Глава XXII
ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ

§ 106. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой m_k. Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил (и активных, и реакций связей) через $\bar{F}_k^e$, а равнодействующую всех внутренних сил — через $\bar{F}_k^i$. Если точка имеет при этом ускорение $\bar{a}_k$, то по основному закону динамики $m_k\bar{a}_k=\bar{F}_k^e+\bar{F}_k^i$.

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет

$$\left.\begin{aligned} m_1\bar{a}_1 &= \bar{F}_1^e+\bar{F}_1^i, \\ m_2\bar{a}_2 &= \bar{F}_2^e+\bar{F}_2^i, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ m_n\bar{a}_n &= \bar{F}_n^e+\bar{F}_n^i. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Уравнения (13) представляют собой *дифференциальные уравнения движения системы в векторной форме* (в них $\bar{a}_k=\dot{\bar{v}}_k=\ddot{\bar{r}}_k$). Входящие в правые части уравнений силы могут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей.

Проектируя равенства (13) на какие-нибудь координатные оси, получим дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

Полное решение основной задачи динамики для системы будет состоять в том, чтобы, зная заданные силы и наложенные связи, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить в результате закон движения каждой из точек системы и реакции связей. Сделать это аналитически удается лишь в отдельных случаях, когда число точек системы невелико, или же интегрируя уравнения численно с помощью ЭВМ.

Однако при решении многих конкретных задач необходимость иаходить закон движения каждой из точек системы не возникает, а бывает достаточно найти какие-то характеристики, определяющие движение всей системы в целом. Например, чтобы установить, как движется под действием приложенных сил кривошипно-ползунный механизм (см. рис. 158 в § 57), достаточно определить закон вращения кривошипа, т. е. найти зависимость угла его поворота φ от времени t. Обычно для отыскания подобных решений уравнения (13) непосредственно не применяют, а применяют другие, разработанные в динамике методы. К их числу относятся методы, которые дают широко используемые в инженерной практике *общие теоремы динамики системы*, получаемые как следствия уравнений (13); эти теоремы и будут рассмотрены в данной и в трех последующих главах.

Но предварительно решим одну задачу, показывающую, что искомый результат можно иногда эффективно находить и непосредственно, используя дифференциальные уравнения движения системы.

Задача 122. Динамический гаситель колебаний. Укрепленный на пружине груз 1 совершает вынужденные колебания под действием возмущающей силы $\overline{Q}$, проекция которой $Q_x=Q_0 \sin pt$ (см. § 96).

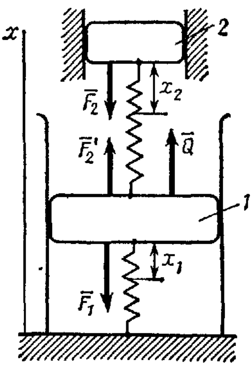

Рис. 283

Определить, при каких условиях можно погасить эти колебания, прикрепив к грузу 1 на пружине с коэффициентом жесткости c_2 груз 2 массой m_2 (рис. 283).

Решение. Будем определять положения грузов координатами x_1 и x_2, отсчитываемыми от положений статического равновесия грузов, направив ось x по вертикали вверх. Тогда силы тяжести уравновесятся силами упругости $F_{1\text{ст}}=c_1\lambda_{1\text{ст}}$ и $F_{2\text{ст}}=c_2\lambda_{2\text{ст}}$ и из уравнений движения исключатся (см. в § 94 задачу 112), а учитываемые при движении силы упругости будут пропорциональны удлинениям, которые получают пружины при смещениях грузов от положений статического равновесия. Эти удлинения будут соответственно равны $\lambda_1=x_1$ и $\lambda_2=x_2-x_1$ и на груз 2 будет действовать сила упругости $\overline{F}_2$ $(F_{2x}=-c_2\lambda_2)$, а на груз 1 — силы $\overline{F}_2'=-\overline{F}_2$, $\overline{F}_1$ $(F_{1x}=-c_1\lambda_1)$ и $\overline{Q}$. В результате получим следующие дифференциальные уравнения движения грузов:

$$m_1\ddot{x}_1=-c_1x_1+c_2(x_2-x_1)+Q_0 \sin pt, \quad m_2\ddot{x}_2=-c_2(x_2-x_1).$$

Чтобы колебания груза 1 гасились, должно быть $x_1=0$. Тогда

$$c_2x_2+Q_0 \sin pt=0 \quad \text{и} \quad m_2\ddot{x}_2=-c_2x_2.$$

Из первого уравнения $x_2=-(Q_0/c_2)\sin pt$ и $\ddot{x}_2=p^2(Q_0/c_2)\sin pt$. В результате подстановка во второе уравнение после сокращений дает

$$m_2p^2=c_2.$$

Это и будет искомым условием гашения, в котором одной из величин m_2 или c_2 можно задаваться произвольно. Конечно, желательно, чтобы масса m_2 была меньше, но при малой m_2 и заданном p будет мало и c_2, а это приведет к нежелательному увеличению амплитуды Q_0/c_2 колебаний груза 2.

§ 107. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела) требуется знать закон движения ее центра масс. Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы (13) и сложим почленно их левые и правые части. Тогда получим

$$\sum m_k\overline{a}_k=\sum \overline{F}_k^e+\sum \overline{F}_k^i. \tag{14}$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы (1') для радиуса-вектора центра масс имеем

$$\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C.$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем

$$\Sigma m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2}$$

или

$$\Sigma m_k \bar{a}_k = M\bar{a}_C, \tag{15}$$

где $\bar{a}_C$ — ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы $\Sigma \bar{F}_k^i = 0$, получим окончательно из равенства (14), учтя (15),

$$M\bar{a}_C = \Sigma \bar{F}_k^e. \tag{16}$$

Уравнение (16) и выражает **теорему о движении центра масс системы**: *произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.* Сравнивая уравнение (16) с уравнением движения материальной точки [§ 74, формула (2)], придем к другому выражению теоремы: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.*

Проектируя обе части равенства (16) на координатные оси, получим:

$$M\ddot{x}_C = \Sigma F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \Sigma F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_C = \Sigma F_{kz}^e. \tag{16'}$$

Эти уравнения представляют собой *дифференциальные уравнения движения центра масс* в проекциях на оси декартовой системы координат.

Значение доказанной теоремы состоит в следующем.

1. Теорема дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений (16') видно, что *решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела*, т. е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким образом, *поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела.* В остальных случаях тело можно рассматривать как материальную точку лишь тогда, когда практически для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс и допустимо по условиям решаемой задачи не принимать во внимание вращательную часть движения тела.

2. Теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы. В этом состоит ее практическая ценность.