дают $M_z=0$ и $M_{z_1}=0$, а из третьего уравнения, пренебрегая малой величиной, содержащей $\dot{\psi}^2$, находим

$$M_{OK}=J_z\Omega\omega\sin\theta.$$

Результат совпадает с тем, который дает элементарная теория гироскопа [см. § 131, формула (76)].

Глава XXX *

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

§ 147. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ

При определении условий равновесия механической системы возникает весьма важный вопрос о том, будет ли это равновесие практически реализуемым, т. е. устойчивым, или нет. Равновесие системы в данном положении называется *устойчивым*, если ее можно вывести из этого положения настолько малым возмущением (смещением, толчком), что во все последующее время отклонения системы от равновесного положения будут меньше любого сколь угодно малого заданного отклонения. В противном случае равновесие называют *неустойчивым*. Такое определение соответствует понятию об устойчивости равновесия и движения по А. М. Ляпунову. Исходя из него, можно, например, сразу установить, что равновесие маятника, изображенного на рис. 324, при $\varphi=0$ будет устойчивым, а при $\varphi=180°$ — неустойчивым.

Один общий критерий, устанавливающий достаточное условие устойчивости равновесия консервативной (см. § 127) системы, дает следующая теорема Лагранжа — Дирихле: *если потенциальная энергия консервативной системы имеет в положении равновесия строгий минимум, то равновесие системы в этом положении является устойчивым.*

В качестве доказательства ограничимся следующими рассуждениями. Для консервативной системы имеет место закон сохранения механической энергии, т. е. $T+\Pi=\text{const}$, где T — кинетическая, а Π — потенциальная энергия системы. Поэтому, если в положении равновесия $\Pi=\Pi_{\min}$, то когда система после малого возмущения придет в движение и будет удаляться от положения равновесия, значение Π должно возрастать и, следовательно, T будет убывать. Однако при возрастании Π не может стать больше некоторой величины $\Pi_1=\Pi_{\min}+\Delta\Pi$, которая получится, когда T обратится в нуль. Учтя это, можно начальные возмущения, а с ними и значение $\Delta\Pi$ сделать столь малыми, что когда у системы $\Pi=\Pi_{\min}+\Delta\Pi$ ее отклонение от равновесного положения будет меньше любого сколь угодно малого заданного. Отсюда и следует, что равновесное положение является устойчивым.

Даваемое теоремой условие устойчивости равновесия является лишь достаточным и не позволяет судить о том, что будет, если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума.

Рассмотрим отдельно случай равновесия консервативной системы, имеющей одну степень свободы. Пусть положение системы

определяется обобщенной координатой q, выбранной так, что при равновесии $q=0$. Согласно формулам (118′) из § 144 в положении равновесия $(\partial\Pi/\partial q)_0=0$. Кроме того, если $\Pi(q)$ имеет при $q=0$ минимум, то $(\partial^2\Pi/\partial q^2)_0>0$. Таким образом, при выполнении следующих условий (достаточных, но не необходимых):

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0>0 \tag{130}$$

равновесие системы в данном положении ($q=0$) будет устойчивым.

При решении задач, считая q малым, достаточно определять $\Pi(q)$ с точностью до q^2, так как члены с q^3 и выше в условия (130) не войдут (при $q=0$ обратятся в нули).

Задача 182. Определить, при каких условиях стержень AD (маятник), имеющий ось вращения в точке A, находится в устойчивом равновесии, когда он вертикален, если масса стержня равна m, а длина l (рис. 372, *а*). У прикрепленных к стержню в точке B ($AB=h$) горизонтальных пружин *1* и *2* коэффициенты жесткости равны c_1 и c_2, а начальные поджатия — λ_{10} и λ_{20} соответственно.

