

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю. Ишлинского РАН**

Н.А.Белов, В.А. Кадымов

О краевой задаче течения тонкого пластического слоя

Препринт № XXX

Москва 2010

УДК 539.374

Н.А. Белов, В.А. Кадымов

О краевой задаче течения тонкого пластического слоя

В работе принимали участие сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук Н.А. Белов (belov@ipmnet.ru) и профессор Московского Государственного Технического Университета «МАМИ» В.А. Кадымов (vkadymov@yandex.ru).

Аннотация

Работа посвящена исследованию решения краевой задачи для течения тонкого пластического слоя между сближающимися жесткими плитами.

Известно, что материал пластической среды в таком течении хорошо описывается моделью вязкой жидкости. Полученное ранее, в приближении модели идеальной жидкости, решение не удовлетворяет одному из динамических условий на свободной границе области. Тем не менее, на основе этого решения было также получено уравнение эволюции границы области.

В работе проведено корректное аналитическое исследование краевой задачи. В области введенного пограничного слоя удалось получить решение, удовлетворяющее всем граничным условиям. Если течение, описываемое идеальной жидкостью, направлено по нормали к границе, скорость течения в пограничном слое имеет касательную к границе компоненту. Также показано, что при достаточно гладкой границе, уравнение ее эволюции совпадает с полученным ранее.

ISBN 978-5-91741-002-9

055(02)2 © Институт Проблем Механики Российской академии наук, 2010

1. Введение

Рассматривается течение пластического слоя между сближающимися жесткими плитами. Как известно [1], свойства материала пластической среды хорошо описываются моделью вязкой жидкости. В той части области течения, где давление на порядок превышает сдвиговые напряжения, материал среды близок по свойствам к идеальной жидкости.

Именно в приближении идеальной жидкости ранее была рассмотрена и решена задача о растекании тонкого пластического слоя. При этом, распределения давления и поля скоростей в области течения произвольной формы были найдены в работе [1], а в [2] на основе этого решения было предложено уравнение эволюции границы области. В работах [3,4] были рассмотрены некоторые обобщения постановки задачи и предложены другие методы решения.

Следует отметить, однако, что вблизи границы области течения, которая считается свободной, сдвиговые напряжения могут быть сравнимы по величине с давлением. Учет этих напряжений может изменить картину течения в окрестности границы, а также повлиять на эволюцию самой границы.

Целью настоящей работы является корректное аналитическое исследование краевой задачи описанного выше течения.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача о растекании тонкого пластического слоя между двумя жесткими шероховатыми плитами, параллельно сближающимися по нормали своими плоскостями. Предполагается, что течение плоское, т.е. оно усреднено по малой толщине слоя (см. рис.1).

При известном законе сближения плит и известной начальной границе области требуется определить силовое поле и поле скоростей течения пластического слоя, а также определить эволюцию свободной границы области.

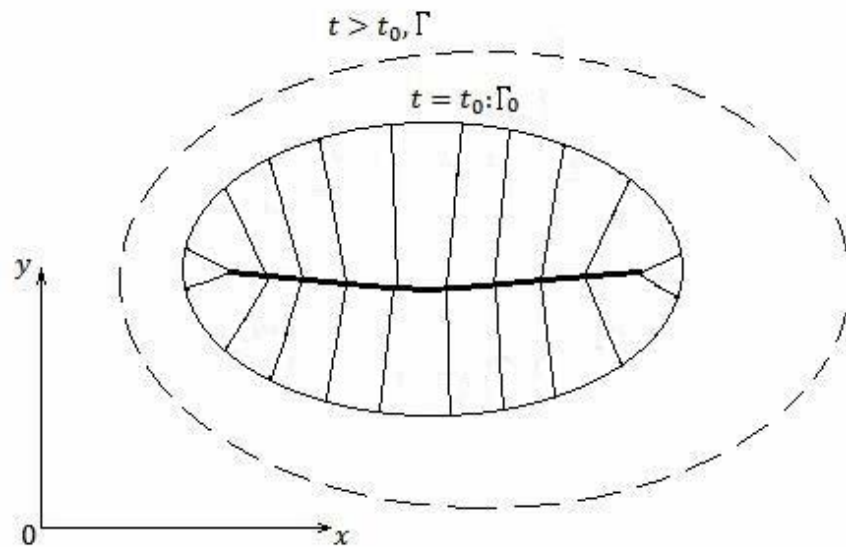


Рис. 1

Выпишем основные уравнения теории течения пластического слоя между двумя сближающимися плоскостями [1]. Уравнение неразрывности в некоторой неподвижной декартовой системе координат Oxy имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{h'}{h},$$

