ные условия равновесия механической системы будут изложены в § 139 и 144.

2. Докажем, что условия (40′) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями равновесия для сил, действующих на абсолютно твердое тело. Пусть на свободное твердое тело, находящееся в покое, начинает действовать система сил, удовлетворяющая условиям (40′), где O любая точка, т. е., в частности, и точка C. Тогда уравнения (40) дают $\bar{v}_C=\text{const}$ и $\bar{K}_C=\text{const}$, а так как тело вначале было в покое, то $\bar{v}_C=0$ и $\bar{K}_C=0$. При $\bar{v}_C=0$ точка C неподвижна и тело может иметь только вращение с угловой скоростью ω вокруг некоторой мгновенной оси Cl (см. § 60). Тогда по формуле (33) у тела будет $K_l=J_l\omega$. Но K_l есть проекция вектора $\bar{K}_C$ на ось Cl, а так как $\bar{K}_C=0$, то и $K_l=0$, откуда следует, что и $\omega=0$, т. е. что при выполнении условий (40′) тело остается в покое.

3. Из предыдущих результатов вытекают, в частности, исходные положения 1 и 2, сформулированные в § 2, так как очевидно, что две силы, изображенные на рис. 2, удовлетворяют условиям (40′) и являются уравновешенными и что если к действующим на тело силам прибавить (или от них отнять) уравновешенную систему сил, т. е. удовлетворяющую условиям (40′), то ни эти условия, ни уравнения (40), определяющие движение тела, не изменятся.

Глава XXV

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

§ 121. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T, равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T=\sum m_k v_k^2/2. \tag{41}$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного, и вращательного движений системы. Главное отличие величины T от введенных ранее характеристик $\bar{Q}$ и $\bar{K}_O$ состоит в том, что кинетическая энергия является величиной скалярной и притом существенно положительной. Поэтому она не зависит от направлений движения частей системы и не характеризует изменений этих направлений.

Отметим еще следующее важное обстоятельство. Внутренние силы действуют на части системы по взаимно противоположным направлениям. По этой причине они, как мы видели, не изменяют векторных характеристик $\bar{Q}$ и $\bar{K}_O$. Но если под действием внутренних сил будут изменяться модули скоростей точек системы, то при этом будет изменяться и величина T. Следовательно, кинетическая энергия системы отличается от величин $\bar{Q}$ и $\bar{K}_O$ еще и тем, что на ее изменение влияет действие и внешних, и внутренних сил.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий этих тел.

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела в разных случаях движения.

1. Поступательное движение. В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс. Следовательно, для любой точки $v_k=v_C$ и формула (41) дает

$$T_{\text{пост}}=\Sigma m_k v_C^2/2=(\Sigma m_k)\, v_C^2/2$$

или

$$T_{\text{пост}}=Mv_C^2/2. \qquad (42)$$

Таким образом, *кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.*

2. Вращательное движение. Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси Oz (см. рис. 295), то скорость любой его точки $v_k=\omega h_k$, где h_k — расстояние точки от оси вращения, а ω — угловая скорость тела. Подставляя это значение в формулу (41) и вынося общие множители за скобки, получим

$$T_{\text{вр}}=\Sigma m_k\omega^2 h_k^2/2=(\Sigma m_k h_k^2)\,\omega^2/2.$$

Величина, стоящая в скобках, представляет собой момент инерции тела относительно оси z. Таким образом, окончательно найдем

$$T_{\text{вр}}=J_z\omega^2/2, \qquad (43)$$

т. е. *кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.*

3. Плоскопараллельное движение*. При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис. 303). Следовательно, по формуле (43)

$$T_{\text{плоск}}=J_P\omega^2/2, \qquad (43')$$

где J_P — момент инерции тела относительно названной выше оси; ω — угловая скорость тела.

Величина J_P в формуле (43′) будет переменной, так как положение центра P при движении тела все время меняется. Введем вместо J_P постоянный момент инерции J_C относительно оси, проходящей через центр масс C тела. По теореме Гюйгенса (см. § 103) $J_P=J_C+$ $+Md^2$, где $d=PC$. Подставим это выражение для J_P в (43′). Учиты-

* Этот случай может быть получен как частный из рассмотренного в следующем пункте общего случая движения твердого тела.

