§ 105*. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСИ

Проведем ось Ol, образующую с осями $Oxyz$ углы α, β и γ соответственно (рис. 280). По определению, $J_l = \Sigma m_k h_k^2$, где, как видно из треугольника OB_kD_k, $h_k^2 = r_k^2 - (OD_k)^2$. Но OD_k, как проекция вектора $\bar{r}_k = x_k\bar{i} + y_k\bar{j} + z_k\bar{k}$ на ось Ol, равна сумме проекций составляющих этого вектора на ту же ось, причем $(x_k\bar{i})_l = x_k \cos\alpha$ и т. д.; кроме того, $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$. Тогда

$$J_l = \Sigma m_k \left[x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - (x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2\right].$$

Если сначала учесть, что $1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ и т. д., а затем вынести квадраты и произведения косинусов, как общие множители, за скобки и принять во внимание формулы (3) и (10), то окончательно получим

$$J_l = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma - 2J_{xy} \cos\alpha \cos\beta - $$
$$- 2J_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2J_{zx} \cos\gamma \cos\alpha. \qquad (12)$$

Если же в качестве осей $Oxyz$ выбрать главные оси инерции тела для точки O то формула упрощается.

$$J_l = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma. \qquad (12')$$

Формулы (12) или (12′) позволяют, зная входящие в их правые части моменты инерции относительно заданных осей $Oxyz$, определить момент инерции относительно любой оси, проходящей через точку O*. Если же известно и положение центра масс тела, то, используя формулу (9), можно найти момент инерции относительно оси, проходящей через любую другую точку.

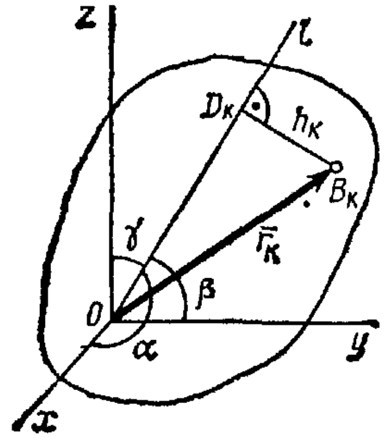

Рис 280

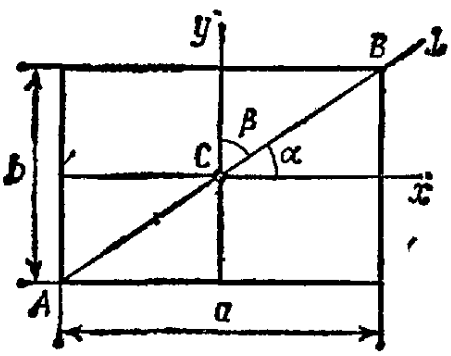

Рис. 281

Задача 121. Найти момент инерции однородной прямоугольной пластины с массой m и сторонами a и b относительно ее диагонали (рис 281).

Решение. Проведем через центр C пластины оси Cxy (ось Cz на рисунке не показана), которые, как оси симметрии, будут для точки C главными осями инерции. Тогда по формуле (12′), учитывая, что $\gamma = 90°$, получим

$$J_l = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta.$$

По аналогии с результатом, полученным в задаче 119, для пластины будет $J_x = mb^2/12$, $J_y = ma^2/12$, кроме того, $\cos\alpha = a/c$, $\cos\beta = b/c$, где $c = AB$. В результате окончательно найдем

$$J_l = ma^2b^2/6c^2 = ma^2b^2/6\,(a^2 + b^2).$$

В заключение рассмотрим, в чем проявляется влияние введенных характеристик распределения масс на частном примере вращения вокруг оси Oz стержня с нанизанными на него одинаковыми шарами A и B (рис. 282).

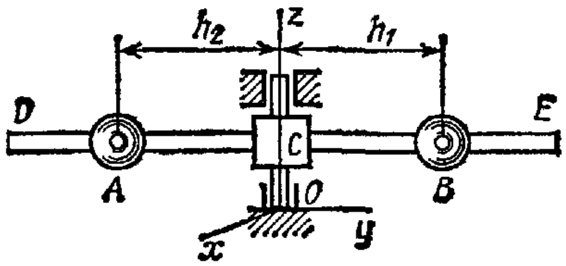

Рис. 282

Если $h_2 \neq h_1$, то центр масс системы не лежит на оси Oz и при вращении появятся давления на подшипники; если $h_2 = h_1$, центр масс лежит на оси и этих давлений не будет.

Если при $h_2 = h_1$ расстояния шаров от оси увеличить, то положение центра масс не изменится, но увеличится момент инерции J_z и при прочих равных условиях вращение будет происходить медленнее.

Если стержень DE повернуть в плоскости Oyz так, чтобы $\angle DCz$ не был прямым, а расстояния h_1 и $h_2 = h_1$ сохранить, сместив шары

* Шесть величин J_x, J_y, J_z, $-J_{xy}$, $-J_{yz}$, $-J_{zx}$ определяют так называемый тензор инерции и являются его компонентами.

с некоторой угловой скоростью $\overline{\omega}_2$, вследствие чего на подшипники D и D_1 станет действовать гироскопическая пара $\overline{N}$, $\overline{N}'$ с моментом $M_{\text{гир}}=J_z\Omega\omega_2$, способствующая уменьшению крена. Для повышения эффективности стабилизатора используют снабженный специальным регулятором двигатель, увеличивающий угловую скорость ω_2, а с нею и стабилизирующий момент $M_{\text{гир}}$, и возвращающий раму в исходное положение, когда крен прекратится.