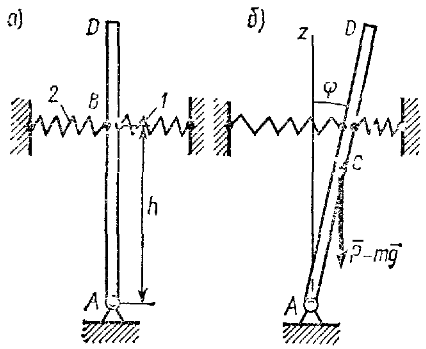

Рис. 372

Решение. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ отклонения стержня от вертикали, считая φ малым (рис. 372, *б*), и найдем значение $\Pi(\varphi)$ с точностью до φ^2. Согласно формулам (64) и (64′) из § 127 будет:

$$\Pi_1=Pz_C=(mgl/2)\cos\varphi,\quad \Pi_2=0{,}5[c_1(\lambda_{10}+h\varphi)^2+c_2(\lambda_{20}-h\varphi)^2].$$

При определении Π_2 учтено, что в виду малости φ перемещение точки B можно считать горизонтальным и равным $h\varphi$ и что при этом сжатие пружины *1* увеличится, а пружины *2* уменьшится на величину $h\varphi$. Далее, используя разложение $\cos\varphi$ в ряд и принимая $\cos\varphi=1-\varphi^2/2$, а также раскрывая скобки в выражении Π_2, получим

$$\Pi=\Pi_0-(mgl/4)\varphi^2+(c_1\lambda_{10}-c_2\lambda_{20})h\varphi+0{,}5(c_1+c_2)h^2\varphi^2,$$

где в $\Pi_0=\Pi(0)$ включены все постоянные величины (без выяснения, чему равно Π_0). Отсюда находим

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}=-(mgl/2)\varphi+(c_1\lambda_{10}-c_2\lambda_{20})h+(c_1+c_2)h^2\varphi.$$

Чтобы при $\varphi=0$ стержень был в равновесии, эта производная при $\varphi=0$ должна равняться нулю. Следовательно, должно быть

$$c_1\lambda_{10}=c_2\lambda_{20}, \tag{а}$$

что, конечно, можно было предвидеть заранее. Далее получим

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}=-mgl/2+(c_1+c_2)h^2. \tag{б}$$

Тогда по условиям (130) равновесие будет устойчивым, если

$$(c_1+c_2)>\frac{mgl}{2h^2}. \tag{в}$$

Совокупность условий (а) и (в) и дает решение задачи.

Другой пример исследования устойчивости равновесия см. в задаче 184.

§ 148. МАЛЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Допустим, что консервативная механическая система, состоящая из n материальных точек и имеющая одну степень свободы, находится в некотором положении в устойчивом равновесии. Исследуем, какое движение будет совершать эта система, если ее вывести из равновесия малым возмущением. Условимся опять определять положение системы обобщенной координатой q, выбранной так, что при равновесии $q=0$. Так как равновесие устойчиво, а возмущения малы, то координата q и обобщенная скорость $\dot{q}$ будут во все время движения тоже оставаться величинами малыми. Для составления дифференциального уравнения движения системы воспользуемся уравнением Лагранжа, которое, если выразить обобщенную силу Q через потенциальную энергию системы Π [(см. § 143, формулы (115)], примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial \Pi}{\partial q}=0. \qquad (131)$$

Вообще это уравнение будет нелинейным, но его можно линеаризировать и тем самым существенно упростить, сохранив в уравнении малые величины q и $\dot{q}$ только в первой степени (первого порядка малости; см. задачу 180 в § 146). Для этого значения $T(q, \dot{q})$ и $\Pi(q)$ достаточно определить тоже приближенно. При этом, так как в уравнение (131) входят первые производные от Π и T по q и $\dot{q}$, то, чтобы сохранить в нем q и $\dot{q}$ в первой степени, надо T и Π определить с точностью до малых величин второго порядка малости, т. е. с точностью до q^2 или $\dot{q}^2$.

