Раздел четвертый
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава XXI
ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

§ 100. МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. СИЛЫ ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ

Систему материальных точек или тел, движение (или равновесие) которой рассматривается, будем называть *механической системой*. Если между точками (телами) механической системы действуют силы взаимодействия, то она обладает тем свойством, что в ней положение или движение каждой точки (тела) зависит от положения и движения всех остальных. Классическим примером такой системы является солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения.

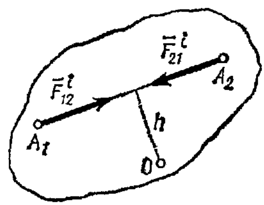

Рис. 274

Действующие на механическую систему активные силы $\bar{F}_k^a$ и реакции связей $\bar{N}_k$ разделяют на внешние $\bar{F}_k^e$ и внутренние $\bar{F}_k^i$ (индексы e и i от латинских exterior — внешний и interior — внутренний). *Внешними* называют *силы*, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы. *Внутренними* называют силы, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга. Это разделение является условным и зависит от того, какая механическая система рассматривается. Например, если рассматривается движение всей Солнечной системы, то сила притяжения Земли к Солнцу будет внутренней; если же рассматривается движение системы Земля — Луна, то для этой системы та же сила будет внешней.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. *Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю.* В самом деле, по третьему закону динамики любые две точки системы (рис. 274) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами $\bar{F}_{12}^i$ и $\bar{F}_{21}^i$, сумма которых равна нулю. Так как аналогичный резуль-

тат имеет место для любой пары точек системы, то

$$\sum \overline{F}_k^i = 0.$$

2. *Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.* Действительно, если взять произвольный центр O, то из рис. 274 видно, что $m_O(\overline{F}_{12}^i)+m_O(\overline{F}_{21}^i)=0$. Аналогичный результат получится при вычислении моментов относительно оси. Следовательно, и для всей системы будет:

$$\sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^i)=0 \text{ и } \sum m_x(\overline{F}_k^i)=0.$$

Из доказанных свойств не следует, однако, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к разным материальным точкам или телам и могут вызвать взаимные перемещения этих точек или тел. Уравновешенной вся совокупность внутренних сил будет у системы, представляющей собой абсолютно твердое тело.

§ 101. МАССА СИСТЕМЫ. ЦЕНТР МАСС

Движение системы кроме действующих сил зависит также от ее суммарной массы и распределения масс. *Масса системы* (обозначаем M или m) *равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему*:

$$M=\sum m_k.$$

Распределение масс в системе определяется значениями масс m_k ее точек и их взаимными положениями, т. е. их координатами x_k, y_k, z_k. Однако оказывается, что при решении тех задач динамики, которые мы будем рассматривать, в частности динамики твердого тела, для учета распределения масс достаточно знать не все величины m_k, x_k, y_k, z_k, а некоторые, выражаемые через них суммарные характеристики. Ими являются: *координаты центра масс* (выражаются через суммы произведений масс точек системы на их координаты), *осевые моменты инерции* (выражаются через суммы произведений масс точек системы на квадраты их координат) и *центробежные моменты инерции* (выражаются через суммы произведений масс точек системы и двух из их координат). Эти характеристики мы в данной главе и рассмотрим.

Центр масс. В однородном поле тяжести, для которого g=const, вес любой частицы тела пропорционален ее массе. Поэтому о распределении масс в теле можно судить по положению его центра тяжести. Преобразуем формулы (59) из § 32, определяющие координаты центра тяжести тела, к виду, явно содержащему массу. Для этого положим в названных формулах $p_k=m_kg$ и $P=Mg$, после чего, сократив на g, найдем:

$$x_C=\frac{1}{M}\sum m_kx_k, \quad y_C=\frac{1}{M}\sum m_ky_k, \quad z_C=\frac{1}{M}\sum m_kz_k. \tag{1}$$

В полученные равенства входят теперь массы m_k материальных точек (частиц), образующих тело, и координаты x_k, y_k, z_k этих точек. Следовательно, положение точки $C(x_C, y_C, z_C)$ действительно характеризует распределение масс в теле или в любой механической системе, если под m_k, x_k, y_k, z_k понимать соответственно массы и координаты точек системы.

