§ 114.* ТЕЛО ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ. ДВИЖЕНИЕ РАКЕТЫ

В классической механике масса каждой точки или частицы системы считается при движении величиной постоянной. Однако в некоторых случаях состав частиц, образующих данную систему или тело, может с течением времени изменяться (отдельные частицы могут отделяться от тела или присоединяться к нему извне); вследствие этого будет изменяться и суммарная масса рассматриваемого тела. Задачи, в которых имеет место подобное присоединение или отделение единичных масс, нам уже встречались (см. выше задачи 126, 127 или задачу 86 в § 78). В этом параграфе будет рассмотрен другой практически важный случай, когда процесс отделения от тела или присоединения к нему частиц происходит непрерывно. Тело, масса M которого непрерывно изменяется с течением времени вследствие присоединения к нему или отделения от него материальных частиц, будем называть *телом переменной массы*. Для тела переменной массы

$$M = F(t),$$

где $F(t)$ — непрерывная функция времени.

Когда такое тело движется поступательно (или когда вращательная часть его движения не учитывается), это тело можно рассматривать как *точку переменной массы*.

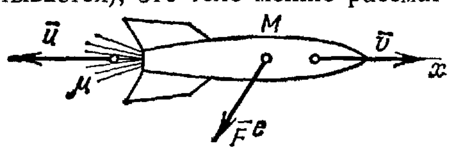

Рис. 294

Движение ракеты. Найдем уравнение движения тела, масса которого со временем непрерывно *убывает*, на практически важном примере движения ракеты, считая ее точкой переменной массы. Обозначим *относительную* (по отношению к корпусу ракеты) *скорость истечения продуктов горения* из ракеты через $\bar{u}$. Чтобы исключить силы давления, выталкивающие продукты горения, сделав эти силы внутренними, рассмотрим в некоторый момент времени t систему, состоящую из самой ракеты и частицы, отделяющейся от нее в течение промежутка времени dt (рис. 294). Масса μ этой частицы численно равна величине dM, на которую за время dt изменяется масса ракеты. Так как M — величина убывающая, то $dM<0$, и, следовательно, $\mu=|dM|=-dM$.

Уравнение (20) для рассматриваемой системы можно представить в виде

$$d\bar{Q} = \bar{F}^e\, dt, \tag{24}$$

где $\bar{F}^e$ — геометрическая сумма приложенных к ракете внешних сил.

Если скорость $\bar{v}$ ракеты за время dt изменяется на величину $d\bar{v}$, то количество движения рассматриваемой системы получает при этом приращение $M d\bar{v}$. У частицы в момент t количество движения равно $\mu\bar{v}$ (она еще является частью тела), а в момент $t+dt$ оно будет

$\mu(\bar{v}+\bar{u})$, так как частица получает дополнительную скорость $\bar{u}$. Следовательно, за время dt количество движения частицы изменится на величину $\bar{u}\mu=-\bar{u}dM$ (поскольку $\mu=-dM$), а для всей системы получится $d\bar{Q}=Md\bar{v}-\bar{u}dM$. Подставляя это значение $d\bar{Q}$ в равенство (24) и деля обе его части на dt, найдем окончательно

$$M\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}^e+\bar{u}\frac{dM}{dt}. \tag{25}$$

Уравнение (25) представляет собой в векторной форме *дифференциальное уравнение движения точки переменной массы*, называемое *уравнением Мещерского*.

Учитывая, что последнее слагаемое в правой части (25) по размерности также является силой, и обозначая его через $\bar{\Phi}$, мы можем уравнение (25) представить еще в виде

$$M\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}^e+\bar{\Phi}. \tag{26}$$

Таким образом, реактивный эффект сводится к тому, что на ракету при ее движении дополнительно действует сила $\bar{\Phi}$, называемая *реактивной силой.*

Величина dM/dt численно равна массе топлива, расходуемого за единицу времени, т. е. секундному расходу массы топлива G_C.

Таким образом, если учесть знак, то

$$\frac{dM}{dt}=-G_c.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{\Phi}=-\bar{u}G_c, \tag{27}$$

т. е. *реактивная сила равна произведению секундного расхода массы топлива на относительную скорость истечения продуктов его сгорания и направлена противоположно этой скорости.*

Формула Циолковского. Найдем, как происходит движение ракеты под действием только одной реактивной силы, считая $F^e=0$, а относительную скорость истечения $\bar{u}$ постоянной. Направим координатную ось x в сторону движения (см. рис. 294). Тогда $v_x=v$, $u_x=-u$ и уравнение (25) в проекции на ось x, если в нем положить $\bar{F}^e=0$, примет вид

$$M\frac{dv}{dt}=-u\frac{dM}{dt} \text{ или } dv=-u\frac{dM}{M}.$$

Интегрируя это уравнение и считая, что в начальный момент масса $M=M_0$, а скорость $\bar{v}=\bar{v}_0$ и направлена вдоль оси Ox, получим

$$v=v_0+u\ln(M_0/M). \tag{28}$$

Обозначим массу корпуса ракеты со всем оборудованием через $M_к$, а всю массу топлива через $M_т$. Тогда, очевидно, $M_0=M_к+M_т$, а масса ракеты, когда все топливо будет израсходовано, будет равна $M_к$. Подставляя эти значения в равенство (28), получим *формулу Циолковского*, определяющую скорость ракеты, когда все ее топливо будет израсходовано (скорость в конце так называемого *активного участка*):

$$v=v_0+u\ln(1+M_т/M_к). \tag{29}$$

Строго этот результат справедлив в безвоздушном пространстве и вне поля сил. Из формулы (29) видно, что предельная скорость ракеты зависит: 1) от ее начальной скорости v_0; 2) от относительной скорости истечения (вылета) продуктов горения u; 3) от относительного запаса топлива $M_т/M_к$ (число Циолковского). Очень интересен тот факт, что от режима работы ракетного двигателя, т. е. от того, насколько быстро или медленно сжигается все топливо, скорость ракеты в конце периода горения не зависит.

Важное практическое значение формулы Циолковского состоит в том, что она указывает возможные пути получения больших скоростей, необходимых для космических полетов. Этими путями являются увеличение $M_т/M_к$, u и v_0, причем путь увеличения u и v_0 более эффективен. Увеличение u и $M_т/M_к$ связано с видом топлива и конструкцией ракеты. Применяемые жидкие топлива позволяют получить $u = 3000 \div 4500$ м/с. Но значения $M_т/M_к$ у одноступенчатых ракет таковы, что они не дают скоростей, необходимых для космических полетов (см. § 98). Получить необходимую скорость можно путем использования составной (многоступенчатой) ракеты, части (ступени) которой по мере израсходования содержащегося в них топлива автоматически отделяются от последней ступени, получающей в результате дополнительную (начальную) скорость.

Подобная многоступенчатая ракета была применена для запуска первых в мире советских искусственных спутников Земли (4 октября и 3 ноября 1957 г.), а также при многочисленных пусках других космических объектов, в том числе кораблей, на которых совершают свои полеты космонавты.