Найдем сначала приближенное выражение $T(q, \dot{q})$. Для любой точки системы при стационарных связях

$$\bar{r}_k=\bar{r}_k(q) \quad \text{и} \quad \bar{v}_k=\frac{d\bar{r}_k}{dt}=\frac{d\bar{r}_k}{dq}\dot{q}.$$

Тогда, вынося общий множитель $\dot{q}^2$ за скобки, получим

$$T=\frac{1}{2}\Sigma m_k v_k^2=\frac{1}{2}\left[\Sigma m_k\left(\frac{d\bar{r}_k}{dq}\right)^2\right]\dot{q}^2 \quad \text{или} \quad T=\frac{1}{2}F(q)\dot{q}^2,$$

так как производные $d\bar{r}_k/dq$, как и сами $\bar{r}_k$, являются функциями только q. Разложив $F(q)$ в ряд Тейлора, получим

$$F(q)=F(0)+F'(0)q+\ldots$$

Так как T надо определить с точностью до q^2, то в этом разложении следует сохранить только первое постоянное слагаемое $F(0)$. Тогда для T получим выражение

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2, \quad \text{где} \quad a=F(0). \qquad (132)$$

Поскольку T величина существенно положительная, то постоянный коэффициент $a>0$; его называют *инерционным коэффициентом*. Размерность a зависит от размерности $\dot{q}$; в частности, a может иметь размерность массы или момента инерции.

Далее, разлагая $\Pi(q)$ в ряд Тейлора и учитывая, что в положении равновесия $(\partial\Pi/\partial q)_0=0$, найдем (с точностью до q^2)

$$\Pi(q)=\Pi(0)+\frac{1}{2}cq^2, \quad \text{где} \quad c=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0. \qquad (133)$$

При этом по условиям (130) $c>0$. В частном случае, если q — удлинение пружины, равенство (133) выражает потенциальную энергию поля сил упругости; поэтому коэффициент c называют *квазиупругим коэффициентом* (или *обобщенным коэффициентом жесткости*). Из равенств (132) и (133) находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=a\dot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q}=0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q}=cq.$$

Подставляя эти величины в уравнение (131), получим следующее дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы:

$$\ddot{q}+k^2q=0, \quad \text{где} \quad k^2=c/a. \qquad (134)$$

Это уравнение совпадает с известным уравнением свободных прямолинейных колебаний материальной точки (см. § 94) и его общее решение имеет вид

$$q=A\sin(kt+\alpha), \qquad (135)$$

где A и α — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям. Частота и период этих колебаний согласно (134) определяются равенствами:

$$k=\sqrt{c/a}, \quad \tau=2\pi/k=2\pi\sqrt{a/c}. \qquad (136)$$

Установим, как при этом движутся точки системы. Разлагая радиус-вектор $\bar{r}_k(q)$ одной из точек системы в ряд Тейлора, получим $\bar{r}_k(q)=\bar{r}_k(0)+\bar{r}_k'(0)q+\ldots$ Заменяя здесь q его значением (135), найдем, что с точностью до величин первого порядка малости

$$|\bar{r}_k(q)-\bar{r}_k(0)|=|\bar{r}_k'(0)|A\sin(kt+\alpha) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (137)$$

Таким образом, точки системы тоже совершают малые колебания с частотой k и амплитудами $|\bar{r}_k'(0)|A$. Из найденных результатов вытекают следующие свойства малых колебаний системы:

1) свободные (собственные) колебания системы являются колебаниями гармоническими; частота и период этих колебаний не зависят от начальных условий и определяются равенствами (136);

2) так как постоянные A и α зависят от начальных условий, то амплитуды колебаний точек системы, равные $A|\bar{r}_k'(0)|$, и начальная фаза α тоже зависят от начальных условий;

3) отношения амплитуд колебаний разных точек системы от начальных условий не зависят, так как определяются только значениями $\bar{r}_k'(0)$, т. е. конфигурацией системы;

4) все точки системы в каждый момент времени, как видно из равенств (137), находятся в одной и той же фазе $(kt+\alpha)$ и, следовательно, одновременно проходят через положения равновесия и одновременно достигают максимальных отклонений от этого положения.

