§ 49. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ОСИ. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во *все время движения неподвижными* (рис. 134). Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется *осью вращения*.

Так как расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, то очевидно, что при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны, а все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

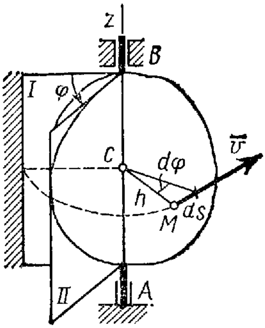

Рис. 134

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения, вдоль которой направим ось Az, полуплоскость I — неподвижную и полуплоскость II, врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним (см. рис. 134). Тогда положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который назовем *углом поворота тела*. Будем считать угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az), и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Измерять угол φ будем всегда *в радианах*. Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t, т. е.

$$\varphi = f(t). \tag{36}$$

Уравнение (36) выражает *закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε*.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то численно средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени будет $\omega_{ср} = \Delta\varphi/\Delta t$. В пределе при $\Delta t \to 0$ найдем, что

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \omega = \dot{\varphi}. \tag{37}$$

Таким образом, *числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени*. Равенство (37) показывает также, что величина ω равна отношению элементарного угла поворота $d\varphi$ к соответствующему промежутку времени dt. Знак ω определяет направление вращения

* Подобно тому, как в § 42 мы условились обозначать символом v числовое значение скорости и одновременно ее модуль, здесь ω и ε будут обозначать числовые (алгебраические) значения угловой скорости и углового ускорения и одновременно их модули, когда это не может вызвать недоразумений.

тела. Легко видеть, что когда вращение происходит против хода часовой стрелки, $\omega>0$, а когда по ходу часовой стрелки, то $\omega<0$.

Размерность угловой скорости $1/T$ (т. е. 1/время); в качестве единицы измерения обычно применяют рад/с или, что то же, 1/с ($с^{-1}$), так как радиан — величина безразмерная.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\bar{\omega}$, модуль которого равен $|\omega|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 135). Такой вектор определяет сразу и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

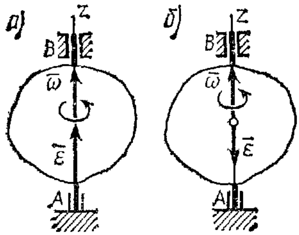

Рис. 135

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Если за промежуток времени $\Delta t=t_1-t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega=\omega_1-\omega$, то числовое значение среднего углового ускорения тела за этот промежуток времени будет $\varepsilon_{ср}=\Delta\omega/\Delta t$. В пределе при $\Delta t\to 0$ найдем, учтя одновременно равенство (37), что

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}. \tag{38}$$

Таким образом, *числовое значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.*

Размерность углового ускорения $1/T^2$ (1/время^2); в качестве единицы измерения обычно применяется рад/с^2 или, что то же, 1/с^2 ($с^{-2}$).

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется *ускоренным*, а если убывает,— *замедленным*. Легко видеть, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным,— когда разные.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора $\bar{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения. При этом

$$\bar{\varepsilon}=d\bar{\omega}/dt. \tag{38'}$$

Направление $\bar{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\bar{\omega}$, когда тело вращается ускоренно (рис. 135, *а*), и противоположно $\bar{\omega}$ при замедленном вращении (рис. 135, *б*).

§ 50. РАВНОМЕРНОЕ И РАВНОПЕРЕМЕННОЕ ВРАЩЕНИЯ

Если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной ($\omega=\text{const}$), то вращение тела называется *равномерным*. Найдем закон равномерного вращения. Из формулы (37) имеем

$d\varphi=\omega dt$. Отсюда, считая, что в начальный момент времени $t=0$ угол $\varphi=\varphi_0$, и беря интегралы слева от φ_0 до φ, а справа от 0 до t, получим окончательно

$$\varphi=\varphi_0+\omega t. \tag{39}$$

Из равенства (39) следует, что при равномерном вращении, когда $\varphi_0=0$,

$$\varphi=\omega t \text{ и } \omega=\varphi/t. \tag{40}$$

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через n об/мин*. Найдем зависимость между n об/мин и ω 1/c. При одном обороте тело повернется на угол 2π, а при n оборотах на $2\pi n$; этот поворот делается за время $t=1$ мин $=$ 60 с. Из равенства (40) следует тогда, что

$$\omega=\pi n/30 \approx 0{,}1n. \tag{41}$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным ($\varepsilon=\text{const}$), то вращение называется *равнопеременным*. Найдем закон равнопеременного вращения, считая, что в начальный момент времени $t=0$ угол $\varphi=\varphi_0$, а угловая скорость $\omega=\omega_0$ (ω_0 — начальная угловая скорость).