или, в векторной форме

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{h'}{h}, \quad (1)$$

где $\vec{v} = (u, v)$ - есть вектор скорости, $h(t)$ - толщина слоя в текущий момент, определяемая законом сближения плит, а штрих означает производную. Уравнения движения выписываются в предположении квазистатического равновесия,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} &= \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} &= \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \end{aligned}$$

или,

$$\operatorname{grad} \tilde{\sigma} = \frac{2\tau_s}{h} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad (2)$$

где $\tilde{\sigma}$ - тензор напряжений, а $\tau_s = \sigma_s / \sqrt{3}$ и σ_s - пределы текучести материала среды на сдвиг и растяжение, соответственно. Система уравнений замыкается соотношениями, связывающими компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}$ и тензора скоростей деформации $\tilde{\omega}$,

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p + \frac{2\sigma_s}{3} - \frac{2\sigma_s}{3} \frac{h}{h'} \omega_{11}, \\ \sigma_{22} &= -p + \frac{2\sigma_s}{3} - \frac{2\sigma_s}{3} \frac{h}{h'} \omega_{22}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= -\frac{2\sigma_s}{3} \frac{h}{h'} \omega_{12},\end{aligned}$$

где

$$\omega_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \omega_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \omega_{12} = \omega_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Введя метрический тензор \tilde{g} с компонентами

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0,$$

мы можем выразить связь тензоров в более компактной форме,

$$\tilde{\sigma} = \left(-p + \frac{2\sigma_s}{3} \right) \tilde{g} - \frac{2\sigma_s}{3} \frac{h}{h'} \tilde{\omega}. \quad (3)$$

Для завершения постановки задачи выпишем условия на свободной границе. Пусть граница области течения задана формулой

$$f(t, x, y) = 0. \quad (4)$$

Тогда на ней должно выполняться кинематическое условие, означающее материальность границы (частицы среды, из которых составлена граница, остаются на ней всегда),

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

или,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} f = 0. \quad (5)$$

Кроме того, должно выполняться динамическое условие, означающее равенство нулю вектора напряжений,

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \frac{\partial f}{\partial x} + \sigma_{12} \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ \sigma_{12} \frac{\partial f}{\partial x} + \sigma_{22} \frac{\partial f}{\partial y} &= 0,\end{aligned}$$

или,

$$\tilde{\sigma} \cdot (\text{grad}f)^* = 0. \quad (6)$$

где звездочка означает транспонирование вектора.

Задача (1)-(6) должна быть дополнена начальным условием для формы границы. Кроме того, важно отметить, что выписанных граничных условий может быть недостаточно для решения задачи. Внутри области течения могут существовать особые точки, где нормали, выпущенные из разных точек границы, пересекаются. На множестве таких точек (отрезках кривых) могут потребоваться дополнительные условия. Например, такие особые точки возможны на оси симметрии области течения. В этом случае естественным дополнительным условием будет равенство нулю нормальной компоненты скорости на этой оси.

3. Безразмерная форма задачи

В некоторый начальный момент времени t_0 нам известны характерные величины: длина $h(t_0)$, скорость $-h'(t_0)$, напряжение σ_s . Однако, уравнения приводятся к более простому виду, если в качестве характерных взять те же величины, но в текущий момент времени t .

Заметим попутно, что толщина слоя выбрана характерной длиной неспроста; другой длины, вдоль слоя, в области течения, если она бесконечная, может не быть.

Пусть

$$x_1 = x/h, \quad y_1 = y/h, \quad t_1 = \ln[h(t_0)/h(t)]. \quad (7)$$

Тогда уравнение границы (4) может быть записано в виде

$$f_1(t_1, x_1, y_1) = 0, \quad (8)$$

причем из соображений размерностей следует, что функция f в этом случае должна быть представимой в виде

$$f(t, x, y) = g(h(t))f(t_1, x_1, y_1). \quad (9)$$

В частности, если $f = y - \varphi(t, x)$, то $f(t, x, y) = h(t)f_1(t_1, x_1, y_1)$, где $f_1 = y_1 - \varphi_1(t_1, x_1)$.