При решении задач наибольший интерес представляет определение частоты k и периода τ собственных колебаний системы, что существенно, например, для установления условий наличия или отсутствия резонанса (см. § 149). При этом достаточно определить из равенств (132) и (133) коэффициенты a и c и воспользоваться формулами (136).

Задача 183. Определить частоту и период малых колебаний механической системы, рассмотренной в задаче 182 (см. § 147).

Решение. В задаче 182 кинетическая энергия системы (стержня AD, см. рис. 372) будет $T=0{,}5J_A\dot{\varphi}^2$. Следовательно, в этой задаче $F(q)=F(\varphi)=J_A=\text{const}$ и

$$a=J_A=ml^2/3. \qquad (а)$$

Далее, согласно формуле (133) и соотношениям (б) и (в), полученным в задаче 182,

$$c=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right)_0=(c_1+c_2)h^2-mgl/2 \quad (c>0). \qquad (б)$$

Следовательно, по формулам (136)

$$k=\sqrt{\frac{6(c_1+c_2)h^2-3mgl}{2ml^2}}, \quad \tau=\frac{2\pi}{k}.$$

Задача 184. Механическая система состоит из весомых стержней *1*, *2* и диска *3*, имеющих оси вращения в точках O_1, O_2, O_3 соответственно и связанных друг с другом невесомыми стержнями AB и DE (в точках A, B, D, E шарниры). В положении, показанном на рис. 373, система находится в равновесии; при этом стержень *1* вертикален (прикрепленная к его концу A горизонтальная пружина имеет удлинение $\lambda_{ст}$), а стержень *2* — горизонтален (прикрепленная к его концу D вертикальная пружина не деформирована). Длины стержней равны l_1 и l_2, массы — m_1 и m_2, масса диска — m_3, коэффициенты жесткости пружин — c_1 и c_2.

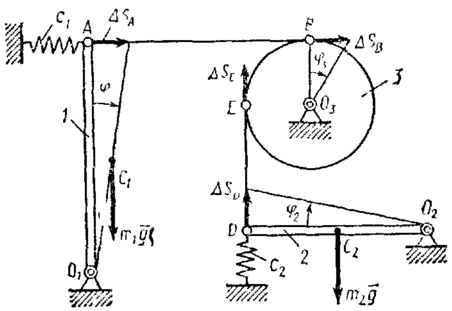

Рис. 373

Определить: 1) значение $\lambda_{ст}$; 2) условие устойчивости равновесия системы; 3) частоту и период ее собственных колебаний.

Решение. Выберем в качестве обобщенной координаты системы малый угол φ_1 отклонения стержня *1* от равновесного положения. При таком отклонении, очевидно, $\Delta s_A=\Delta s_B=\Delta s_E=\Delta s_D$. Следовательно, $l_2\varphi_2=l_1\varphi_1$ и $r_3\varphi_3=l_1\varphi_1$, где r_3 — радиус диска. Кроме того, удлинение горизонтальной пружины $\lambda_1=\lambda_{ст}+\Delta s_A=\lambda_{ст}+l_1\varphi_1$, а удлинение вертикальной пружины $\lambda_2=\Delta s_D=l_2\varphi_2=l_1\varphi_1$. Тогда для потенциальной энергии системы, принимая во внимание формулы (64) и (64′)

из § 127, получим значение

$$\Pi=m_1g\frac{l_1}{2}\cos\varphi_1+m_2g\frac{l_2}{2}\sin\varphi_2+\frac{c_1}{2}(\lambda_{ст}+l_1\varphi_1)^2+\frac{c_2}{2}l_2^2\varphi_2^2$$