Из формулы (38) имеем $d\omega=\varepsilon dt$. Интегрируя левую часть в пределах от ω_0 до ω, а правую — в пределах от 0 до t, найдем

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t. \tag{42}$$

Представим выражение (42) в виде

$$d\varphi/dt=\omega_0+\varepsilon t \text{ или } d\varphi=\omega_0 dt+\varepsilon t dt.$$

Вторично интегрируя, найдем отсюда закон равнопеременного вращения

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\varepsilon t^2/2. \tag{43}$$

Угловая скорость ω этого вращения определяется формулой (42). Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, вращение будет равноускоренным, а если разные — равнозамедленным.

§ 51. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Установив в предыдущих параграфах характеристики движения всего тела в целом, перейдем к изучению движения отдельных его точек.

1. Скорости точек тела. Рассмотрим какую-нибудь точку M твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (см. рис. 134). При вращении тела точка M будет описывать

---

* Следует особо подчеркнуть, что n по размерности не угол, а угловая скорость.

окружность радиуса h, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр C лежит на самой оси. Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка M при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение $ds=$ $=hd\varphi$. Тогда числовое значение скорости точки будет равно отношению ds к dt, т. е.

$$v=\frac{ds}{dt}=h\frac{d\varphi}{dt}$$

или

$$v=h\omega. \tag{44}$$

Скорость v в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще *линейной* или *окружной* скоростью точки M.

Таким образом, *числовое значение скорости точки вращающегося твердого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.*

Направлена скорость по касательной к описываемой точкой окружности или перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и точку M.

Так как для всех точек тела ω имеет в данный момент времени одно и то же значение, то из формулы (44) следует, что скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения. Поле скоростей точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рис. 136.

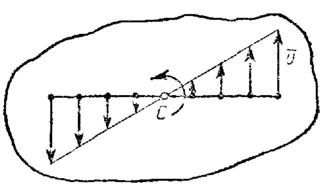

Рис. 136

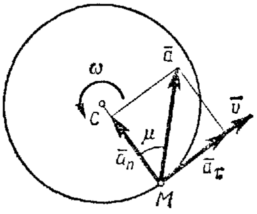

Рис. 137

2. Ускорения точек тела. Для нахождения ускорения точки M воспользуемся формулами $a_\tau=dv/dt$, $a_n=v^2/\rho$.

В нашем случае $\rho=h$. Подставляя значение v из равенства (44) в выражения a_τ и a_n, получим:

$$a_\tau=h\frac{d\omega}{dt}, \quad a_n=\frac{h^2\omega^2}{h}$$

или окончательно:

$$a_\tau=h\varepsilon, \quad a_n=h\omega^2. \tag{45}$$

Касательная составляющая ускорения $\bar{a}_\tau$ направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при замедленном); нормальная составляющая $\bar{a}_n$ всегда направлена по радиусу MC к оси вращения (рис. 137).

Полное ускорение точки M будет $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$ или

$$a=h\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}. \tag{46}$$

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом μ, который вычисляется по формуле $\mathrm{tg}\mu=a_\tau/a_n$ [вторая из формул (22)]. Подставляя сюда значения a_τ и a_n из равенств (45), получаем

$$\mathrm{tg}\,\mu=\varepsilon/\omega^2. \tag{47}$$

Так как ω и ε имеют в данный момент времени для всех точек тела одно и то же значение, то из формул (46) и (47) следует, что ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами описываемых ими окружностей. Поле ускорений точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рис. 138.

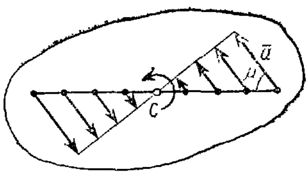

Рис. 138

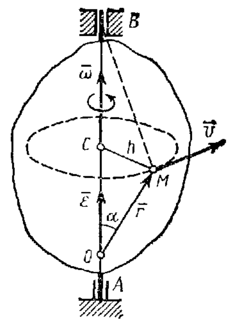

Рис. 139

Формулы (44) — (47) позволяют определить скорость и ускорение любой точки тела, если известен закон вращения тела и расстояние данной точки от оси вращения. По этим же формулам можно, зная движение одной точки тела, найти движение любой другой его точки, а также характеристики движения всего тела в целом.