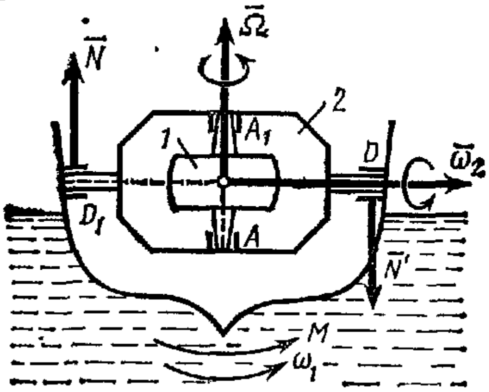

Рис. 339

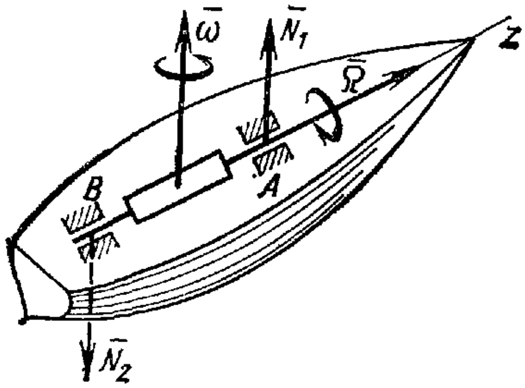

Рис. 340

Успокоитель качки дает пример *силовой* гироскопической стабилизации (стабилизатор прямого действия), где массивный гироскоп и регистрирует отклонение объекта от заданного положения, и осуществляет стабилизацию, а двигатель играет лишь вспомогательную роль.

Рассмотрим в заключение пример определення гироскопических давлений на подшипники. Если судно, у которого ротор турбины вращается с угловой скоростью Ω (рис. 340), совершает поворот с угловой скоростью ω, то на подшипники A и B будут действовать силы $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, направленные как показано на рисунке *. Если при этом $AB=l$, а момент инерции ротора J_z, то по формуле (77)

$$M_{\text{гир}}=Nl=J_z\Omega\omega \quad \text{и} \quad N=J_z\Omega\omega/l.$$

Величины этих сил могут достигать десятков килоньютонов и должны учитываться при расчете подшипников. Через подшипники гироскопические давления передаются корпусу судна и у очень легкого судна могли бы вызвать при повороте опускание киля или носа. Подобный эффект может наблюдаться и у винтовых самолетов при виражах (поворотах в горизонтальной плоскости).

§ 132*. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для составления дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, необходимо найти выражение главного момента количеств движения $\overline{K}_O$ (кинетического момента) и кинетической энергии T тела в этом случае движения.

1. Кинетический момент тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Вектор $\overline{K}_O$ можно определить, найдя его проекции на какие-нибудь три координатные оси $Oxyz$. Чтобы получить соответствующие формулы в наиболее простом виде, возьмем в качестве осей $Oxyz$ (см. ниже рис. 341) жестко связанные с телом *главные оси инерции* этого тела для точки O (см. § 104).

Начнем с вычисления K_x. По аналогии с формулами (47) из § 28

$$m_x(m_k\overline{v}_k)=m_k(y_kv_{kz}-z_kv_{ky}).$$

Но по формулам Эйлера [§ 62, формулы (77)]

$$v_{ky}=\omega_zx_k-\omega_xz_k, \quad v_{kz}=\omega_xy_k-\omega_yx_k,$$

* Гироскопические давления на подшипники возникают и вследствие качки судна. Направления этих давлений будут, конечно, другими.

где ω_x, ω_y, ω_z — проекции на оси $Oxyz$ мгновенной угловой скорости тела; x_k, y_k, z_k — координаты точек тела.

Подставим эти значения v_{ky} и v_{kz} в предыдущее равенство; при этом заметим, что члены с произведениями координат можно не подсчитывать, так как оси $Oxyz$ являются главными осями инерции и для них все центробежные моменты инерции равны нулю, т. е. $\Sigma m_k x_k y_k = \Sigma m_k x_k z_k = 0$. В результате, вынося общий множитель ω_x за скобки, найдем

$$K_x = \Sigma m_x (m_k \bar{v}_k) = \left[\Sigma m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right)\right] \omega_x,$$

где величина в квадратных скобках представляет собой, согласно формулам (3) из § 102, главный момент инерции тела относительно оси Ox. Аналогичные выражения получим для K_y, K_z и окончательно будет

$$K_x = J_x\omega_x, \quad K_y = J_y\omega_y, \quad K_z = J_z\omega_z. \tag{78}$$

Формулы (78) дают выражения проекций вектора $\overline{K}_O$ *на главные оси инерции тела* для точки O.

Если оси $Oxyz$ не будут главными, то, как нетрудно подсчитать, формулы (78) примут следующий более сложный вид:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z, \\ K_y &= -J_{xy}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z, \\ K_z &= -J_{xz}\omega_x - J_{yz}\omega_y + J_z\omega_z. \end{aligned}\right\} \tag{78'}$$

2. Кинетическая энергия тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Так как любое элементарное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку O, представляет собой элементарный поворот с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг мгновенной оси вращения Ol, проходящей через эту точку (см. § 60), то кинетическую энергию тела можно определить по формуле

$$T = J_l\omega^2/2.$$

Подставим сюда значение J_l из формулы (12) (см. § 105, рис. 280) и одновременно учтем, что $\omega\cos\alpha = \omega_x$, $\omega\cos\beta = \omega_y$, $\omega\cos\gamma = \omega_z$, так как вектор ω направлен по оси Ol. Тогда получим

$$2T = J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{zx}\omega_z\omega_x. \tag{79}$$

Если в качестве координатных осей взять *главные оси инерции тела* для точки O, то все центробежные моменты инерции обратятся в нули и тогда

$$2T = J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2. \tag{79'}$$