или, полагая $\cos\varphi_1=1-\varphi_1^2/2$, $\sin\varphi_2=\varphi_2$ и учитывая, что $l_2\varphi_2=l_1\varphi_1$,

$$\Pi=\Pi_0+(m_2g+2c_1\lambda_{ст})\frac{l_1}{2}\varphi_1+[2(c_1+c_2)l_1-m_1g]\frac{l_1}{4}\varphi_1^2$$

(все постоянные величины включены в Π_0). Отсюда находим

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1}=(m_2g+2c_1\lambda_{ст})\frac{l_1}{2}+[2(c_1+c_2)l_1-m_1g]\frac{l_1}{2}\varphi_1.$$

В положении равновесия, т. е. при $\varphi_1=0$, эта производная должна равняться нулю. Следовательно, должно быть $m_2g+2c_1\lambda_{ст}=0$ или

$$\lambda_{ст}=-m_2g/(2c_1). \qquad (а)$$

Таким образом, в положении равновесия пружина сжата на эту величину. Далее получим

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_1^2}=[2(c_1+c_2)l_1-m_1g]\frac{l_1}{2}.$$

Тогда, согласно условиям (130), заключаем, что равновесие будет устойчивым, если

$$2(c_1+c_2)l_1>m_1g. \qquad (б)$$

Кроме того, из равенства (133) следует, что квазиупругий коэффициент

$$c=[2(c_1+c_2)l_1-m_1g]l_1/2. \qquad (в)$$

Для кинетической энергии системы получим значение

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{3}l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2}{3}l_2^2\dot{\varphi}_2^2+\frac{m_3}{2}r_3^2\dot{\varphi}_3^2\right),$$

где $m_1l_1^2/3$, $m_2l_2^2/3$, $m_3r_3^2/2$ — моменты инерции тел *1*, *2*, *3* относительно их осей вращения; $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$ — угловые скорости этих тел. Но из найденных выше зависимостей между φ_2, φ_1 и φ_3, φ_1 следует, что $l_2\dot{\varphi}_2=l_1\dot{\varphi}_1$ и $r_3\dot{\varphi}_3=l_1\dot{\varphi}_1$. Тогда, учтя еще равенство (132), получим:

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{3}+\frac{m_2}{3}+\frac{m_3}{2}\right)l_1^2\dot{\varphi}^2 \quad \text{и} \quad a=(2m_1+2m_2+3m_3)\frac{l_1^2}{6}. \qquad (г)$$

При найденных значениях c и a формулы (136) дают:

$$k=\sqrt{\frac{6(c_1+c_2)l_1-3m_1g}{(2m_1+2m_2+3m_3)l_1}}, \quad \tau=\frac{2\pi}{k}. \qquad (д)$$

§ 149. МАЛЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Как и в § 148, будем считать, что рассматриваемая механическая система при $q=0$ находится в положении устойчивого равновесия. Исследуем ее малые колебания около положения равновесия еще в двух случаях.

1. Затухающие колебания. Пусть на точки системы, когда она выведена из равновесного положения, кроме потенциальных сил начинают действовать еще силы вязкого сопротивления

(диссипативные силы) $\overline{F}_k = -\mu_k \overline{v}_k = -\mu_k (d\overline{r}_k/dq)\dot{q}$*. Тогда обобщенную диссипативную силу $Q_д$ можно найти по формуле (109) из § 143 и преобразовать окончательно [подобно тому, как это сделано в § 148 при получении равенства (132)] к виду

$$Q_д = -\mu \dot{q} \qquad (\mu = \text{const}). \tag{138}$$

Теперь, составляя уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q_д \tag{139}$$

и заменяя в нем T, Π и $Q_д$ их значениями (132), (133), (138), получим окончательно следующее дифференциальное уравнение затухающих колебаний системы:

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = 0, \tag{140}$$

где обозначено

$$\mu/a = 2b, \quad c/a = k^2. \tag{140'}$$

Уравнение (140) совпадает с уравнением (76) из § 95. Следовательно, для малых колебаний системы с одной степенью свободы имеют место все результаты, полученные в § 95 для точки. Таким образом:

а) при $k > b$ система совершает затухающие колебания с частотой

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} \text{ и периодом } \tau = 2\pi/k_1;$$

б) при $k \leqslant b$ система совершает неколебательное движение.

