§ 126. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ И СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ

Задачи, рассмотренные в предыдущих параграфах (и в § 89), удалось решить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии по той причине, что во всех случаях работу действующих сил можно было подсчитать, не зная заранее закона происходящего движения. Важно установить, каков вообще класс сил, обладающих этим свойством.

Работа на перемещении M_1M_2 силы $\bar{F}$, приложенной к телу в точке M, вычисляется по формуле (44') из § 87:

$$A_{(M_1M_2)} = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} dA = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz). \tag{54}$$

Как уже было отмечено в § 89, вычислить стоящий справа интеграл, не зная закона происходящего движения (т. е. зависимостей x, y, z от времени t), можно лишь в случаях, когда сила постоянна или зависит только от положения точки, т. е. от ее координат x, y, z. Такие силы образуют силовое поле (см. § 32). Так как сила определяется ее проекциями на координатные оси, то силовое поле задается уравнениями:

$$F_x=\Phi_1(x, y, z),\quad F_y=\Phi_2(x, y, z),\quad F_z=\Phi_3(x, y, z). \tag{55}$$

Но в общем случае и для вычисления работы таких сил надо в формуле (54) перейти под знаком интеграла к одному переменному, т. е. например, знать зависимости $y=f_1(x)$ и $z=f_2(x)$. Эти равенства, как известно, определяют в пространстве уравнение кривой, являющейся траекторией точки M. Следовательно, в общем случае, работа сил, образующих силовое поле, зависит от вида траектории точки приложения силы.

Однако если окажется, что выражение, стоящее в формуле (54) под знаком интеграла и представляющее собой элементарную работу силы $\bar{F}$, будет полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$, т. е.

$$dA=dU(x, y, z) \text{ или } F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=dU(x, y, z), \tag{56}$$

то работу $A_{(M_1M_2)}$ можно вычислить, не зная заранее траекторию точки M.

Функция U от координат x, y, z, дифференциал которой равен элементарной работе, называется *силовой функцией*. Силовое поле, для которого существует силовая функция, называется *потенциальным силовым полем*, а силы, действующие в этом поле,— *потенциальными силами*. В дальнейшем силовую функцию считаем однозначной функцией координат.

Если в формулу (54) подставить выражение dA из равенства (56), то получим

$$A_{(M_1M_2)} = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} dU(x, y, z) = U_2 - U_1, \tag{57}$$

где $U_1=U(x_1, y_1, z_1)$ и $U_2=U(x_2, y_2, z_2)$ — значения силовой функции в точках M_1 и M_2 поля соответственно. Следовательно, *работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и от вида траектории движущейся точки не зависит.* При перемещении по замкнутой траектории $U_2=U_1$ и работа потенциальной силы равна нулю.

Основным свойством потенциального силового поля и является то, что работа сил поля при движении в нем материальной точки зависит только от начального и конечного положений этой точки и ни от вида ее траектории, ни от закона движения не зависит.

Силы, работа которых зависит от вида траектории или от закона движения точки приложения силы, называются *непотенциальными*. К таким силам относятся силы трения и сопротивления среды.

Если установлено, что соотношение (56) имеет место, то силовая функция находится из равенства

$$U=\int \mathrm{d}A+C \quad \text{или} \quad U=\int (F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z)+C. \tag{58}$$

Постоянная C здесь может иметь любое значение (как видно из формулы (57), работа от C не зависит). Однако обычно условливаются считать в некоторой точке O, называемой «нулевой точкой», величину $U_O=0$ и определяют C исходя из этого условия.

Известными нам примерами потенциальных сил являются силы тяжести, упругости и тяготения (см. § 88). Покажем, что для полей этих сил действительно существуют силовые функции, и найдем их выражения. Поскольку под знаком интегралов, из которых в § 88 были получены формулы (47), (48) и (50), стоят элементарные работы соответствующих сил, то придем к следующим результатам, используя равенство (58):

1) для поля силы тяжести, если ось z направлена вертикально вверх, $\mathrm{d}A=-P\,\mathrm{d}z$, откуда, считая $U=0$ при $z=0$ (нулевая точка в начале координат), находим

$$U=-Pz; \tag{59}$$

2) для поля силы упругости, действующей вдоль оси Ox *, $\mathrm{d}A=-cx\,\mathrm{d}x$, откуда, считая $U=0$ при $x=0$, находим

$$U=-cx^2/2; \tag{59$'$}$$

3) для поля силы тяготения $\mathrm{d}A=mgR^2\,\mathrm{d}(1/r)$, откуда, считая $U=0$ при $r=\infty$ (нулевая точка в бесконечности), находим

$$U=mgR^2/r, \tag{59$''$}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Пользуясь найденными значениями функций U, можно по формуле (57) получить те же выражения для работ соответствующих сил, которые даются равенствами (47), (48) и (50) в § 88.

---

* Такое поле можно назвать линейным; в нем областью, в которой задано силовое поле, является прямая линия.

Покажем, что, зная силовую функцию, можно определить силу, действующую в любой точке поля. Из равенства (56), вычисляя дифференциал от функции $U(x, y, z)$, получим

$$F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy+\frac{\partial U}{\partial z}\,dz.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при dx, dy, dz в обеих частях равенства, придем к такому результату:

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{60}$$

Следовательно, *в потенциальном силовом поле проекции силы на координатные оси равны частным производным от силовой функции по соответствующим координатам.* Вектор $\overline{F}$, проекции которого определяются равенствами вида (60), называют *градиентом* скалярной функции $U(x, y, z)$. Таким образом, $\overline{F}=\operatorname{grad} U$.

