РОССИЙСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ТАТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РОССИЙСКАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ И ЯВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ»

РОССИЙСКИЙ СЕМИНАР

«НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТАТИСТИКА В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И КОСМОЛОГИИ»

6-10 сентября 2010 г., Казань-Яльчик

ТРУДЫ СЕМИНАРА

Казань
Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет
ООО «Фолиантъ»
2010

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632
В87

РОССИЙСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ТАТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,
проф. Ю.Г.Игнатьева

В87 **Труды Российской летней школы** «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» (ММ СКМ2) и **Российского семинара** «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии», 6-10 сентября 2010 г., Казань-Яльчик. - Казань: Изд-во “Фолиантъ”, 2010. - 210 с.

В сборник вошли труды Российской летней школы-семинара Gracos, посвященные математическому моделированию фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики (СКМ) и современным теоретическим проблемам нелинейной физики, в частности, релятивистской теории гравитации и космологии. Материалы, содержащиеся в сборнике, представляют оригинальные статьи и обзоры специалистов из различных научных центров России и ближнего Зарубежья, а также работы начинающих исследователей. Первый Российский семинар по математическому моделированию в СКМ проходил в Казани, в 2007 году.

Материалы сборника трудов предназначены для научных работников и аспирантов, специализирующихся в области математического и компьютерного моделирования, релятивистской теории гравитации, квантовой теории поля и космологии, а также для студентов старших курсов физико - математических отделений университетов.

ISBN 978-5-94990010-9

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований

Оглавление

ЧАСТЬ 2. ТРУДЫ СЕМИНАРА. 127

[3] Широков, П. А. Интерпретация и метрика квадратичных геометрий. Ч. I. Интерпретация неевклидовых геометрий. – В сб.: Избранные работы по геометрии / П. А. Широков. – Казань: Изд-во КГУ, 1966. – С. 77.

[4] Gray, A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 2nd ed/ – CRC Press, 1997.

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

М.Н. Кирсанов[1], *С.В. Выльева*[2]

[1] *Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва,*
[2] *Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва*

[1]`E-mail: c216@yandex.ru`, [2]`E-mail: sova_ws@mail.ru`

Аннотация. *Предлагаются варианты генетического алгоритма для решения начальной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Обсуждается выбор начальной популяции, метод получения последующих поколений и оценка погрешности полученного решения.*

1. Введение

Для поиска решения дифференциального уравнения традиционно используются три направления: поиска аналитического решения, численный метод решения и приближенный аналитический. Известные точные решения уравнений собраны в справочниках [1], их можно получить в системах компьютерной алгебры Maple, Mathematica. Поиску численных и приближенных аналитических решений посвящены многочисленный работы, например, [2]. В последнее время для решения различных задач математики и естествознания получили распространение генетические алгоритмы. Суть генетического алгоритма состоит в получении из двух приближенных и хороших в каком-то смысле решений нового, лучшего, решения. В настоящей работе делается попытка применения такого алгоритма к решению дифференциального уравнения.

2. Хромосомы

Имеем дифференциальное уравнение
$$y' = F(y, x), \tag{1}$$
где $y' = dy/dx$. Начальное условие
$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$
Решение на интервале $[x_0, a]$ будем искать в виде суммы $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(x)$, n — длина хромосомы. Функции $\varphi_k(x)$ образуют гены хромосом X_i, $i = 1, ..., m$, где m — размер популяции. От поколения к поколению это число может меняться. Задаются множества функций Φ_k, из которых выбираются гены $\varphi_k \in \Phi_k$. В общем случае функции $\varphi_k(x)$ могут и не удовлетворять начальному условию. Пусть $\varphi_k(x_0) = f_k$. Коррекция генов по правилу $\psi_k(x) = \varphi_k(x) - f_k + y_0\mu_k$ при условии на поправочные коэффициенты $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k = 1$ приводит к выполнению начального условия (2) для функций $\psi_k(x)$. Для упрощения поправочные коэффициенты можно выбрать одинаковыми $\mu_k = 1/n$, $k = 1..n$.

Степень точности подобранного решения (целевая функция) определяется по формуле
$$Z_j = \sqrt{\Big(\max_{i=1..N}(y_j'(x_i) - F(y_j(x_i), x_i))\Big)^2 + \Big(\min_{i=1..N}(y_j'(x_i) - F(y_j(x_i), x_i))\Big)^2}, j = 1..n, \tag{3}$$
где y_j — функции-хромосомы.

