§ 105*. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСИ

Проведем ось Ol, образующую с осями $Oxyz$ углы α, β и γ соответственно (рис. 280). По определению, $J_l = \Sigma m_k h_k^2$, где, как видно из треугольника OB_kD_k, $h_k^2 = r_k^2 - (OD_k)^2$. Но OD_k, как проекция вектора $\bar{r}_k = x_k\bar{i} + y_k\bar{j} + z_k\bar{k}$ на ось Ol, равна сумме проекций составляющих этого вектора на ту же ось, причем $(x_k\bar{i})_l = x_k \cos\alpha$ и т. д.; кроме того, $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$. Тогда

$$J_l = \Sigma m_k \left[x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - (x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2\right].$$

Если сначала учесть, что $1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ и т. д., а затем вынести квадраты и произведения косинусов, как общие множители, за скобки и принять во внимание формулы (3) и (10), то окончательно получим

$$J_l = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma - 2J_{xy} \cos\alpha \cos\beta - \\ - 2J_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2J_{zx} \cos\gamma \cos\alpha. \tag{12}$$

Если же в качестве осей $Oxyz$ выбрать главные оси инерции тела для точки O то формула упрощается.

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \qquad (12')$$

Формулы (12) или (12′) позволяют, зная входящие в их правые части моменты инерции относительно заданных осей $Oxyz$, определить момент инерции относительно любой оси, проходящей через точку O*. Если же известно и положение центра масс тела, то, используя формулу (9), можно найти момент инерции относительно оси, проходящей через любую другую точку.

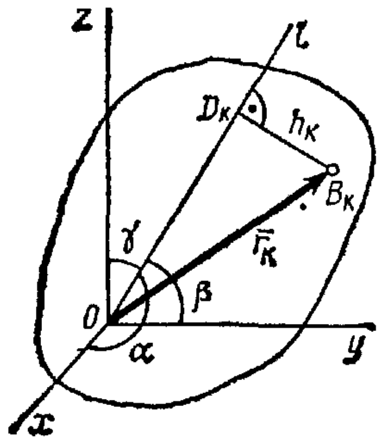

Рис 280

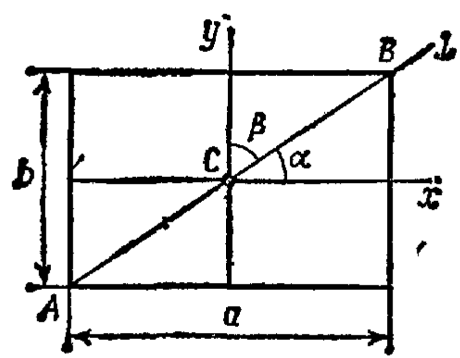

Рис. 281

Задача 121. Найти момент инерции однородной прямоугольной пластины с массой m и сторонами a и b относительно ее диагонали (рис 281).

Р е ш е н и е. Проведем через центр C пластины оси Cxy (ось Cz на рисунке не показана), которые, как оси симметрии, будут для точки C главными осями инерции. Тогда по формуле (12′), учитывая, что $\gamma = 90°$, получим

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta.$$

По аналогии с результатом, полученным в задаче 119, для пластины будет $J_x = mb^2/12$, $J_y = ma^2/12$, кроме того, $\cos\alpha = a/c$, $\cos\beta = b/c$, где $c = AB$. В результате окончательно найдем

$$J_l = ma^2b^2/6c^2 = ma^2b^2/6\,(a^2 + b^2).$$