Пусть также

$$\vec{v}_1 = \vec{v}/(-h'), \quad \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}/\sigma_s, \quad (10)$$

В новых безразмерных величинах (индекс «1» опускаем) уравнения (1)-(3) преобразуются к виду

$$\operatorname{div} \vec{v} = 1, \quad (11)$$

$$\operatorname{grad} \tilde{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad (12)$$

$$\tilde{\sigma} = \left(-p + \frac{2}{3} \right) \tilde{g} + \frac{2}{3} \tilde{\omega}, \quad (13)$$

где вид тензоров \tilde{g} и $\tilde{\omega}$ в новых переменных сохраняется, а исключение $\tilde{\sigma}$ из (9),(10) дает

$$\operatorname{grad} p = \frac{1}{3} \Delta \vec{v} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad (14)$$

Граничные условия (5),(6) преобразуются к условиям на границе (8):

$$\tilde{\sigma} \cdot (\operatorname{grad} f)^* = \left(\left(-p + \frac{2}{3} \right) \tilde{g} + \frac{2}{3} \tilde{\omega} \right) \cdot (\operatorname{grad} f)^* = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \cdot \operatorname{grad} f = 0, \quad \vec{w} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} + \vec{r}. \quad (16)$$

В последней формуле учтено, что

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{r}.$$

В результате имеем задачу (11),(14)-(16) для неизвестных p , \vec{v} , и f .

4. Выбор характерного масштаба задачи

Обратим теперь внимание на то, что мы провели обезразмеривание, выбрав «нехарактерные» для задачи размерные величины. Физика задачи подсказывает, что изменение осредненных по толщине слоя величин на расстояниях вдоль

слоя, сравнимых с толщиной слоя $h(t)$, рассматривать некорректно. Необходимо увеличить масштаб этих расстояний. Кроме того, следует ожидать, что на больших расстояниях, во-первых, контактное давление много больше предельного сдвигового напряжения, во-вторых, скорость течения вдоль слоя также много больше скорости сближения плит. Поэтому, необходимо перейти к новому масштабу величин

$$\begin{aligned} x_2 &= \varepsilon x, & y_2 &= \varepsilon y, \\ \vec{v}_2 &= \varepsilon \vec{v}, & p_2 &= \varepsilon p, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\varepsilon \ll 1$ - некоторый малый параметр.

Учитывая, что граница может быть описана как

$$f_2(t, x_2, y_2) = 0, \quad (18)$$

перепишем задачу в новых переменных (индекс «2» опускаем), тогда уравнения примут вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 1, \quad (19)$$

$$\nabla p = \frac{\varepsilon}{3} \Delta \vec{v} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad (20)$$

и на границе $f(t, x, y) = 0$ должны выполняться условия,

$$\left(\left(-p + \frac{2}{3} \varepsilon \right) \tilde{g} + \frac{2}{3} \varepsilon \tilde{\omega} \right) \cdot (\operatorname{grad} f)^* = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} + \vec{r}) \cdot \operatorname{grad} f = 0. \quad (22)$$

Некоторые предварительные замечания к решению задачи.

1. Задача может быть условно разделена на статическую и эволюционную части. Решение статической задачи (19)-(21), в которой время является параметром, дает поля давления и скоростей при заданной границе области течения. Эволюционная задача включает уравнение (22), определяющее изменение границы области течения во времени, и требует задания начального условия.

2. При решении статической задачи в главном приближении, $\varepsilon = 0$, порядок дифференциального уравнения (20) уменьшается. Кроме того, если формально положить $\varepsilon = 0$ в векторном условии (21), можно ошибочно получить всего одно скалярное условие

$$p = 0.$$

Именно так решалась задача в упомянутых работах [1-4]. И далее, полученное решение использовалось для получения эволюционного уравнения для формы границы f произвольного начального вида.

На самом деле, условие (21) дает еще одно скалярное условие для решения в том же приближении

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Предложенное в цитированных работах решение не удовлетворяет последнему граничному условию, поэтому далее мы попытаемся найти решение статической задачи, удовлетворяющее обоим граничным условиям.

5. Решение статической задачи вдали от границы

Статическую задачу (19)-(21), которая специально записана в инвариантной (векторной) форме, удобно решать в некоторой подвижной криволинейной ортогональной системе координат $O'XY$, связанной с границей области так, что координата X направлена вдоль границы области течения с началом в некоторой точке O' , а координата Y направлена по нормали к границе внутрь области течения. В этой системе координат уравнения (19), (20) принимают вид (подробнее о выводе уравнений см. Приложение А)

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{R-Y}{R} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{V}{R} = \frac{R-Y}{R}, \quad (23)$$

$$\frac{R}{R-Y} \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\varepsilon}{3} (\Delta \vec{v})_X - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = \frac{\varepsilon}{3} (\Delta \vec{v})_Y - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}}, \quad (25)$$

где U, V - физические компоненты скорости в локальной системе координат, $R(X)$ - радиус кривизны формы границы в точке с координатой X , а компоненты лапласиана вектора скорости равны

$$\begin{aligned}
(\Delta \bar{v})_x &= \frac{R^2}{(R-Y)^2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{RR'Y}{(R-Y)^3} \frac{\partial U}{\partial X} \\
&\quad - \frac{2R}{(R-Y)^2} \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{1}{(R-Y)} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{U}{(R-Y)^2} + \frac{RR'V}{(R-Y)^3}, \\
(\Delta \bar{v})_y &= \frac{R^2}{(R-Y)^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} - \frac{RR'Y}{(R-Y)^3} \frac{\partial V}{\partial X} \\
&\quad + \frac{2R}{(R-Y)^2} \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{1}{(R-Y)} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{V}{(R-Y)^2} - \frac{RR'U}{(R-Y)^3}.
\end{aligned}$$

