§ 150. МАЛЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Колебания системы с несколькими степенями свободы, имеющие важные практические приложения, отличаются от колебаний системы с одной степенью свободы рядом существенных особенностей. Чтобы дать представление об этих особенностях, рассмотрим случай свободных колебаний системы с двумя степенями свободы.

Пусть положение системы определяется обобщенными координатами q_1, q_2 и при $q_1=q_2=0$ система находится в устойчивом равновесии. Тогда кинетическую и потенциальную энергии системы с точностью до квадратов малых величин можно найти так же, как были найдены равенства (132), (133), и представить в виде:

$$T=\frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{22}\dot{q}_2^2\right); \tag{143}$$

$$\Pi=\Pi_0+\frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2+2c_{12}q_1q_2+c_{22}q_2^2\right), \tag{144}$$

где инерционные коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} и квазиупругие коэффициенты c_{11}, c_{12}, c_{22} — величины постоянные. Если воспользоваться двумя уравнениями Лагранжа вида (131) и подставить в них эти значения T и Π, то получим следующие дифференциальные уравнения малых колебаний системы с двумя степенями свободы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2&=0,\\ a_{12}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+c_{12}q_1+c_{22}q_2&=0. \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

Будем искать решение уравнений (145) в виде:

$$q_1=A\sin(kt+\alpha),\quad q_2=B\sin(kt+\alpha), \tag{146}$$

где A, B, k, α — постоянные величины. Подставив эти значения q_1, q_2 в уравнения (145) и сократив на $\sin(kt+\alpha)$, получим

$$\left.\begin{aligned} (c_{11}-a_{11}k^2)A+(c_{12}-a_{12}k^2)B&=0,\\ (c_{12}-a_{12}k^2)A+(c_{22}-a_{22}k^2)B&=0. \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Чтобы уравнения (147) давали для A и B решения, отличные от нуля, определитель этой системы должен быть равен нулю или, иначе, коэффициенты при A и B в уравнениях должны быть пропорциональны, т. е.

$$-\frac{c_{11}-a_{11}k^2}{c_{12}-a_{12}k^2}=-\frac{c_{12}-a_{12}k^2}{c_{22}-a_{22}k^2}=\frac{B}{A}=n. \tag{148}$$

Отсюда для определения k^2 получаем следующее уравнение, называемое *уравнением частот*:

$$(c_{11}-a_{11}k^2)(c_{22}-a_{22}k^2)-(c_{12}-a_{12}k^2)^2=0. \tag{149}$$

Корни k_1^2 и k_2^2 этого уравнения вещественны и положительны; это доказывается математически, но может быть обосновано и тем, что иначе $k_1=\sqrt{k_1^2}$ и $k_2=\sqrt{k_2^2}$ не будут вещественны и уравнения (145) не будут иметь решений вида (146), чего для системы, находящейся в устойчивом равновесии, быть не может (после возмущений она должна двигаться вблизи положения $q_1=q_2=0$).

Определив из (149) k_1 и k_2, найдем две совокупности частных решений вида (146). Если учесть, что согласно (148) $B=nA$, эти решения будут:

$$q_1^{(1)}=A_1 \sin (k_1 t+\alpha_1), \quad q_2^{(1)}=n_1 A_1 \sin (k_1 t+\alpha_1); \tag{150}$$

$$q_1^{(2)}=A_2 \sin (k_2 t+\alpha_2), \quad q_2^{(2)}=n_2 A_2 \sin (k_2 t+\alpha_2), \tag{151}$$

где n_1 и n_2 — значения, которые n получает из (148) при $k=k_1$, и $k=k_2$ соответственно.

Колебания, определяемые уравнениями (150) и (151), называются *главными колебаниями*, а их частоты k_1 и k_2 — *собственными частотами системы*. При этом, колебание с частотой k_1 (всегда *меньшей*) называют *первым главным колебанием*, а с частотой k_2 — *вторым главным колебанием*. Числа n_1 и n_2, определяющие отношения амплитуд (или самих координат, т. е. q_2/q_1) в каждом из этих колебаний, называют *коэффициентами формы*.