Геометрическая точка C, координаты которой определяются формулами (1), *называется центром масс или центром инерции механической системы.*

Если положение центра масс определять его радиусом-вектором $\bar{r}_C$, то из равенств (1) для $\bar{r}_C$ получается формула

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_k \bar{r}_k, \qquad (1')$$

где $\bar{r}_k$ — радиусы-векторы точек, образующих систему.

Из полученных результатов следует, что для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести, положения центра масс и центра тяжести совпадают. Но в отличие от центра тяжести понятие о центре масс сохраняет свой смысл для тела, находящегося в любом силовом поле (например, в центральном поле тяготения), и, кроме того, как характеристика распределения масс, имеет смысл не только для твердого тела, но и для любой механической системы.

§ 102. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ. РАДИУС ИНЕРЦИИ

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или *осевым моментом инерции*) *называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси:*

$$J_z = \sum m_k h_k^2. \qquad (2)$$

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

В дальнейшем будет показано, что осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т. е. что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.*

Согласно формуле (2) момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии h от оси, $J_z = mh^2$. Единицей измерения момента инерции в СИ будет 1 кг$\cdot$м^2 (в системе МКГСС — 1 кгм$\cdot$с^2).

Для вычисления осевых моментов инерции можно расстояния точек от осей выражать через координаты x_k, y_k, z_k этих точек (например, квадрат расстояния от оси Ox будет $y_k^2+z_k^2$ и т. д.). Тогда моменты инерции относительно осей $Oxyz$ будут определяться формулами:

$$J_x=\sum m_k(y_k^2+z_k^2),\quad J_y=\sum m_k(z_k^2+x_k^2),\quad J_z=\sum m_k(x_k^2+y_k^2). \quad (3)$$

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции. *Радиусом инерции* тела относительно оси Oz называется линейная величина ρ_z, определяемая равенством

$$J_z=M\rho_z^2, \quad (4)$$

где M — масса тела. Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси Oz той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

Зная радиус инерции, можно по формуле (4) найти момент инерции тела и наоборот.

Формулы (2) и (3) справедливы как для твердого тела, так и для любой системы материальных точек. В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве (2), обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm=\rho dV$, где ρ — плотность, а V — объем, получим

$$J_z=\int_{(V)} h^2\,dm \quad \text{или} \quad J_z=\int_{(V)} \rho h^2\,dV. \quad (5)$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем V тела, а плотность ρ и расстояние h зависят от координат точек тела. Аналогично формулы (3) для сплошных тел примут вид

$$J_x=\int_{(V)} \rho(y^2+z^2)\,dV \text{ и т. д.} \quad (5')$$

Формулами (5) и (5′) удобно пользоваться при вычислении моментов инерции однородных тел правильной формы. При этом плотность ρ будет постоянной и выйдет из-под знака интеграла.

Найдем моменты инерции некоторых однородных тел.

1. Тонкий однородный стержень длиной l и массой M. Вычислим его момент инерции относительно оси Az, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец A (рис. 275). Направим вдоль AB координатную ось Ax. Тогда для любого элементарного отрезка длины dx величина $h=x$, а масса $dm=\rho_1 dx$, где $\rho_1=M/l$ — масса единицы длины стержня. В результате формула (5) дает *

$$J_A=\int_0^l x^2\,dm=\rho_1\int_0^l x^2\,dx=\rho_1 l^3/3.$$

* Здесь и везде далее J_A обозначает момент инерции относительно оси, проходящей через точку A и направленной перпендикулярно плоскости изображенного на чертеже сечения тела.