Динамическое условие (21), с учетом того, что нормаль к границе $Y = 0$ имеет вид $\vec{n} = (0,1)$, приводит к двум скалярным соотношениям

$$-p + \frac{2}{3} \varepsilon \left(1 + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{R}{R-Y} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{U}{R-Y} = 0. \quad (27)$$

В главном приближении $\varepsilon = 0$ задача (23)-(27) упрощается и имеет вид:
для $Y > 0$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{R-Y}{R} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{V}{R} = \frac{R-Y}{R}, \quad (28)$$

$$\frac{R}{R-Y} \frac{\partial p}{\partial X} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}}, \quad (30)$$

а на границе $Y = 0$

$$p = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{R}{R-Y} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{U}{R-Y} = 0. \quad (32)$$

Для получения решения этой задачи предположим, что течение происходит только по нормали к границе, следовательно,

$$U \equiv 0. \quad (33)$$

Тогда выражение

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}} Y \quad (34)$$

удовлетворяет соотношениям (29)-(31) (заметим, что $\sqrt{V^2} = -V$). А, интегрируя уравнение (28), находим

$$V = \begin{cases} \frac{C(X)}{\xi} - \frac{\xi}{2}, & \xi \equiv R(X) - Y, \quad R < \infty, \\ C(X) + Y, & R = \infty, \end{cases} \quad (35)$$

где $C(X)$ - константа интегрирования.

Функция $C(X)$ не может быть в общем случае определена из граничного условия (32), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0,$$

поскольку порядок производных в уравнении (28) и в граничном условии одинаков. Тем не менее, существуют частные виды областей, для которых это условие выполняется автоматически. Для таких областей

$$C(X) = \begin{cases} C_1 R + R^2 / 2, & R < \infty \\ C_1, & R = \infty \end{cases}, \quad C_1 = const.$$

Примерами таких областей могут быть полоса и круг.

В общем случае для определения константы интегрирования $C(X)$ необходимо дополнительное граничное условие. Пусть область течения обладает осью симметрии, которая в неподвижной декартовой системе координат задана соотношением $y = 0$. В подвижной системе координат этому соотношению будет соответствовать некоторое уравнение $Y = S(X)$. Естественно предположить, что на оси симметрии нормальная составляющая скорости равна нулю. Вкупе с (33) это предположение приводит к условию на $Y = S(X)$

$$V = 0. \quad (36)$$

Подставляя (35) в (36), находим

$$C(X) = \begin{cases} [R(X) - S(X)]^2 / 2, & R < \infty \\ -S(X), & R = \infty \end{cases}. \quad (37)$$

И тогда для скорости получим выражение

$$V = -S + Y + \frac{(S - Y)^2}{2(R - Y)}, \quad (38)$$

справедливое как для конечного, так и для бесконечного радиуса кривизны R .

Решение (33),(34),(38) представляет собой хорошо известное решение, впервые полученное в работе [1]. В общем случае оно не удовлетворяет второму динамическому граничному условию (32) и может быть корректным лишь вдали от границы.

6. Пограничный слой, задача и ее решение

Мы находим, что задача (23)-(27) вполне аналогична задаче обтекания некоторого тела вязкой жидкостью, где роль малого параметра при членах со старшими производными выполняет величина, обратная числу Рейнольдса, а решение в рамках модели идеальной жидкости не удовлетворяет одному из граничных условий, и потому справедливо лишь вдали от границы. Понятно, что удовлетворить второму динамическому условию возможно лишь при наличии ненулевых лапласианов в уравнениях движения. Поэтому попытаемся применить идеологию введения пограничного слоя в нашей задаче.