3. Векторы скорости и ускорения точек тела. Чтобы найти выражения непосредственно для векторов $\bar{v}$ и $\bar{a}$, проведем из произвольной точки O оси AB радиус-вектор $\bar{r}$ точки M (рис. 139). Тогда $h=r\sin\alpha$ и по формуле (44)

$$|v|=|\omega|h=|\omega|r\sin\alpha \quad \text{или} \quad |v|=|\bar{\omega}\times\bar{r}|.$$

Таким образом, модуль векторного произведения $\bar{\omega}\times\bar{r}$ равен модулю скорости точки M. Направления векторов $\bar{\omega}\times\bar{r}$ и $\bar{v}$ тоже совпадают (оба они перпендикулярны плоскости OMB) и размерности их одинаковы. Следовательно,

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}, \tag{48}$$

т. е. *вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.* Формулу (48) называют формулой Эйлера.

Беря от обеих частей равенства (48) производные по времени, получим

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}\right)+\left(\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)$$

или

$$\bar{a}=(\bar{\varepsilon}\times\bar{r})+(\bar{\omega}\times\bar{v}). \qquad (49)$$

Формула (49) определяет вектор ускорения любой точки вращающегося тела.

Вектор $\bar{\varepsilon}\times\bar{r}$ направлен, как и вектор $\bar{\omega}\times\bar{r}$, т. е. по касательной к траектории точки M, а $|\bar{\varepsilon}\times\bar{r}|=\varepsilon r\sin\alpha=\varepsilon h$. Вектор же $\bar{\omega}\times\bar{v}$ направлен вдоль MC, т. е. по нормали к траектории точки M, а $|\bar{\omega}\times\times\bar{v}|=\omega v\sin 90°=\omega^2 h$, так как $v=\omega h$. Учитывая все эти результаты, а также формулы (45), заключаем, что $\bar{\varepsilon}\times\bar{r}=\bar{a}_\tau$ и $\bar{\omega}\times\bar{v}=\bar{a}_n$.

Задача 54. Вал, делающий $n=90$ об/мин, после выключения двигателя начинает вращаться равнозамедленно и останавливается через $t_1=40$ с. Определить, сколько оборотов сделал вал за это время.

Решение. Так как вал вращается равнозамедленно, то для него, считая $\varphi_0=0$, будет

$$\varphi=\omega_0 t+\varepsilon t^2/2,\quad \omega=\omega_0+\varepsilon t. \qquad (a)$$

Начальной угловой скоростью при замедленном вращении является та, которую вал имел до выключения двигателя. Следовательно,

$$\omega_0=\pi n/30.$$

В момент остановки при $t=t_1$ угловая скорость вала $\omega_1=0$. Подставляя эти значения во второе из уравнений (a), получаем:

$$0=\pi n/30+\varepsilon t_1 \text{ и } \varepsilon=-\pi n/30t_1.$$

Если обозначить число сделанных валом за время t_1 оборотов через N (не смешивать с n; n — угловая скорость), то угол поворота за то же время будет равен $\varphi_1=2\pi N$. Подставляя найденные значения ε и φ_1 в первое из уравнений (a), получим

$$2\pi N=(\pi n/30)t_1-(\pi n/60)t_1=(\pi n/60)t_1,$$

откуда

$$N=nt_1/120=30 \text{ об.}$$

Задача 55. Маховик радиусом $R=0,6$ м вращается равномерно, делая $n=90$ об/мин. Определить скорость и ускорение точки, лежащей на ободе маховика.

Решение. Скорость точки обода $v=R\omega$, где угловая скорость ω должна быть выражена в радианах в секунду. Тогда $\omega=\pi n/30=3\pi$ и $v=R\cdot 3\pi\approx 5,7$ м/с.

Далее, так как $\omega=\text{const}$, то $\varepsilon=0$, и, следовательно,

$$a=a_n=R\omega^2=R\cdot 9\pi^2\approx 53,3 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки направлено в данном случае к оси вращения.

Задача 56. Полагая, что при разгоне маховик вращается по закону

$$\varphi=c_0+c_1 t+c_2 e^{-kt}, \qquad (a)$$

определить значения постоянных коэффициентов c_0, c_1, c_2 и k из условий, что при $t=0$ должно быть $\varphi_0=0$ и $\omega_0=0$ и что предельная угловая скорость, до которой