Другой вариант целевой функции:
$$Z = \sum_{i=1}^{N}(y'(x_i) - F(y(x_i), x_i))^2. \tag{4}$$
Точки $x_0 < x_i < a$, в которых измеряется квадрат разности, можно расположить равномерно по области определения решения.

Еще один вариант $Z = \int\limits_{x_0}^{a}(y'(x_i) - F(y(x_i), x_i))^2 dx$. В этом случае, при вычислениях в системе Maple, время счета значительно больше.

3. Мутация генов

Процедура мутации случайным образом выбирает хромосому h_i, $i = 1..n$ и тип гена G_j, $j = 0..3$, который будем менять в этой хромосоме. Также случайным образом выбирается ген из начального генотипа аналогичного типа $G_{j,k}$, $k = 1..n$. Мутация таким образом состоит в замене некоторого гена в хромосоме $h_{i,j}$ на другой: $h_{i,j} = G_{j,k}$. Стоит отметить, что мутация может и не происходить, если значение $j = 0$, причем на каждом этапе рассматривается эта возможность. Будет ген мутировать или нет также определяется случайным образом. В данной реализации мутация не происходит с вероятностью 1/4. С этой же вероятностью определяется, какой именно тип гена будет мутировать.

4. Пример

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение:

$$xy_x - (2x+1)\cdot y + y^2 = -x^2. \tag{5}$$

Общее решение этого уравнения: $y(x) = x + \dfrac{x}{x+C}$, C — некоторая константа. Рассмотрим следующую задачу Коши

$$xy_x - (2x+1)y + y^2 = -x^2,\ y(1) = 1. \tag{6}$$

Множество начальных генов примем в виде $\Phi_{1,i} = i - 10$, $i = 1..m$, $\Phi_{2,i} = \dfrac{1}{x^{i-10}}$, $i = 1..m$ $\Phi_{3,i} = \dfrac{(-1)^i}{x^i+1}$, $i = 1..m, m = 21$.

Кроссинговер производиться по следующей схеме: из данного набора хромосом выбираются некоторые три хромосомы, из них выявляется лучшая, а далее происходит процесс скрещивания генов. Схема кроссинговера приведена ниже:

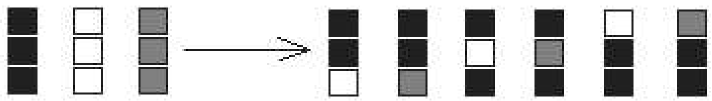

Рис.1. *Схема кроссинговера*

Как видно, хромосома с наименьшим значением целевой функции (выделена черным цветом), т.е. лучшая из трех имеющихся, занимает привилегированное положение. Ее гены находятся в каждой новой хромосоме, причем по два гена в каждой. Таким образом, гены из лучшей хромосомы точно попадут в следующее поколение:

$$h'_{1,j} = h_{1,j},\ j = 1,2,\quad h'_{1,j} = h_{2,j},\ j = 3,\quad h'_{2,j} = h_{1,j},\ j = 1,2,\quad h'_{2,j} = h_{3,j},\ j = 3,$$

$$h'_{3,j} = h_{1,j},\ j = 1,3,\quad h'_{3,j} = h_{2,j},\ j = 2,\quad h'_{4,j} = h_{1,j},\ j = 1,3,\quad h'_{4,j} = h_{3,j},\ j = 2,$$

$$h'_{5,j} = h_{1,j},\ j = 2,3,\quad h'_{5,j} = h_{2,j},\ j = 1,\quad h'_{6,j} = h_{1,j},\ j = 2,3,\quad h'_{6,j} = h_{3,j},\ j = 1.$$

Из полученных шести хромосом выбираем три лучшие хромосомы. Три оставшихся хромосомы отбрасываются и более не участвуют в формировании новых поколений. Аналогичный процесс производим и для оставшихся хромосом из начального набора. После осуществления кроссинговера получаем набор возможных решений уже нового поколения, по количеству совпадающий с начальной популяцией. После нескольких этапов скрещивания получаем решение.

Для поставленной задачи (1) решение было найдено за 5 этапов. Найденное решение имеет вид: $y(x) = x$ и совпадает с точным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00498-а).

Литература

[1] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[2] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994.

[3] Гладков Л.А., В.В.Курейчик, В.М.Курейчик. Генетические алгоритмы — М.: Физматлит, 2006.