Рассматривая окрестность границы, касательную переменную X мы оставляем неизменной, а нормальную растягиваем,

$$X_1 = X, \quad Y_1 = \frac{Y}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (39)$$

Поскольку «внешнее» решение (33),(34),(38), справедливое вдали от границы, дает на $Y = 0$: $U = 0$, $p = 0$ и конечное V , естественно положить

$$U = \sqrt{\varepsilon}U_1, \quad p = \sqrt{\varepsilon}P_1, \quad V = V_1. \quad (40)$$

Тогда в новых переменных из уравнений (23)-(25) в главном приближении получим

$$\frac{\partial V_1}{\partial Y_1} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial X_1} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y_1^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{U_1}{V_1}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial Y_1} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 V_1}{\partial Y_1^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad (43)$$

а динамические граничные условия (26), (27) приводят к условиям на $Y_1 = 0$

$$-P_1 + \frac{2}{3} \frac{\partial V_1}{\partial Y_1} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial Y_1} + \frac{\partial V_1}{\partial X_1} = 0. \quad (45)$$

На бесконечности $Y_1 = \infty$, в соответствии с «внешним» решением, выберем условия

$$U_1 = 0, \quad (46)$$

$$V_1 = V_0(X_1), \quad (47)$$

где $V_0(X_1)$ есть решение (38) при $Y = 0$ и $X = X_1$.

Решение задачи (41)-(47) распадается на решение трех простеньких. Для V_1 имеем задачу (41), (47), откуда

$$V_1 = V_0(X_1). \quad (48)$$

Давление находится из (43),(44) и равно

$$P_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} Y_1. \quad (49)$$

Задача для U_1 состоит из уравнения второго порядка (42) и двух граничных условий (45), (46). Она имеет решение

$$U_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{dV_0}{dX_1} \exp(-\lambda Y_1), \quad \lambda = \sqrt{-\frac{2\sqrt{3}}{V_0(X_1)}}. \quad (50)$$

Решение (48)-(50) для пограничного слоя показывает нам, что, благодаря второму динамическому граничному условию, вблизи границы области течение перестраивается таким образом, что касательная к границе компонента скорости становится ненулевой. В качестве примера, в Приложении В дано решение для течения в клине, и в частности, решение в пограничном слое.

Необходимо отметить, что задача (41)-(47) о течении в пограничном слое не включает в себя радиус кривизны границы, входивший в первоначальную задачу. Такая постановка задачи возможна только для достаточно гладкой формы границы, когда радиус кривизны меняется вдоль нее непрерывно. Соответственно, решение (48)-(50) не будет справедливым в окрестности тех точек гра-

ницы, где радиус кривизны терпит разрыв. Примером области с такими граничными точками может быть овал, составленный из дуг окружности и отрезков прямых. Для таких областей необходимо формулировать и решать другую задачу о пограничном слое.

7. Уравнение эволюции границы области течения

Для полноты представленного здесь решения общей задачи необходимо также исследовать кинематическое условие (22), записанное в неподвижной декартовой системе координат.

Единственный член условия (22), который необходимо вычислить, это $\vec{v} \cdot \text{grad} f$ (остальные мы знаем, если граница задана). Поле скорости \vec{v} на границе мы можем определить из решения статической задачи для пограничного слоя. Так как касательная к границе компонента скорости не дает вклада в обсуждаемый член, а нормальная компонента совпадает с той же компонентой, взятой из решения вдали от границы, можно воспользоваться соотношением (38), из которого следует

$$V_0 \equiv V(Y=0) = -S + \frac{S^2}{2R}. \quad (51)$$

Пусть граница определена уравнением

$$f = y - \varphi(t, x) = 0, \quad (52)$$

и имеется ось симметрии $y = 0$. Для определенности можно рассматривать одну из двух частей области и положить $\varphi(t, x) \geq 0$. В этих условиях радиус кривизны R и расстояние по нормали от границы до оси симметрии S по определению равны

$$R(t, x) = \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|^{-1} \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2}, \quad S(t, x) = \varphi \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2}. \quad (53)$$

Следовательно, из (51)-(53) мы знаем V_0 как функцию от t, x , и нормальный к границе вектор скорости \vec{V}_0 ,

$$\vec{V}_0 = V_0 \vec{n}, \quad \vec{n} = -\frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial\varphi/\partial x)^2}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -1 \right),$$

С учетом последнего равенства находим

$$\vec{v} \cdot \text{grad}f = \vec{V}_0 \cdot \text{grad}f = -V_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2}, \quad (54)$$

где выражение справа легко вычисляется,

$$V_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2} = -\varphi \left[1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\varphi^2}{2} \left| \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right|.$$

В результате кинематическое условие (22) преобразуется к виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + x \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi \left[2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\varphi^2}{2} \left| \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right| = 0, \quad (55)$$

и представляет собой уравнение параболического типа для эволюции формы границы $y = \varphi(t, x)$.

Уравнение (55), записанное в других координатах, совпадает с полученным ранее в работе [2], что не удивительно. При выводе этого уравнения мы, по существу, использовали не найденное нами решение для пограничного слоя, а решение статической задачи, корректное вдали от границы. При условии $\partial^2\varphi/\partial x^2 \leq 0$ и соответствующей замене переменных оно сводится к известному уравнению нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\theta^2 \frac{\partial\theta}{\partial\xi} \right),$$

многие частные решения которого описаны в справочнике [6] и применительно к рассматриваемой задаче исследованы в [7].