Заменяя здесь ρ_1 его значением, найдем окончательно

$$J_A = Ml^2/3. \tag{6}$$

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиусом R и массой M. Найдем его момент инерции относительно

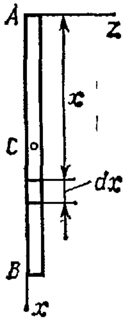

Рис. 275

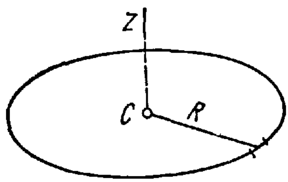

Рис. 276

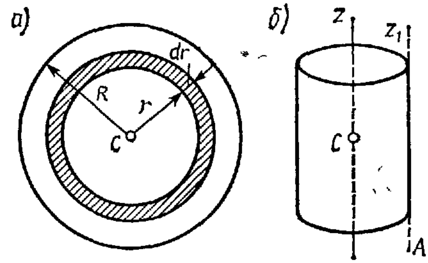

Рис. 277

оси Cz, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр C (рис. 276). Так как все точки кольца находятся от оси Cz на расстоянии $h_k = R$, то формула (2) дает

$$J_C = \sum m_k R^2 = \left(\sum m_k\right) R^2 = MR^2.$$

Следовательно, для кольца *

$$J_C = MR^2. \tag{7}$$

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массой M и радиусом R относительно ее оси.

3. Круглая однородная пластина или цилиндр радиусом R и массой M. Вычислим момент инерции круглой пластины относительно оси Cz, перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр (см. рис. 276). Для этого выделим элементарное кольцо радиусом r и шириной $\mathrm{d}r$ (рис. 277, *а*). Площадь этого кольца $2\pi r \cdot \mathrm{d}r$, а масса $\mathrm{d}m = \rho_2 2\pi r \cdot \mathrm{d}r$, где $\rho_2 = M/\pi r^2$ — масса единицы площади пластины. Тогда по формуле (7) для выделенного элементарного кольца будет $\mathrm{d}J_C = r^2 \mathrm{d}m = 2\pi\rho_2 r^3 \mathrm{d}r$, а для всей пластины

$$J_C = 2\pi\rho_2 \int_0^R r^3\, \mathrm{d}r = \pi\rho_2 R^4/2.$$

Заменяя здесь ρ_2 его значением, найдем окончательно

$$J_C = MR^2/2. \tag{8}$$

* Сравнивая формулы (4) и (7) можно еще заключить, что радиус инерции тела равен радиусу тонкого кольца с таким же осевым моментом инерции, как и у тела.

Такая же формула получится, очевидно, и для момента инерции J_z однородного круглого цилиндра массой M и радиусом R относительно его оси (рис. 277, *б*).

4. Прямоугольная пластина, конус, шар. Опуская выкладки, приведем формулы, определяющие моменты инерции следующих тел (читатель может получить их самостоятельно, а также найти эти и другие формулы в различных справочниках):

а) сплошная прямоугольная пластина массой M со сторонами $AB=a$ и $BD=b$ (ось x направлена вдоль стороны AB, ось y — вдоль BD):

$$J_x=Mb^2/3,\quad J_y=Ma^2/3;$$

б) прямой сплошной круглый конус массой M с радиусом основания R (ось z направлена вдоль оси конуса):

$$J_z=0{,}3MR^2;$$

в) сплошной шар массой M и радиусом R (ось z направлена вдоль диаметра):

$$J_z=0{,}4MR^2.$$

Моменты инерции неоднородных тел и тел сложной конфигурации можно определять экспериментально с помощью соответствующих приборов. Один из таких методов рассмотрен в § 129.

§ 103. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ. ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА

Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут, вообще говоря, разными. Покажем, как, зная момент инерции относительно какой-нибудь одной оси, проведенной в теле, найти момент инерции относительно любой другой оси, ей параллельной.

