Пример решения

Задача 1. Система состоит из однородного цилиндра радиусом R, массой m_1 и бруска массой m_2 (рис. 191). Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности, цилиндр катится без проскальзывания по бруску. К бруску приложена горизонтальная сила F. Определить ускорение бруска.

Решение

Качение цилиндра 1 по бруску происходит независимо от движения бруска. Система имеет две степени свободы.

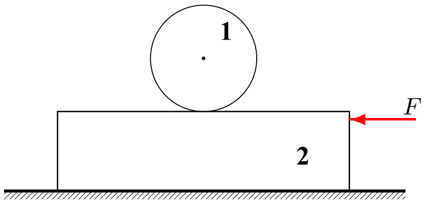

Рис. 191

Выбираем две независимые переменные, $q_1 = x_1$ и $q_2 = x_2$, однозначно описывающие положение системы. Пусть переменная x_1 указывает положение центра цилиндра, а x_2 — положение бруска. Направляем оси x_2 и x_1 в сторону движения, т. е. направо (рис. 192).

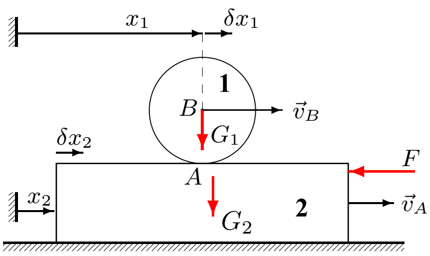

Рис. 192

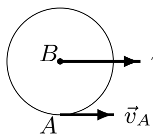

Рис. 193

Обе координаты взяты относительно неподвижной системы отсчета [1]. Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости, $\dot{x}_1 = v_1$ и $\dot{x}_2 = v_2$. Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы кинетических энергий цилиндра и бруска: $T = T_1 +$

[1] В качестве обобщенной координаты q_1 можно также взять угол поворота цилиндра или смещение центра цилиндра относительно подвижной системы отсчета, связанной с бруском [19]. Возможны и другие наборы обобщенных координат.

$+\,T_2$. Находим кинетическую энергию цилиндра, совершающего плоское движение,

$$T_1 = \frac{m_1 v_{Bx}^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2}, \quad v_{Bx} = \dot{x}_1. \tag{13.10}$$

Угловая скорость ω_1 зависит от разности скоростей центра цилиндра B и точки касания A (рис. 193). Составляем граф $A \xrightarrow[\pi/2]{1} B$. Получаем уравнение для скоростей в проекции на ось x:

$$v_{Bx} = v_{Ax} - \omega_{1z} R \sin(\pi/2),$$

где R — радиус цилиндра. Так как цилиндр катится по бруску без проскальзывания, скорость v_{Ax} точки касания равна скорости бруска $\dot{x}_2$. Отсюда имеем

$$\omega_{1z} = (v_{Ax} - v_{Bx})/R = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)/R. \tag{13.11}$$

Подставляем в кинетическую энергию (13.10) момент инерции однородного цилиндра относительно его оси, $J = m_1 R^2/2$. В результате, с учетом (13.11), получаем выражение для кинетической энергии цилиндра:

$$T_1 = \frac{m_1}{4}(2\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2).$$

Кинетическая энергия поступательного движения бруска $T_2 = m_2\dot{x}_2^2/2$. Кинетическая энергия всей системы

$$T = \frac{m_1}{4}(2\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2) + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} = \frac{3m_1}{4}\,\dot{x}_1^2 - \frac{m_1}{2}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{m_1 + 2m_2}{4}\dot{x}_2^2.$$

Обобщенные силы Q_1, Q_2 вычисляем по формуле $Q_i = \partial N/\partial \dot{x}_i$, $i = 1, 2$, где N — мощность активных сил системы, вычисленная как сумма скалярных произведений сил на скорости точек их приложения и моментов на угловые скорости: $N = \vec{F} \cdot \vec{v}_A$. Очевидно, $F_x = -F$. Отсюда имеем $Q_1 = 0$, $Q_2 = -F$.

Записываем уравнения Лагранжа (13.1), с. 336 и вычисляем входящие в них производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{3m_1}{2}\,\dot{x}_1 - \frac{m_1}{2}\,\dot{x}_2, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{m_1}{2}\,(3\,\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = -\frac{m_1}{2}\,\dot{x}_1 + \frac{m_1 + 2\,m_2}{2}\,\dot{x}_2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{(m_1 + 2\,m_2)\ddot{x}_2 - m_1\ddot{x}_1}{2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

В результате уравнения Лагранжа для обобщенных ускорений $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ принимают вид

$$\begin{aligned} &3\,\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0, \\ &(m_1 + 2m_2)\,\ddot{x}_2 - m_1\,\ddot{x}_1 = -2\,F. \end{aligned} \tag{13.12}$$

Решаем систему уравнений (13.12):

$$\ddot{x}_1 = -F/(m_1 + 3m_2), \quad \ddot{x}_2 = 3\,\ddot{x}_1 = -F/(m_1/3 + m_2). \tag{13.13}$$

Интересно заметить, что в этой задаче можно легко получить и приближенные оценки решения. Так, если пренебречь массой цилиндра, или условно предположить, что между цилиндром и бруском нет сцепления, и брусок "проскальзывает" под цилиндром в результате резкого приложения силы, то очевидно $\ddot{x}_2 = -F/m_2$ (цилиндр в движение не включился). С другой стороны, наоборот, если считать, что плавно приложенная сила увлекает в движение и брусок, и цилиндр, то, пренебрегая вращением цилиндра, получим $\ddot{x}_2 = -F/(m_1 + m_2)$. Получается оценка решения (13.13):

$$-F/m_2 < \ddot{x}_2 < -F/(m_1 + m_2).$$

Глава 14

Сферическое и произвольное движение тела

Динамика сферического движения тела [1] составляет важную часть теоретической механики, перекидывая мостик между во многом условной моделью плоского движения и реальными практическими задачами, которые ставит современная наука и развивающаяся техника.

Д14. Динамические уравнения Эйлера

Условия задач

Движение твердого тела, закрепленного шарнирно в начале координат, задано углами Эйлера [2]. Найти модуль главного момента, приложенного к телу, при $t = 0$. Известны главные моменты инерции тела (кгм^2).

[1] Определение сферического движения, углы Эйлера, кинематические соотношения и задачи на эту тему см. в гл. 9, с. 256.

[2] В практических задачах чаще задаются углы Крылова [24].