8. Заключение.

Обсуждается известная задача течения тонкого пластического слоя между двумя жесткими плитами [1]. Осреднение по толщине слоя приводит к двумерной (плоской) задаче со свободной границей и малым параметром. Равенство нулю

на этой границе вектора напряжений приводит к двум, а не к одному (равенство нулю давления), как ошибочно считалось ранее, скалярным условиям для решения в главном приближении. Поэтому, в настоящей работе сделана попытка найти решение задачи, удовлетворяющее обоим динамическим условиям на свободной границе.

Задача может быть условно разделена на статическую и эволюционную части. Решение статической задачи, в которой время является параметром, заключается в определении полей давления и скоростей при известной границе области течения. Эволюционная задача определяет изменение границы области течения во времени и требует задания начального условия.

При нахождении решения статической задачи в главном приближении порядок системы определяющих уравнений уменьшается. С помощью введения подвижной системы координат, связанной с границей, удается сильно упростить задачу и получить решение (другим способом), совпадающее с известным решением [1]. Особенность этого решения заключается в том, что течение происходит по нормальям к границе, а на границе решение удовлетворяет одному, но принципиально (в силу понижения порядка системы уравнений) не может удовлетворить другому условию.

Чтобы удовлетворить второму условию, по аналогии с задачей обтекания тел вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса, задача решается с помощью введения пограничного слоя в окрестности свободной границы. Решение для пограничного слоя, представленное в аналитическом виде, показывает нам, что, благодаря второму динамическому граничному условию, вблизи границы области течения перестраивается таким образом, что касательная к границе компонента скорости становится ненулевой.

Для иллюстрации предложенного метода рассмотрено течение в клиновидной области. Показано, что касательная к границе компонента скорости течения вблизи контура в рассматриваемой задаче направлена к вершине клина.

Необходимо отметить, что сформулированная нами задача о течении в пограничном слое не включает в себя радиус кривизны границы, входивший в исходную задачу. Такая постановка задачи возможна только для достаточно гладкой формы границы, когда радиус кривизны меняется вдоль нее непрерывно.

Соответственно, найденное решение не будет справедливым в окрестности тех точек границы, где радиус кривизны терпит разрыв.

Поэтому, не удивительно, что полученное нами из кинематического условия на границе, с использованием решения статической задачи, эволюционное уравнение, хотя и получено более простым способом, без интегрирования элементарных объемов, совпадает с полученным ранее в работе [2]. При выводе этого уравнения мы, по существу, использовали не найденное нами решение для пограничного слоя, а решение статической задачи, корректное вдали от границы.

В качестве дополнения стоит упомянуть о другом подходе к решению обсуждаемой физической задачи, изложенном в работе [8].

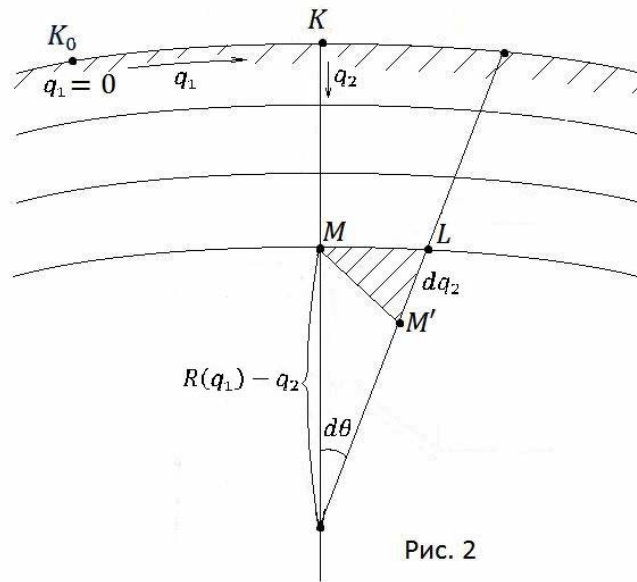
Литература.

1. Ильюшин А.А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям. ПММ, 1954, т.18, №3, с.265-288.
2. Безухов В.Н. Об осадке пластического слоя некруговой формы в плане. Канд. дисс., М., МГУ, 1955, 78с.
3. Кадымов В.А. Некоторые задачи пластического течения в тонком слое металла. Канд. дисс., М., МГУ, 1981, 108с.
4. Кийко И.А. Пластические течения металлов. Сб. «Научные основы прогрессивной техники и технологии», М., Машиностроение, 1986, с.102–133.
5. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2. М., Физматлит, 1963, 729с.
6. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. Точные решения. М., Физматлит, 2002, 432с.
7. Кадымов В.А. Автомодельные уравнения в задаче растекания пластического слоя на плоскости и их решения. Тула, Вестник ТулГУ, 2009, т.15, вып.2, с.38-44.
8. Мохель А.Н., Салганик Р.Л. Тонкий пластический слой с произвольным контуром, сжимаемый между жесткими плитами. ДАН СССР, 1987, т.293, №4, с.809-813.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

Формулировка статической задачи в криволинейной подвижной системе координат.