вая, что точка P — мгновенный центр скоростей и, следовательно, $\omega d = \omega \cdot PC = v_C$, где v_C — скорость центра масс C, окончательно найдем

$$T_{\text{плоск}} = Mv_C^2/2 + J_C\omega^2/2. \qquad (44)$$

Следовательно, *при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.*

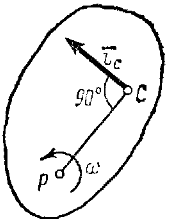

Рис. 303

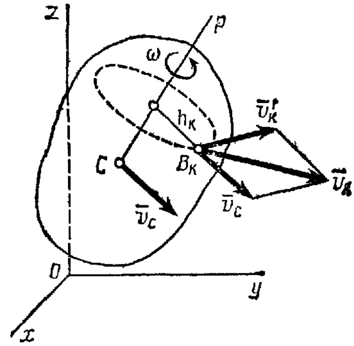

Рис. 304

4*. Общий случай движения. Если выбрать центр масс C тела в качестве полюса (рис. 304), то движение тела в общем случае будет слагаться из поступательного со скоростью $\bar{v}_C$ полюса и вращательного вокруг мгновенной оси CP, проходящей через этот полюс (см. § 63). При этом, как показано в § 63, скорость $\bar{v}_k$ любой точки тела B_k слагается из скорости $\bar{v}_C$ полюса и скорости, которую точка получает при вращении тела вокруг полюса (вокруг оси CP) и которую мы обозначим $\bar{v}'_k$, т. е. $\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}'_k$. При этом по модулю $v'_k = \omega h_k$, где h_k — расстояние точки B_k от оси CP, а ω — угловая скорость тела, которая (см. § 63) не зависит от выбора полюса. Тогда*

$$\bar{v}_k^2 = v_k^2 = (\bar{v}_C + \bar{v}'_k)^2 = v_C^2 + v_k'^2 + 2\bar{v}_C \cdot \bar{v}'_k.$$

Подставляя это значение v_k^2 в равенство (41) и учитывая, что $v'_k = \omega h_k$, найдем

$$T = (\Sigma m_k)\, v_C^2/2 + (\Sigma m_k h_k^2)\, \omega^2/2 + \bar{v}_C \Sigma m_k \bar{v}'_k,$$

где общие множители сразу вынесены за скобки.

В полученном равенстве первая скобка дает массу M тела, а вторая равна моменту инерции J_{CP} тела относительно мгновенной

---

* Из определения скалярного произведения двух векторов следует, что $\bar{v}^2 = \bar{v} \cdot \bar{v} = vv \cos 0° = v^2$, т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля. Этот результат здесь использован; мы будем пользоваться им без оговорок и в дальнейшем.

оси CP. Величина же $\Sigma m_k \overline{v}_k' = 0$, так как она представляет собой количество движения, получаемое телом при его вращении вокруг оси CP, проходящей через центр масс тела (см. § 110).

В результате окончательно получим

$$T = Mv_C^2/2 + J_{CP}\omega^2/2. \qquad (45)$$

Таким образом, *кинетическая энергия тела в общем случае движения* (в частности, и при плоскопараллельном движении) *равна кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.*

Если за полюс взять не центр масс C, а какую-нибудь другую точку A тела и мгновенная ось AP при этом не будет все время проходить через центр масс, то для этой оси $\Sigma m_k \overline{v}_k' \neq 0$ и формулы вида (45) мы не получим.

Рассмотрим примеры.

Задача 136. Вычислить кинетическую энергию катящегося без скольжения сплошного цилиндрического колеса массой M, если скорость его центра равна v_C (см. рис. 308, *а*).

Решение. Колесо совершает плоскопараллельное движение. По формуле (44) или (45)

$$T = Mv_C^2/2 + J_C\omega^2/2.$$

Считаем колесо сплошным однородным цилиндром; тогда (см. § 102) $J_C = MR^2/2$, где R — радиус колеса. С другой стороны, так как точка B является для колеса мгновенным центром скоростей, то $v_C = \omega \cdot BC = \omega R$, откуда $\omega = v_C/R$. Подставляя все эти значения, найдем

$$T = Mv_C^2/2 + MR^2 v_C^2/4R^2 = (3/4)\, Mv_C^2.$$

Задача 137. В детали A, движущейся поступательно со скоростью $\overline{u}$, имеются направляющие, по которым со скоростью $\overline{v}$ перемещается тело B массой m. Зная угол α (рис. 305), определить кинетическую энергию тела B.

