При абсолютно упругом ударе ($k = 1$) угол падения равен углу отражения: $\alpha = \beta$. Если поверхность гладкая, то горизонтальные

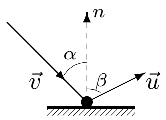

Рис. 283

силы на точку при ударе не действуют, и сохраняется горизонтальная составляющая скорости точки

$$v \sin\alpha = u \sin\beta. \tag{3.90}$$

Отсюда находим скорость точки после удара [1]

$$u = \frac{v\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{10\cdot(3/4)}{\sqrt{2}/2} = 12\sqrt{2}/5.$$

Ударный импульс направлен по нормали к поверхности. Теорема об изменении количества движения в проекции на нормаль дает

$$mu_n - mv_n = S_n,$$

где $u_n = u\cos\beta = u\sqrt{2}/2 = 12/5$, $v_n = -v\cos\alpha = -4\cdot 4/5 = -16/5$. Отсюда получаем $S_n = 10(12/5 + 16/5) = 56$ Нс.

Задача 147. К однородной пластинке массой 4 кг, имеющей форму прямоугольника с треугольным вырезом, приложен ударный

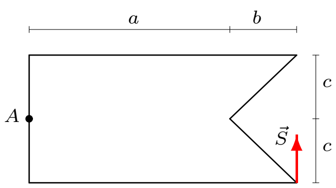

Рис. 284

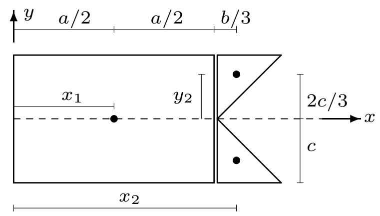

Рис. 285

[1] Скорость точки после удара можно также вычислить по формуле

$$u = v\sqrt{k^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\,.$$

Это следует из (3.90) и соотношения нормальных компонет скоростей $u\cos\beta = kv\cos\alpha$.

импульс $S = 2$ Нс (рис. 284). Даны размеры $a = 0.63$ м, $b = 0.21$ м, $c = 0.2$ м. Найти скорость точки A после удара.

Решение

Рассмотрим свободное тело, к которому прикладывается ударный импульс. Поместим начало координат в центр масс. В случае, когда ударный импульс $\vec{S}$ перпендикулярен оси z и лежит в плоскости тела, имеют место следующие соотношения, вытекающие из общих теорем динамики

$$mv_{Cx} = S_x, \tag{3.91}$$

$$mv_{Cy} = S_y, \tag{3.92}$$

$$J_C(\omega_{z1} - \omega_{z0}) = S_y x - S_x y, \tag{3.93}$$

где x и y — координаты точки приложения ударного импульса, J_C — главный момент инерции тела. Если правые части этих соотношений известны, то из них определяются скорость центра масс и угловая скорость тела. По этим значениям можно найти скорость любой точки тела. В рассматриваемой задаче — это точка A.

Коэффициентом в (3.93) входит момент инерции, вычисление которого составляет основную трудность задачи. В тех случаях, когда фигура тела имеет простую правильную форму, момент инерции обычно можно взять из справочных материалов, например, табл. 1, с. 206. В других случаях, момент инерции определяют либо разбиением фигуры на простые части, либо вычисляя интеграл по формуле Грина. Для второго способа желательно применять какое-нибудь программное обеспечение.

Вычислим сначала момент инерции методом разбиения. Представим фигуру в виде прямоугольника размером $a \times 2c$ и двух одинаковых треугольников с основанием b и высотой c (рис. 285):

$$F_1 = 2ac = 0.252 \text{ м}^2,\ F_2 = bc/2 = 0.021 \text{ м}^2,\ F = F_1 + 2F_2 = 0.294 \text{ м}^2.$$