Выберем криволинейную ортогональную систему координат q_1, q_2 так, что координата q_1 направлена вдоль границы области течения с началом в некоторой точке K_0 , а координата q_2 направлена по нормали к границе внутрь области течения. Координаты произвольной точки M в области течения определяются следующим образом: q_2 равна отрезку нормали MK , проведенной из точки M , а q_1 равна длине дуги K_0K (см. Рис.2).



Если ввести локальный базис

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2),$$

то расстояние между бесконечно близкими точками (на рисунке M и M') равно

$$d\vec{r}^2 = ds^2 = (\vec{e}_i \vec{e}_j) dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j$$

Пусть граница задана (в глобальной декартовой системе координат) уравнением

$$f(t, x, y) = y - \varphi(t, x) = 0, \quad (A1)$$

тогда радиус кривизны контура (границы) в точке K , $R = R(q_1)$, может быть параметрически задан в форме

$$R(x) = \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right|}, \quad q_1(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2} dx, \quad (\text{A2})$$

где x, x_0 глобальные координаты точек K, K_0 . Тогда для расстояния MM' справедливо соотношение

$$ds^2 = (R(q_1) - q_2)^2 d\theta^2 + dq_2^2 = \left(1 - \frac{q_2}{R(q_1)}\right)^2 dq_1^2 + dq_2^2,$$

(здесь $d\theta$ - угол между бесконечно близкими нормальными, проведенными из точек M и M'), и, следовательно, компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{11} = \left(1 - \frac{q_2}{R(q_1)}\right)^2, \quad g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0,$$

а параметры Ламе $H_{1,2}$ имеют вид

$$H_1 = \sqrt{g_{11}} = 1 - \frac{q_2}{R(q_1)}, \quad H_2 = \sqrt{g_{22}} = 1.$$

Для последующего изложения удобно положить $q_1 = X$, $q_2 = Y$, так что

$$H_1 = 1 - \frac{Y}{R(X)} = \frac{r - Y}{r}, \quad H_2 = 1. \quad (\text{A3})$$

Тогда, следуя [5], $|\vec{v}| = \sqrt{U^2 + V^2}$, где U, V - физические компоненты скорости в локальной системе координат. Далее,

$$\text{grad}p = \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial X}, \frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial Y}\right) = \left(\frac{R}{R - Y} \frac{\partial p}{\partial X}, \frac{\partial p}{\partial Y}\right),$$

$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(UH_2)}{\partial X} + \frac{\partial(VH_1)}{\partial Y}\right) = \left(\frac{R}{R - Y}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{R - Y}{R} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{V}{r}\right).$$

Компоненты лапласиана вектора скорости равны

$$\begin{aligned}
(\Delta\vec{v})_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(UH_2)}{\partial X} + \frac{\partial(VH_1)}{\partial Y} \right) \right) - \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(VH_2)}{\partial X} - \frac{\partial(UH_1)}{\partial Y} \right) \right), \\
(\Delta\vec{v})_2 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(UH_2)}{\partial X} + \frac{\partial(VH_1)}{\partial Y} \right) \right) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(VH_2)}{\partial X} - \frac{\partial(UH_1)}{\partial Y} \right) \right),
\end{aligned}$$

или,

$$\begin{aligned}
(\Delta\vec{v})_1 &= \frac{R^2}{(R-Y)^2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{RR'Y}{(R-Y)^3} \frac{\partial U}{\partial X} \\
&\quad - \frac{2R}{(R-Y)^2} \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{1}{(R-Y)} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{U}{(R-Y)^2} + \frac{RR'V}{(R-Y)^3}, \tag{A4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta\vec{v})_2 &= \frac{R^2}{(R-Y)^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} - \frac{RR'Y}{(R-Y)^3} \frac{\partial V}{\partial X} \\
&\quad + \frac{2R}{(R-Y)^2} \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{1}{(R-Y)} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{V}{(R-Y)^2} - \frac{RR'U}{(R-Y)^3}, \tag{A5}
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (19), (20) в локальной системе координат принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{R-Y}{R} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{V}{R} = \frac{R-Y}{R}, \tag{A6}$$

$$\frac{R}{R-Y} \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\varepsilon}{3} (\Delta\vec{v})_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}}, \tag{A7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = \frac{\varepsilon}{3} (\Delta\vec{v})_2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}}, \tag{A8}$$