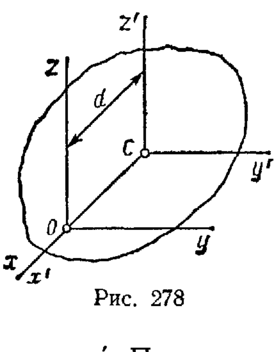

Рис. 278

Проведем через центр масс C тела произвольные оси $Cx'y'z'$, а через любую точку O на оси Cx' — оси $Oxyz$, такие, что $Oy\|Cy'$, $Oz\|Cz'$ (рис. 278). Расстояние между осями Cz' и Oz обозначим через d. Тогда по формулам (3) будет:

$$J_{Oz}=\sum m_k(x_k^2+y_k^2),\quad J_{Cz'}=\sum m_k\left(x_k'^2+y_k'^2\right).$$

Но, как видно из рисунка, для любой точки тела $x_k=x_k'-d$ и $x_k^2=x_k'^2+d^2-2x_k'd$, а $y_k=y_k'$. Подставляя эти значения x_k, y_k в выражение для J_{Oz} и вынося общие множители d^2 и $2d$ за скобки, получим

$$J_{Oz}=\sum m_k\left(x_k'^2+y_k'^2\right)+\left(\sum m_k\right)d^2-\left(\sum m_k x_k'\right)2d.$$

В правой части равенства первая сумма равна $J_{Cz'}$, а вторая — массе тела M. Найдем значение третьей суммы. На основании формул (1) для координат центра масс $\Sigma m_k x'_k = M x'_C$. Так как в нашем случае точка C является началом координат, то $x'_C=0$ и, следовательно, $\Sigma m_k x'_k=0$. Окончательно получаем

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2. \qquad (9)$$

Формула (9) выражает следующую теорему Гюйгенса *: *момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.*

Из формулы (9) видно, что $J_{Oz} > J_{Cz'}$. Следовательно, из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно той оси, которая проходит через центр масс.

Теорема Гюйгенса позволяет найти момент инерции тела относительно данной оси Oz_1 и в том случае, когда известен его момент инерции относительно *любой* оси Az_2, параллельной Oz_1. При этом надо знать расстояния d_1 и d_2 каждой из этих осей от центра масс тела. Тогда, зная J_{Az_2} и d_2, мы по формуле (9) определяем $J_{Cz'}$, а затем по той же формуле находим искомый момент инерции J_{Oz_1}.

Задача 119. Определить момент инерции тонкого стержня относительно оси Cz, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс.

Решение. Проведем через конец A стержня ось Az (см. рис. 275; ось Cz на нем не показана). Тогда по формуле (9)

$$J_C = J_A - Md^2.$$

В данном случае $d=l/2$, где l — длина стержня, а величина J_A определяется формулой (6). Следовательно,

$$J_C = Ml^2/3 - Ml^2/4 = Ml^2/12.$$

Задача 120. Определить момент инерции цилиндра относительно оси Az_1, проходящей через его образующую (см. рис. 277, *б*).

Решение. По теореме Гюйгенса $J_{Az_1} = J_{Cz} + Md^2$. В данном случае $d=R$, а по формуле (8) $J_{Cz} = MR^2/2$. Подставляя эти значения, получим

$$J_{Az_1} = MR^2/2 + MR^2 = (3/2)\,MR^2.$$

§ 104*. ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ. ПОНЯТИЯ О ГЛАВНЫХ ОСЯХ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Если через точку O провести координатные оси $Oxyz$, то по отношению к этим осям *центробежными моментами инерции* (или *произведениями инерции*) *называют величины* J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}, *определяемые равенствами:*

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k, \quad J_{yz} = \sum m_k y_k z_k, \quad J_{zx} = \sum m_k z_k x_k, \qquad (10)$$

где m_k — массы точек; x_k, y_k, z_k — их координаты; при этом очевидно, что $J_{xy} = J_{yx}$ и т. д.

* Христиан Гюйгенс (1629—1695) — выдающийся голландский ученый, механик, физик и астроном. Изобрел первые маятниковые часы. В связи с этим изучал колебания физического маятника (см. § 129) и ввел понятие о моменте инерции тела (сам термин предложил позже Эйлер).

Для сплошных тел формулы (10) по аналогии с (5′) принимают вид

$$J_{xy}=\int\limits_{(V)}\rho xy\,dV \text{ и т. д.} \qquad (10')$$

В отличие от осевых центробежные моменты инерции могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, в частности, при определенным образом выбранных осях $Oxyz$ могут обращаться в нули.