Так как уравнения (145) являются линейными, то суммы частных решений (150) и (151) тоже будут решениями этих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} q_1&=A_1 \sin (k_1 t+\alpha_1)+A_2 \sin (k_2 t+\alpha_2), \\ q_2&=n_1 A_1 \sin (k_1 t+\alpha_1)+n_2 A_2 \sin (k_2 t+\alpha_2). \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

Равенства (152), содержащие четыре произвольных постоянных A_1, A_2, α_1, α_2, определяемых по начальным условиям, дают *общее решение* уравнений (145) и определяют *закон малых колебаний системы*. Эти колебания слагаются из двух главных колебаний с частотами k_1 и k_2 и не являются гармоническими. В частных случаях, при соответствующих начальных условиях, система может совершать одно из главных колебаний (например, первое, если $A_2=0$) и колебание будет гармоническим.

Собственные частоты k_1, k_2 и коэффициенты формы n_1, n_2 не зависят от начальных условий и являются основными характеристиками малых колебаний системы; решение конкретных задач обычно сводится к определению этих характеристик.

Сопоставляя результаты этого и предыдущего параграфов, можно получить представление о том, к чему сведется исследование затухающих и вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы. Мы этого рассматривать не будем, отметим лишь, что при вынужденных колебаниях резонанс у такой системы может возникать дважды: при $p\approx k_1$ и при $p\approx k_2$ (p — частота возмущающей силы). Наконец, отметим, что колебания системы с s степенями свободы будут слагаться из s колебаний с частотами $k_1, k_2, \ldots, k_s$, которые должны определяться из уравнения степени s относительно k^2. Это связано со *значительными математическими* трудностями, преодолеть которые можно с помощью электронных вычислительных (или аналоговых) машин.

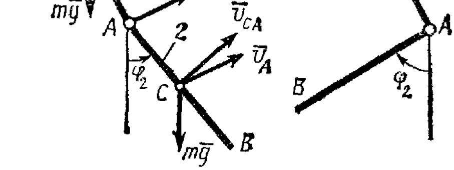

Рис. 374

Задача 185. Определить собственные частоты и коэффициенты формы малых колебаний двойного физического маятника, образованного стержнями *1* и *2* одинаковой массы m и длины l (рис. 374, *а*).

Решение. Выберем в качестве обобщенных координат малые углы φ_1 и φ_2. Тогда $T=0{,}5\,(J_{1O}\dot{\varphi}_1^2+mv_C^2+J_{2C}\,\dot{\varphi}_2^2)$, где $J_{1O}=ml^2/3$, $J_{2C}=ml^2/12$ и, при требуемой точности подсчетов, $v_C=v_A+v_{CA}=l\dot{\varphi}_1+l\dot{\varphi}_2/2$. В итоге

$$T=0{,}5ml^2\,(4\dot{\varphi}_1^2/3+\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2+\dot{\varphi}_2^2/3). \tag{а}$$

Далее $\Pi=-0{,}5mgl\cos\varphi_1-mgl(\cos\varphi_1+0{,}5\cos\varphi_2)$ или, полагая $\cos\varphi=1-\varphi^2/2$,

$$\Pi=\Pi_0+0{,}5mgl\,(3\varphi_1^2/2+\varphi_2^2/2). \tag{б}$$

Из равенств (а) и (б) видно, каковы здесь значения a_{11}, a_{12}, a_{22}, c_{11} и c_{22} ($c_{12}=0$). При этих значениях коэффициентов уравнение частот (149) примет вид

$$k^4-6\frac{g}{l}k^2+\frac{27}{7}\left(\frac{g}{l}\right)^2=0.$$

Его корнями будут: $k_{1,2}^2=3(1\pm 2/\sqrt{7})g/l$, откуда

$$k_1=0,86\sqrt{g/l}\quad k_2=2,30\sqrt{g/l}. \tag{в}$$

Подставляя теперь в любое из отношений, стоящих в левой части равенства (148), сначала k_1, а затем k_2, получим

$$n_1=1,43,\quad n_2=-2,10. \tag{г}$$

Таким образом, при первом главном колебании оба стержня будут в каждый момент времени отклонены от вертикали в одну и ту же сторону (рис. 374, *а*) и $\varphi_2/\varphi_1=1,43$, а при втором главном колебании — в разные стороны (рис. 374, *б*) и $|\varphi_2/\varphi_1|=2,10$.