Физические компоненты тензора скоростей деформаций имеют вид:

$$\omega_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{V}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial Y} = \frac{R}{R-Y} \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{V}{R-Y},$$

$$\omega_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{U}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y},$$

$$\begin{aligned}
\omega_{12} = \omega_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{U}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial Y} - \frac{V}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial X} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{R}{R-Y} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{U}{R-Y} \right),
\end{aligned}$$

и, соответственно, динамическое условие (21), с учетом того, что нормаль границе имеет вид $\vec{n} = (0,1)$, приводит к двум скалярным соотношениям на границе $Y = 0$

$$-p + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon\omega_{22} \equiv -p + \frac{2}{3}\varepsilon\left(1 + \frac{\partial V}{\partial Y}\right) = 0, \quad (\text{A9})$$

$$2\omega_{12} \equiv \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{R}{R-Y} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{U}{R-Y} = 0. \quad (\text{A10})$$

Уравнения (A6)-(A8) с учетом (A1),(A2),(A4),(A5) и граничными условиями (A9),(A10) составляют постановку статической задачи в криволинейной системе координат, связанной с границей области течения.

ПРИЛОЖЕНИЕ В.

Течение пластического слоя в клиновидной области.

Рассмотрим область, ограниченную прямой

$$y = \varphi(t, x), \quad \varphi = k(t)x + b(t), \quad (\text{B1})$$

и осью симметрии $y = 0$ для $x \geq -b/k$. Уравнение эволюции границы (55) приводит к двум уравнениям для определения $k(t)$ и $b(t)$,

$$k' = k(1 + k^2), \quad b' = b(2 + k^2).$$

Решение последних уравнений выглядит следующим образом

$$k = k_0 e^t z, \quad b = b_0 e^{2t} z, \quad z \equiv \left(1 + k_0^2 - k_0^2 e^{2t}\right)^{-1/2}, \quad (\text{B2})$$

где k_0, b_0 - значения величин при $t = 0$. При $k = 0$ имеем решение для полосы, при $k \neq 0$ - для клина, в системе отсчета, не связанной с угловой точкой. Клинь остается себе подобным в течение времени своей «жизни», которое конечно. Зададимся вопросом, будет ли угловая точка $x = -b/k$ двигаться во времени? Казалось бы, ввиду

$$x = -(b_0/k_0)e^t = x_0 e^t,$$

можно заключить, что она движется, однако переход к размерным переменным $x_d = xh(t)$ показывает, что

$$\frac{x_d}{h(t)} = \frac{x_{d0}}{h(t_0)} \exp\left(\ln \frac{h(t_0)}{h(t)}\right) = \frac{x_{d0}}{h(t)},$$

откуда $x_d = x_{d0}$, т.е. угловая точка остается неподвижной. Таким образом, далее для клина можем ограничиться случаем

$$b(t) \equiv 0, \quad (\text{B3})$$

и начало обеих систем координат совместить с угловой точкой.

Выпишем решение статической задачи. С учетом $R = \infty$ и $S(X) = kX$ «внешнее» решение имеет вид

$$U = 0, \quad p = \frac{2}{\sqrt{3}}Y, \quad V = Y - kX, \quad (\text{B4})$$

где подвижные и неподвижные координаты связаны соотношениями

$$X = \frac{x + ky}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad Y = \frac{kx - y}{\sqrt{1 + k^2}},$$

или,

$$x = \frac{X + kY}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad y = \frac{kX - Y}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Решение для пограничного слоя сводится к соотношениям

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}Y_1, & V_1 &= -kX_1, \\ U_1 &= -\frac{k}{\lambda} \exp(-\lambda Y_1), & \lambda &= \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{kX_1}}. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

где

$$X_1 = X, \quad Y_1 = \frac{Y}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Из формул (B5) видно, что в пограничном слое появляется касательная компонента скорости, пропорциональная корню из расстояния до угловой точки и направленная к ней. Таким образом, линии тока течения перестают быть нормальными к границе. Однако, в силу (B1)-(B3), с течением времени клин сохраняет свою форму (клина).

Н.А.Белов, В.А. Кадымов

О краевой задаче течения тонкого пластического слоя

**Институт Проблем Механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук,
119526, Москва, проспект Вернадского 101, корп. 1**

ISBN 978-5-91741-002-9



9 785917 410029

Подписано к печати 00.03.2010 г. Заказ № 15-2010 Тираж 40

Отпечатано на ризографе Института Проблем Механики Российской академии наук