Закон движения системы дают во всех случаях уравнения, полученные в § 95, если в них заменить x на q. Общие свойства этих движений аналогичны отмеченным в § 148.

2. В ы н у ж д е н н ы е к о л е б а н и я. Пусть на точки механической системы, рассмотренной в п. 1, действуют еще возмущающие силы, изменяющиеся со временем по закону $\overline{F}_k = \overline{F}_{k0} \sin pt$. Тогда, по аналогии с тем путем, который указан в п. 1 для определения $Q_д$, можно найти обобщенную возмущающую силу

$$Q_в = Q_0 \sin pt. \tag{141}$$

В итоге в правой части уравнения Лагранжа (139) добавится еще сила $Q_в$ и из него окончательно получится следующее дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы:

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = P_0 \sin pt, \quad \text{где} \quad P_0 = Q_0/a; \tag{142}$$

остальные обозначения указаны в равенствах (140').

Уравнение (142) совпадает с уравнением (91) из § 96. Следовательно, все результаты, полученные в § 96 для точки, имеют место

* На условия устойчивости равновесия (130) эти силы не влияют, так как при равновесии $\overline{v}_k = 0$, а следовательно, и $\overline{F}_k = 0$.

и для малых колебаний системы с одной степенью свободы, а соответствующие уравнения будут определять закон движения системы, если в них заменить x на q. Это относится и к результатам, полученным в § 96 для случая отсутствия сопротивления ($b=0$), и ко всем рассмотренным в § 96 свойствам вынужденных колебаний. В частности, резонанс при малом сопротивлении будет тоже иметь место, когда $p \approx k$.

§ 150. МАЛЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Колебания системы с несколькими степенями свободы, имеющие важные практические приложения, отличаются от колебаний системы с одной степенью свободы рядом существенных особенностей. Чтобы дать представление об этих особенностях, рассмотрим случай свободных колебаний системы с двумя степенями свободы.

Пусть положение системы определяется обобщенными координатами q_1, q_2 и при $q_1 = q_2 = 0$ система находится в устойчивом равновесии. Тогда кинетическую и потенциальную энергии системы с точностью до квадратов малых величин можно найти так же, как были найдены равенства (132), (133), и представить в виде:

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right); \tag{143}$$

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2\right), \tag{144}$$

где инерционные коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} и квазиупругие коэффициенты c_{11}, c_{12}, c_{22} — величины постоянные. Если воспользоваться двумя уравнениями Лагранжа вида (131) и подставить в них эти значения T и Π, то получим следующие дифференциальные уравнения малых колебаний системы с двумя степенями свободы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

Будем искать решение уравнений (145) в виде:

$$q_1 = A \sin(kt + \alpha), \quad q_2 = B \sin(kt + \alpha), \tag{146}$$

где A, B, k, α — постоянные величины. Подставив эти значения q_1, q_2 в уравнения (145) и сократив на $\sin(kt+\alpha)$, получим

$$\left.\begin{aligned} (c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B = 0, \\ (c_{12} - a_{12}k^2)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B = 0. \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Чтобы уравнения (147) давали для A и B решения, отличные от нуля, определитель этой системы должен быть равен нулю или, иначе, коэффициенты при A и B в уравнениях должны быть пропорциональны, т. е.

$$-\frac{c_{11} - a_{11}k^2}{c_{12} - a_{12}k^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k^2}{c_{22} - a_{22}k^2} = \frac{B}{A} = n. \tag{148}$$

Отсюда для определения k^2 получаем следующее уравнение, называемое *уравнением частот*:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0. \tag{149}$$

Корни k_1^2 и k_2^2 этого уравнения вещественны и положительны; это доказывается математически, но может быть обосновано и тем, что иначе $k_1 = \sqrt{k_1^2}$ и $k_2 = \sqrt{k_2^2}$ не будут вещественны и уравнения (145) не будут иметь решений вида (146), чего для системы, находящейся в устойчивом равновесии, быть не может (после возмущений она должна двигаться вблизи положения $q_1 = q_2 = 0$).

