

Задача 126. Диск 1 радиусом $R = 2$ м массой $m_1 = 8$ кг, расположенный в горизонтальной плоскости, под действием пары сил с моментом $M = 96$ Нм вращается вокруг вертикальной оси. По его поверхности катается диск 2 радиусом $r = 1$ м массой $m_2 = 4$ кг. Оси дисков соединены невесомым стержнем (рис. 259). Определить угловое ускорение диска 1.

Решение

Качение диска 2 по диску 1 происходит независимо от вращения диска 1. Система имеет две степени свободы.

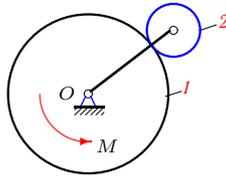


Рис. 259

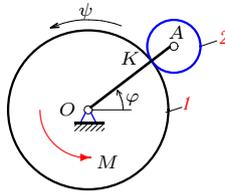


Рис. 260

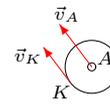


Рис. 261

В качестве независимых переменных (обобщенных координат) выберем угол поворота стержня $q_1 = \varphi$ и угол поворота $q_2 = \psi$ диска 1, однозначно описывающие положение системы¹. Оба угла направляем против часовой стрелки (рис. 260).

Задачу решаем с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$. Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы кинетических энергий: $T = T_1 + T_2$.

Кинетическая энергия вращательного движения диска 1 имеет вид

$$T_1 = J_1 \dot{\varphi}^2 / 2, \quad (3.45)$$

где $J_1 = m_1 R^2 / 2$ — момент инерции диска. Находим кинетическую энергию диска 2, совершающего плоское движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\omega}_2^2}{2}. \quad (3.46)$$

¹В качестве одной из обобщенных координат можно также взять угол поворота диска 2.

Скорость оси A диска 2 найдем из графа $O \xrightarrow[\varphi]{} A$.

$$\begin{aligned}v_{Ax} &= v_{Ox} - \dot{\varphi}(R+r) \sin \varphi, \\v_{Ay} &= v_{Oy} + \dot{\varphi}(R+r) \cos \varphi, \\v_A^2 &= v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2 = \dot{\varphi}^2(R+r)^2.\end{aligned}$$

Угловая скорость ω_2 зависит от разности скоростей центра A диска и точки K касания дисков (рис. 261). Составляем граф по дискам

$$O \xrightarrow[\varphi]{} K \xrightarrow[\varphi]{} A.$$

Получаем уравнение для скоростей в проекции на ось x :

$$v_{Ax} = v_{Ox} - \dot{\psi}R \sin \varphi - \omega_{2z}r \sin \varphi.$$

Отсюда с учетом уже найденной скорости $v_{Ax} = -\dot{\varphi}(R+r) \sin \varphi$ находим угловую скорость диска 2

$$\omega_{2z} = (\dot{\varphi}(R+r) - \dot{\psi}R)/r.$$

Получаем выражение для кинетической энергии системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 R^2 \dot{\psi}^2}{4} + \frac{m_2 (\dot{\varphi}(R+r) - \dot{\psi}R)^2}{4} + \frac{m_2 \dot{\varphi}^2 (R+r)^2}{2}.$$

С учетом заданных в условии значений радиусов и масс получим следующее выражение

$$T = 12\dot{\psi}^2 - 12\dot{\varphi}\dot{\psi} + 27\dot{\varphi}^2.$$

По формуле $Q_i = \partial N / \partial \dot{q}_i$, где $N = M\dot{\psi}$ — мощность пары сил с моментом M ¹ найдем обобщенные силы. Имеем $Q_1 = 0$, $Q_2 = M$.

Находим производные, входящие в уравнения Лагранжа (3.44):

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 54\dot{\varphi} - 12\dot{\psi}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= 54\ddot{\varphi} - 12\ddot{\psi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= -12\dot{\varphi} + 24\dot{\psi}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) &= -12\ddot{\varphi} + 24\ddot{\psi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \psi} &= 0.\end{aligned}$$

¹ В общем случае мощность вычисляется как сумма скалярных произведений активных сил на скорости точек их приложения и моментов пар сил на угловые скорости.

Уравнения Лагранжа для обобщенных ускорений $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$ принимают вид

$$\begin{aligned} 54\ddot{\varphi} - 12\ddot{\psi} &= 0, \\ -12\ddot{\varphi} + 24\ddot{\psi} &= M. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Решаем систему уравнений (3.47). Получаем угловые ускорения:

$$\ddot{\varphi} = 1 \text{ с}^{-2}, \quad \ddot{\psi} = 4.5 \text{ с}^{-2}.$$

Задача 127*. Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из трех тел (рис. 262). Цилиндр 1 массой 2 кг свободно катится по бруску массой 3 кг. Брусок и цилиндр 2 массой 3 кг связаны нитью. К оси цилиндра приложена сила $F = 115 \text{ Н}$. Найти ускорение бруска.

Задача 128*. Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из пяти тел (рис. 263). С внешнего радиуса блока C массой $m_C = 6 \text{ кг}$ на нити спускается цилиндр E массой $m_E = 3 \text{ кг}$. Груз A массой $m_A = 6 \text{ кг}$ висит на нити, навитой на этот цилиндр. На меньший радиус блока навита нить, на которой закреплен груз B массой $m_B = 4 \text{ кг}$. Блок D массой $m_D = 6 \text{ кг}$ меньшим радиусом катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Грузы A , B и ось однородного цилиндра E перемещаются вертикально под действием сил тяжести. Даны радиусы $r_C = 22 \text{ см}$, $R_C = 39 \text{ см}$, $\rho_C = 36 \text{ см}$, $r_D = 16 \text{ см}$, $R_D = 25 \text{ см}$, $\rho_D = 21 \text{ см}$. Найти ускорение груза A .

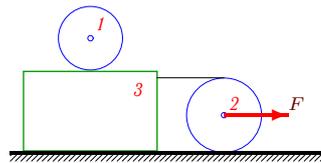


Рис. 262

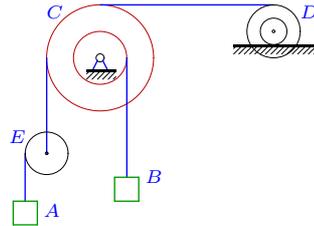


Рис. 263

Задача 129. Движение твердого тела, закрепленного в сферическом шарнире в начале координат, задано углами Эйлера ¹

$$\varphi = 2t + \pi/6, \quad \psi = 4t, \quad \theta = 2t + \pi/3.$$

¹См. рисунок 228, с. 133.