. \tag{86}$$

Но по определению (см. § 64, п. 1) *относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только при относительном движении*; движение осей $Oxyz$, т. е. переносное движение при этом во внимание не принимается. Поэтому

$$\bar{a}_{от} = \frac{(d\bar{v}_{от})_1}{dt}. \tag{87}$$

В свою очередь, *переносное ускорение характеризует изменение переносной скорости только при переносном движении*, так как $\bar{a}_{пер} = \bar{a}_m$ (см. § 64, п. 2), где m — точка, неизменно связанная с осями $Oxyz$ и, следовательно, получающая ускорение только при движении вместе с этими осями, т. е. при переносном движении. Поэтому

$$\bar{a}_{пер} = \frac{(d\bar{v}_{пер})_2}{dt}. \tag{88}$$

В результате из равенства (86) получим

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \frac{(d\bar{v}_{от})_2}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{пер})_1}{dt}. \tag{89}$$

Введем обозначение

$$\bar{a}_{\text{кор}} = \frac{(\mathrm{d}\bar{v}_{\text{от}})_2}{\mathrm{d}t} + \frac{(\mathrm{d}\bar{v}_{\text{пер}})_1}{\mathrm{d}t}. \tag{90}$$

Величина $\bar{a}_{\text{кор}}$, *характеризующая изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости точки при ее относительном движении, называется поворотным, или кориолисовым, ускорением точки.* В результате равенство (89) примет вид

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}. \tag{91}$$

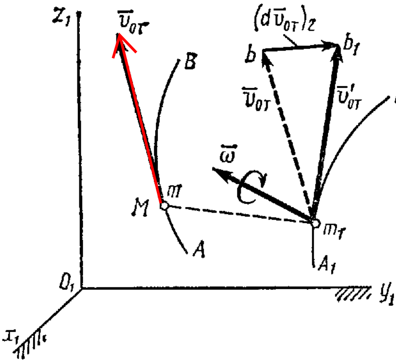

Рис. 188

Формула (91) выражает следующую теорему Кориолиса о сложении ускорений*: *при сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и поворотного, или кориолисова.*

Найдем для вычисления $\bar{a}_{\text{кор}}$ формулу, вытекающую из равенства (90). При этом, рассматривая общий случай, будем считать переносное движение, т. е. движение подвижных осей $Oxyz$, а с ними и кривой AB (см. рис. 182), слагающимся из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращения вокруг этого полюса с угловой скоростью $\bar{\omega}$, называемой *переносной угловой скоростью.* Величина $\bar{\omega}$, как показано в § 63, от выбора полюса не зависит и на изображенных рис. 188, где полюс точка m, и рис. 189, где полюс O, имеет одно и то же значение.

Начнем с определения $(\mathrm{d}\bar{v}_{\text{от}})_2/\mathrm{d}t$. При рассматриваемом переносном движении вектор $\bar{v}_{\text{от}}$, направленный по касательной к кривой AB, переместится вместе с этой кривой поступательно (придет в положение $\overline{m_1b}$, рис. 188) и одновременно повернется вокруг точки m_1 до положения $\overline{m_1b_1}$. В результате вектор $\bar{v}_{\text{от}}$ получит в переносном движении приращение $(\mathrm{d}\bar{v}_{\text{от}})_2 = \overline{bb_1} = \bar{v}_b \cdot \mathrm{d}t$, где $\bar{v}_b$ — скорость, с которой перемещается точка b при повороте вектора $\overline{m_1b} = \bar{v}_{\text{от}}$ вокруг точки m_1. Так как этот поворот происходит с угловой скоростью $\bar{\omega}$, то по формуле (76) $\bar{v}_b = \bar{\omega} \times \overline{m_1b} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}}$. В результате получаем $(\mathrm{d}\bar{v}_{\text{от}})_2 = \bar{v}_b \cdot \mathrm{d}t = \bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}}\mathrm{d}t$ и

$$\frac{(\mathrm{d}\bar{v}_{\text{от}})_2}{\mathrm{d}t} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}}. \tag{92}$$

---

* Гюстав Кориолис (1792—1843) — французский ученый, известный своими трудами по теоретической и прикладной механике. Кориолисово ускорение называют еще поворотным, так как оно появляется при наличии у подвижных осей вращения (поворота).

Теперь определим $(d\bar{v}_{\text{пер}})_1/dt$. Скорость $\bar{v}_{\text{пер}}$ равна скорости той неизменно связанной с подвижными осями точки m кривой AB, с которой в данный момент времени совпадает точка M (рис. 189). Если точку O принять за полюс и обозначить через $\bar{r}$ вектор $\overline{Om}=\overline{OM}$, то по формуле (81)

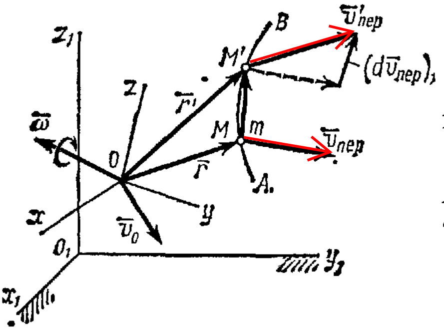

Рис. 189

$$\bar{v}_{\text{пер}}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r}.$$

Совершив за промежуток времени dt относительное перемещение $\overline{MM'}=\bar{v}_{\text{от}}\cdot dt$, точка придет в положение M', для которого $\bar{r}'=\bar{r}+\overline{MM'}$ и

$$\bar{v}'_{\text{пер}}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r}'=$$
$$=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times(\bar{r}+\overline{MM'}).$$

Следовательно, вследствие того, что точка совершает относительное перемещение $\overline{MM'}=\bar{v}_{\text{от}}dt$, вектор $\bar{v}_{\text{пер}}$ получает приращение

$$(d\bar{v}_{\text{пер}})_1=\bar{v}'_{\text{пер}}-\bar{v}_{\text{пер}}=\bar{\omega}\times\overline{MM'}=\bar{\omega}\times\bar{v}_{\text{от}}\,dt,$$

откуда

$$\frac{(d\bar{v}_{\text{пер}})_1}{dt}=\bar{\omega}\times\bar{v}_{\text{от}}. \tag{93}$$

Подставляя величины (92) и (93) в равенство (90), получим

$$\bar{a}_{\text{кор}}=2\,(\bar{\omega}\times\bar{v}_{\text{от}}). \tag{94}$$

Таким образом, *кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости* (угловой скорости подвижной системы отсчета) *на относительную скорость точки.*

Случай поступательного переносного движения. В этом случае $\omega=0$ и, следовательно, $\bar{a}_{\text{кор}}=0$. В результате равенство (91) дает*

$$\bar{a}_{\text{аб}}=\bar{a}_{\text{от}}+\bar{a}_{\text{пер}}. \tag{95}$$

---

* Этот результат виден и из рис. 188, 189. Когда кривая AB перемещается поступательно, то вектор $\bar{v}_{\text{от}}$ придет в положение m_1b, показанное на рис. 188 пунктиром, т. е. не изменится, и будет $(d\bar{v}_{\text{от}})_2=0$. Одновременно при этом все точки кривой AB имеют одинаковые скорости и в точке M' (рис. 189) $\bar{v}_{\text{пер}}$ будет таким же, как в точке M, т. е. показанным пунктиром, вследствие чего $(d\bar{v}_{\text{пер}})_1=0$.