Определив из (149) k_1 и k_2, найдем две совокупности частных решений вида (146). Если учесть, что согласно (148) $B=nA$, эти решения будут:

$$q_1^{(1)}=A_1 \sin (k_1t+\alpha_1), \quad q_2^{(1)}=n_1A_1 \sin (k_1t+\alpha_1); \tag{150}$$

$$q_1^{(2)}=A_2 \sin (k_2t+\alpha_2), \quad q_2^{(2)}=n_2A_2 \sin (k_2t+\alpha_2), \tag{151}$$

где n_1 и n_2 — значения, которые n получает из (148) при $k=k_1$, и $k=k_2$ соответственно.

Колебания, определяемые уравнениями (150) и (151), называются *главными колебаниями*, а их частоты k_1 и k_2 — *собственными частотами системы*. При этом, колебание с частотой k_1 (всегда *меньшей*) называют *первым главным колебанием*, а с частотой k_2 — *вторым главным колебанием*. Числа n_1 и n_2, определяющие отношения амплитуд (или самих координат, т. е. q_2/q_1) в каждом из этих колебаний, называют *коэффициентами формы*.

Так как уравнения (145) являются линейными, то суммы частных решений (150) и (151) тоже будут решениями этих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} q_1&=A_1 \sin (k_1t+\alpha_1)+A_2 \sin (k_2t+\alpha_2),\\ q_2&=n_1A_1 \sin (k_1t+\alpha_1)+n_2A_2 \sin (k_2t+\alpha_2).\end{aligned}\right\} \tag{152}$$

Равенства (152), содержащие четыре произвольных постоянных A_1, A_2, α_1, α_2, определяемых по начальным условиям, дают *общее решение* уравнений (145) и определяют *закон малых колебаний системы*. Эти колебания слагаются из двух главных колебаний с частотами k_1 и k_2 и не являются гармоническими. В частных случаях, при соответствующих начальных условиях, система может совершать одно из главных колебаний (например, первое, если $A_2=0$) и колебание будет гармоническим.

Собственные частоты k_1, k_2 и коэффициенты формы n_1, n_2 не зависят от начальных условий и являются основными характеристиками малых колебаний системы; решение конкретных задач обычно сводится к определению этих характеристик.

Сопоставляя результаты этого и предыдущего параграфов, можно получить представление о том, к чему сведется исследование затухающих и вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы. Мы этого рассматривать не будем, отметим лишь, что при вынужденных колебаниях резонанс у такой системы может возникать дважды: при $p\approx k_1$ и при $p\approx k_2$ (p — частота возмущающей силы). Наконец, отметим, что колебания системы с s степенями свободы будут слагаться из s колебаний с частотами $k_1, k_2, \ldots, k_s$, которые должны определяться из уравнения степени s относительно k^2. Это связано со *значительными математическими* трудностями, преодолеть которые можно с помощью электронных вычислительных (или аналоговых) машин.

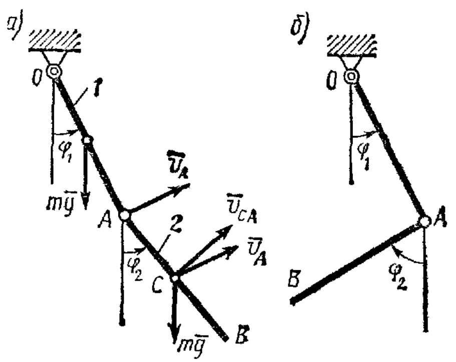

Рис. 374

Задача 185. Определить собственные частоты и коэффициенты формы малых колебаний двойного физического маятника, образованного стержнями *1* и *2* одинаковой массы m и длины l (рис. 374, *а*).