Располагаем пластинку в осях координат xy и находим координаты ее центра тяжести. В силу симметрии фигуры относительно оси x координата $y_c = 0$. Для вычисления координаты x_C и моментов инерции найдем координаты центров тяжести прямоугольника и треугольников

$$x_1 = a/2 = 0.315 \text{ м},\quad x_2 = a + b/3 = 0.7 \text{ м},$$

$$y_1 = 0,\ y_2 = \pm(2/3)\,c = \pm 0.133 \text{ м},$$

где знак плюс относится к верхнему треугольнику, минус — к нижнему. Отсюда получаем

$$x_C = (F_1\,x_1 + 2\,F_2\,x_2)/F = 0.37 \text{ м}.$$

Переходим к нахождению геометрических моментов инерции фигуры относительно осей x и y. Сначала записываем значения моментов инерции частей фигуры относительно собственных центральных осей

$$I_{x1} = \frac{a(2c)^3}{12} = 33.60 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4,\quad I_{y1} = \frac{2a^3c}{12} = 83.35 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4,$$
$$I_{x2} = \frac{bc^3}{36} = 0.47 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4,\quad I_{y2} = \frac{cb^3}{36} = 0.51 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4.$$

Центральные моменты инерции всей фигуры [1]

$$I_{xC} = I_{x1} + 2(I_{x2} + F_2 y_2^2) = 42.00 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4,$$
$$I_{yC} = I_{y1} + F_1(x_C - x_1)^2 + 2I_{y2} + 2F_2(x_C - x_2)^2 = 137.74 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4.$$

Момент инерции относительно оси z

$$I_{zC} = I_{xC} + I_{yC} = 179.74 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4.$$

Радиус инерции фигуры

$$\rho^2 = I_{zC}/F = 0.0611\ \text{м}^2,\ \rho = 0.247\ \text{м}.$$

Момент инерции фигуры относительно оси z

$$J_{zC} = m\rho^2 = 0.244\ \text{кгм}^2. \tag{3.94}$$

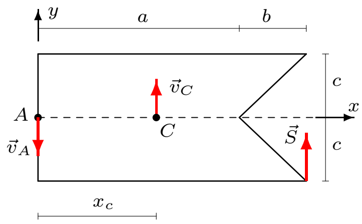

Рис. 286

Учитывая, что $S_y = S$, $S_x = 0$ (рис. 286), пользуясь (3.91), (3.92), находим скорость центра масс фигуры

$$v_{Cy} = S_y/m = 0.5\ \text{м/с},\quad v_{Cx} = 0.$$

Согласно теореме об изменении главного момента количества движения (3.93) определяем угловую скорость тела в момент удара

$$\omega_z = S_y(a + b - x_c)/J_{zC} = 3.843\ \text{с}^{-1}.$$

[1] Моменты инерции относительно осей, проходящих через центр масс.

Искомую скорость точки находим по формуле для скоростей точек при плоском движении в проекции на ось y (граф $C \xrightarrow[\pi]{} A$)

$$v_{Ay} = v_{Cy} + \omega_z x_C \cos\pi = -0.922 \text{ м/с}.$$

Таким образом, после удара точка A будет двигаться вниз (рис. 286).

Другой способ вычисления момента инерции — метод, основанный на формуле Грина. В [17] описан маплет, который вычисляет осевые и центробежные геометрические моменты инерции [1] фигуры и радиус инерции относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости фигуры. Именно этот радиус используется в формуле (3.94) для вычисления искомого момента инерции. Для ввода информации о фигуре достаточно внести в программу координаты точек ее контура при обходе по часовой стрелке. Интерфейс маплета представлен на рисунке 287. Координаты угловых точек введены в сантиметрах. Начальной точкой

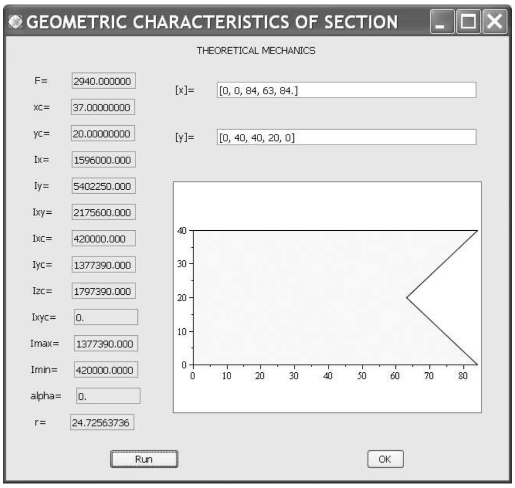

Рис. 287

обхода может быть любая точка контура. Размер файла маплета [2] не более 3 кБ, однако для его работы необходима установленная система компьютерной математики Maple. Работа маплета была проверена на версиях Maple 11-16.

[1] См. задачи на с. 71–74.

[2] Расположен по адресу http://vuz.exponenta.ru/J-impact.rar.