Из равенств (60) находим

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что если для данного поля существует силовая функция, то проекции силы удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x},\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y},\quad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z}. \tag{61}$$

Можно доказать справедливость и обратного вывода, т. е. что если равенства (61) имеют место, то для поля существует силовая функция U. Следовательно, условия (61) являются *необходимыми и достаточными условиями того, что силовое поле является потенциальным.*

Таким образом, если силовое поле задано уравнениями (55), то по условиям (61) можно установить, является оно потенциальным или нет. Если поле потенциально, то уравнение (58) определяет его силовую функцию, а формула (57) — работу сил поля. Наоборот, если силовая функция известна, то по формулам (60) можно найти, какое силовое поле этой функцией определяется.

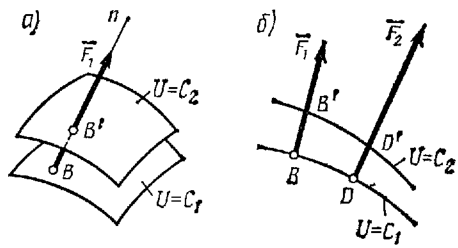

Рис. 319

Полагая $U(x, y, z)=C$, где C — некоторая постоянная, получим в пространстве уравнение поверхности, во всех точках которой функция U имеет одно и то же значение C. Такие поверхности называют *поверхностями уровня* или *поверхностями равного потенциала.* Если, как мы считаем, силовая функция является однозначной функцией координат, то поверхности уровня не могут пересекаться и через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. При любом перемещении M_1M_2 вдоль поверхности уровня $U_1=U_2=C$, и работа сил поля, как следует из уравнения (57), будет равна нулю. Поскольку сила при этом не равна нулю, то отсюда заключаем, что *в любой точке потенциального силового поля сила направлена по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.*

На рис. 319, *а* показаны две поверхности уровня $U(x, y, z)=C_1$, $U(x, y, z)=C_2$, а на рис. 319, *б* — их сечение плоскостью, проходящей через нормаль Bn. Если сила направлена в сторону, показанную на рисунке, то ее работа на перемещении BB' будет положительна. Но по формуле (57) эта работа равна C_2-C_1. Следовательно, $C_2>C_1$, т. е. *сила в потенциальном поле направлена в сторону возрастания силовой функции.* Далее, работы силы $\overline{F}_1$ на перемещении BB' и силы $\overline{F}_2$ на перемещении DD' одинаковы, так как равны C_2-C_1. Но поскольку

$DD'<BB'$, то должно быть $F_2>F_1$. Следовательно, *численно сила в потенциальном поле больше там, где поверхности уровня проходят гуще.* Отмеченные свойства позволяют наглядно представить картину распределения сил в потенциальном силовом поле с помощью поверхностей уровня. Кроме того, как видно из равенства (57), работа потенциальной силы зависит в конечном счете только от того, с какой поверхности уровня и на какую происходит перемещение точки.

Поясним сказанное примерами.

1. Для однородного поля сил тяжести (см. рис. 231), как видно из формулы (59), $U=\text{const}$, когда $z=\text{const}$. Следовательно, поверхностями уровня являются горизонтальные плоскости. Сила тяжести $\bar{P}$ направлена по нормали к этим плоскостям в сторону возрастания U и во всех точках поля постоянна.

2. Для поля сил тяготения, согласно формуле (59''), $U=\text{const}$, когда $r=\text{const}$. Следовательно, поверхностями уровня являются концентрические сферы, центр которых совпадает с притягивающим центром. Сила в каждой точке поля направлена по нормали к соответствующей сфере в сторону возрастания U (убывания r), т. е. к центру сферы.

Если в потенциальном силовом поле находится **система материальных точек**, то силовой функцией будет такая функция координат точек системы $U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$, для которой

$$dU=\Sigma dA_k, \tag{62}$$

т. е. дифференциал которой равен сумме элементарных работ всех действующих на систему сил поля.

§ 127. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Для потенциального силового поля можно ввести понятие о потенциальной энергии как о величине, характеризующей «запас работы», которым обладает материальная точка в данном пункте силового поля. Чтобы сравнивать между собой эти «запасы работы», нужно условиться о выборе нулевой точки O, в которой будем условно считать «запас работы» равным нулю (выбор нулевой точки, как и всякого начала отсчета, производится произвольно). *Потенциальной энергией материальной точки в данном положении M называется скалярная величина* Π, *равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из положения M в нулевое*

$$\Pi=A_{(MO)}.$$

Из определения следует, что потенциальная энергия Π зависит от координат x, y, z точки M, т. е. что $\Pi=\Pi(x, y, z)$.

Будем в дальнейшем считать нулевые точки для функций $\Pi(x, y, z)$ и $U(x, y, z)$ совпадающими. Тогда $U_O=0$ и по формуле (57) $A_{MO}=U_O-U=-U$, где U — значение силовой функции в точке M поля. Таким образом,

$$\Pi(x, y, z)=-U(x, y, z),$$

т. е. *потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком.*