Р е ш е н и е. Выберем в качестве обобщенных координат малые углы φ_1 и φ_2. Тогда $T=0{,}5\,(J_{1O}\dot\varphi_1^2+mv_C^2+J_{2C}\,\dot\varphi_2^2)$, где $J_{1O}=ml^2/3$, $J_{2C}=ml^2/12$ и, при требуемой точности подсчетов, $v_C=v_A+v_{CA}=l\dot\varphi_1+l\dot\varphi_2/2$. В итоге

$$T=0{,}5ml^2\,(4\dot\varphi_1^2/3+\dot\varphi_1\dot\varphi_2+\dot\varphi_2^2/3). \tag{а}$$

Далее $\Pi=-0{,}5mgl\cos\varphi_1-mgl(\cos\varphi_1+0{,}5\cos\varphi_2)$ или, полагая $\cos\varphi=1-\varphi^2/2$,

$$\Pi=\Pi_0+0{,}5mgl\,(3\varphi_1^2/2+\varphi_2^2/2). \tag{б}$$

Из равенств (а) и (б) видно, каковы здесь значения a_{11}, a_{12}, a_{22}, c_{11} и c_{22} ($c_{12}=0$). При этих значениях коэффициентов уравнение частот (149) примет вид

$$k^4-6\frac{g}{l}k^2+\frac{27}{7}\left(\frac{g}{l}\right)^2=0.$$

Его корнями будут: $k_{1,2}^2=3(1\pm 2/\sqrt{7})g/l$, откуда

$$k_1=0{,}86\sqrt{g/l} \quad k_2=2{,}30\sqrt{g/l}. \tag{в}$$

Подставляя теперь в любое из отношений, стоящих в левой части равенства (148), сначала k_1, а затем k_2, получим

$$n_1=1{,}43, \quad n_2=-2{,}10. \tag{г}$$

Таким образом, при первом главном колебании оба стержня будут в каждый момент времени отклонены от вертикали в одну и ту же сторону (рис. 374, *а*) и $\varphi_2/\varphi_1=1{,}43$, а при втором главном колебании — в разные стороны (рис. 374, *б*) и $|\varphi_2/\varphi_1|=2{,}10$.

Глава XXXI

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

§ 151. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ УДАРА

При движении тела под действием обычных сил, рассматривавшихся до сих пор, скорости точек тела изменяются непрерывно, т. е. каждому бесконечно малому промежутку времени соответствует бесконечно малое приращение скорости. Действительно, если импульс любой силы $\bar F_k$ за промежуток времени τ представить в виде $\bar F_k^{\text{ср}}\tau$, где $\bar F_k^{\text{ср}}$ — среднее значение этой силы за время τ, то теорема об изменении количества движения точки, на которую действуют силы $\bar F_k$, дает

$$m\,(\bar v_1-\bar v_0)=\Sigma \bar F_k^{\text{ср}}\tau.$$

Отсюда видно, что когда время τ бесконечно мало (стремится к нулю), то при обычных силах и приращение скорости $\Delta\bar v=\bar v_1-\bar v_0$ будет тоже величиной бесконечно малой (стремящейся к нулю).

Однако если в числе действующих сил будут очень большие силы (порядка $1/\tau$), то приращение скорости за малый промежуток времени τ окажется величиной конечной.

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени τ изменяются на конечную величину, называется ударом. Силы, при действии которых происходит удар, будем называть *ударными силами* $\bar F_{\text{уд}}$. Промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, назовем *временем удара*.

Так как ударные силы очень велики и за время удара изменяются в значительных пределах, то в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не сами ударные силы, а их импуль-