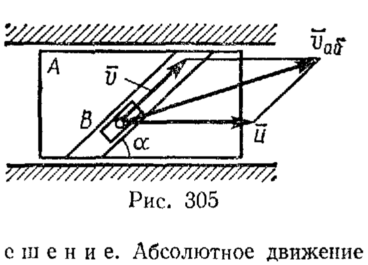

Рис. 305

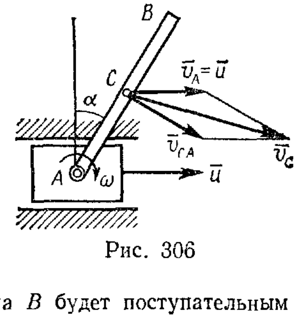

Рис. 306

Решение. Абсолютное движение тела B будет поступательным со скоростью $\overline{v}_{аб} = \overline{v} + \overline{u}$ (см. § 68). Тогда

$$T = mv_{аб}^2/2 = m\,(v^2 + u^2 + 2vu\cos\alpha)/2.$$

Заметим, что *если тело совершает сложное движение, то его полная кинетическая энергия не равна в общем случае сумме кинетических энергий относительного и переносного движений.* Так, в данном примере

$$T_{от} + T_{пер} = mv^2/2 + mu^2/2 \neq T.$$

Задача 138. Часть механизма состоит из движущейся поступательно со скоростью $\bar{u}$ детали (рис. 306) и прикрепленного к ней на оси A стержня AB длиной l и массой M. Стержень вращается вокруг оси A (в направлении, указанном дуговой стрелкой) с угловой скоростью ω. Определить кинетическую энергию стержня при данном угле α.

Решение. Стержень совершает сложное (плоскопараллельное) движение. По формуле (44) или (45) $T = Mv_C^2/2 + J_C\omega^2/2$.

Скорость точки C слагается из скорости $\bar{v}_A = \bar{u}$ и скорости $\bar{v}_{CA}$ (или $\bar{v}_{\text{от}}$), модуль которой $v_{CA} = \omega l/2$. Следовательно (рис. 306), $v_C^2 = u^2 + v_{CA}^2 + 2uv_{CA}\cos\alpha$. Угловая скорость вращения стержня вокруг центра C такая же, как и вокруг конца A, так как ω не зависит от выбора полюса. Кроме того, в задаче 119 (см. § 103) было показано, что $J_C = Ml^2/12$.

Подставляя все эти данные, получим

$$T = M(u^2 + \omega^2 l^2/4 + u\omega l\cos\alpha)/2 + Ml^2\omega^2/24 = Mu^2/2 + Ml^2\omega^2/6 + (Ml\omega u\cos\alpha)/2.$$

Заметим, что в данном случае нельзя считать

$$T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}} = Mu^2/2 + J_A\omega^2/2 = Mu^2/2 + Ml^2\omega^2/6.$$

Результат этот неверен, так как по доказанной теореме формула $T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}}$ справедлива только тогда, когда ось вращения проходит через центр масс тела, а ось A через центр масс не проходит.

§ 122. НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАБОТЫ

Работа сил вычисляется по формулам, полученным в § 87 и 88. Рассмотрим дополнительно следующие случаи.

1. Работа сил тяжести, действующих на систему. Работа силы тяжести, действующей на частицу весом p_k, будет равна $p_k(z_{k0} - z_{k1})$, где z_{k0} и z_{k1} — координаты, определяющие начальное и конечное положения частицы (см. § 88). Тогда, учтя, что $\Sigma p_k z_k = Pz_C$ (см. § 32), найдем для суммы работ всех сил тяжести, действующих на систему, значение

$$A = \Sigma p_k z_{k0} - \Sigma p_k z_{k1} = P(z_{C_0} - z_{C_1}).$$

Этот результат можно еще представить в виде

$$A = \pm Ph_C,$$

где P — вес системы, h_C — вертикальное перемещение центра масс (или центра тяжести). Следовательно, работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их главного вектора (в случае твердого тела — равнодействующей) $\bar{P}$ на перемещении центра масс системы (или центра тяжести тела).

2. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу. Элементарная работа приложенной к телу силы $\bar{F}$ (рис. 307) будет равна (см. § 87)

$$dA = F_\tau\, ds = F_\tau h\, d\varphi,$$

так как $ds = h\,d\varphi$, где $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела.

Но, как легко видеть *, $F_\tau h = m_z(\bar{F})$. Будем называть величину

* Если разложить $\bar{F}$ по направлениям $B\tau$, BC и Bz' (см. рис. 307), то $m_z(\bar{F}) = m_z(\bar{F}_\tau)$, так как моменты двух других составляющих равны нулю.