Главные оси инерции. Рассмотрим однородное тело, имеющее ось симметрии. Проведем координатные оси $Oxyz$ так, чтобы ось Oz была направлена вдоль оси симметрии (рис. 279). Тогда в силу симметрии каждой точке тела с массой m_k и координатами x_k, y_k, z_k будет соответствовать точка с другим индексом, но с такой же массой и с координатами, равными $-x_k$, $-y_k$, z_k. В результате получим, что $\Sigma m_k x_k z_k=0$ и $\Sigma m_k y_k z_k=0$, так как в этих суммах все слагаемые попарно одинаковы по модулю и противоположны по знаку; отсюда, учитывая равенства (10), находим:

$$J_{xz}=0,\quad J_{yz}=0. \qquad (11)$$

Таким образом, симметрия в распределении масс относительно оси z характеризуется обращением в нуль двух центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz}. *Ось Oz, для которой центробежные моменты инерции J_{xz}, J_{yz}, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется главной осью инерции тела для точки O.*

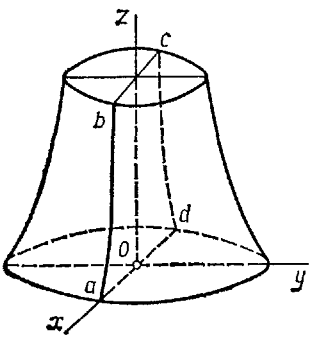

Рис. 279

Из изложенного следует, что *если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции тела для любой своей точки.*

Главная ось инерции не обязательно является осью симметрии. Рассмотрим однородное тело, имеющее плоскость симметрии (на рис. 279 плоскостью симметрии тела является плоскость $abcd$). Проведем в этой плоскости какие-нибудь оси Ox, Oz и перпендикулярную им ось Oy. Тогда в силу симметрии каждой точке с массой m_k и координатами x_k, y_k, z_k будет соответствовать точка с такой же массой и координатами, равными x_k, $-y_k$, z_k. В результате, как и в предыдущем случае, найдем, что $\Sigma m_k x_k y_k=0$ и $\Sigma m_k y_k z_k=0$ или $J_{xy}=0$, $J_{yz}=0$, откуда следует, что ось Oy является главной осью инерции для точки O. Таким образом, *если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки O, в которой ось пересекает плоскость.*

Равенства (11) выражают условия того, что ось Oz является главной осью инерции тела для точки O (начала координат). Аналогично, если $J_{xy}=0$, $J_{yz}=0$, то ось Oy будет для точки O главной осью инерции. Следовательно, *если все центробежные моменты инерции равны нулю, т. е.*

$$J_{xy}=0,\ J_{yz}=0,\ J_{zx}=0, \tag{11'}$$

то каждая из координатных осей $Oxyz$ является главной осью инерции тела для точки O (начала координат).

Например, на рис. 279 все три оси $Oxyz$ являются для точки O главными осями инерции (ось Oz как ось симметрии, а оси Ox и Oy как перпендикулярные плоскостям симметрии).

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются *главными моментами инерции тела.*

Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называют *главными центральными осями инерции тела.* Из доказанного выше следует, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из главных центральных осей инерции тела, так как центр масс лежит на этой оси. Если же тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через центр масс тела, будет также одной из главных центральных осей инерции тела.

В приведенных примерах рассматривались симметричные тела, чего для решения задач, с которыми мы будем сталкиваться, достаточно. Однако можно доказать, что через любую точку какого угодно тела можно провести, по крайней мере, три такие взаимно перпендикулярные оси, для которых будут выполняться равенства (11'), т. е. которые будут главными осями инерции тела для этой точки.

Понятие о главных осях инерции играет важную роль в динамике твердого тела. Если по ним направить координатные оси $Oxyz$, то все центробежные моменты инерции обращаются в нули и соответствующие уравнения или формулы существенно упрощаются (см. § 105, 132). С этим понятием связано также решение задач о динамическом уравнении вращающихся тел (см. § 136), о центре удара (см. § 157) и др.