
РОССИЙСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ТАТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РОССИЙСКАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ И ЯВЛЕНИЙ В
СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ»

РОССИЙСКИЙ СЕМИНАР

«НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТАТИСТИКА
В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И КОСМОЛОГИИ»

6-10 сентября 2010 г., Казань-Яльчик

ТРУДЫ СЕМИНАРА



Казань
Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет
ООО «Фолиантъ»
2010

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632
В87

РОССИЙСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ТАТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,
проф. Ю.Г.Игнатъева

В87 **Труды Российской летней школы «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» (ММ СКМ2) и Российского семинара «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии», 6-10 сентября 2010 г., Казань-Яльчик. - Казань: Изд-во «Фолиантъ», 2010. - 210 с.**

В сборник вошли труды Российской летней школы-семинара Gracos, посвященные математическому моделированию фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики (СКМ) и современным теоретическим проблемам нелинейной физики, в частности, релятивистской теории гравитации и космологии. Материалы, содержащиеся в сборнике, представляют оригинальные статьи и обзоры специалистов из различных научных центров России и ближнего Зарубежья, а также работы начинающих исследователей. Первый Российский семинар по математическому моделированию в СКМ проходил в Казани, в 2007 году.

Материалы сборника трудов предназначены для научных работников и аспирантов, специализирующихся в области математического и компьютерного моделирования, релятивистской теории гравитации, квантовой теории поля и космологии, а также для студентов старших курсов физико - математических отделений университетов.

ISBN 978-5-94990010-9

© 2010 Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет

© 2009 Лаборатория информационных технологий в математическом образовании Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

© ООО «Фолиантъ», оформление, 2010

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований

Оглавление

ЧАСТЬ 1. МАТЕРИАЛЫ ШКОЛЫ.

7

Г.Р. Адиятуллина// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Разработка математической модели системы аналитического тестирования в СКМ Maple 13	7
Т.Е. Владимирова. Фрактальная модель межкультурной коммуникации	13
Д.П. Голоскоков. Первая краевая задача нестационарной теплопроводности в полупространстве	17
Д.П. Голоскоков, А.П. Нырков, Т.П. Кныш, А.В. Васин, А.А. Кардаков, С.С. Соколов. Математические модели прикладных NP-полных задач	20
В.П. Дьяконов. Компьютерная математика в теоретических и экспериментальных научных исследованиях	27
Ю.Г. Игнатъев, Х.Х. Абдулла. Комплекс программ для математического моделирования нелинейных обобщенно-механических систем в системе компьютерной математики Maple	32
О.В. Ибушева. Управление движением мобильного робота с обходом подвижных препятствий	46
Э.Г. Исрафилова// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Компьютерное моделирование математических структур линейной алгебры и геометрии	47
С.В. Капустин. Моделирование поверхностей специальных видов в среде Mathematica	50
С.В. Капустина. Задачи геометрии дифференцируемых многообразий в среде Mathematica	56
М.Н. Кирсанов, С.В. Выльева. Генетический алгоритм для решения задачи Коши	58
Р.Е. Кристалинский. Определение методом А.Н.Крылова приближенного периодического решения уравнения математического маятника	60
Р.В. Магухин, О.В. Ибушева. Влияние парадокса дней рождения на криптографическую стойкость хеш-функций	61
М.Л. Михайлов// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Тензорные вычисления в пакете Maple для плоско-симметричного пространства электровакуума	63
Р.Г. Мухарлямов, О.В. Ибушева, А.А. Ахметов. Управление динамикой систем, содержащих элементы различной физической природы	65
А.М. Нигмедзянова. Исследование краевых задач N для одного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода методом потенциалов	66
Е.А. Осипов. Сумматорные и интегральные уравнения двоякопериодических задач дифракции упругих волн в пространстве	72
Л.И. Розакова// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Математическое моделирование объектов элементарной математики и их анимация в СКМ Maple	80
А.Р. Самигуллина// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Математическое моделирование структур линейной алгебры и аналитической геометрии и их графическая интерпретация в СКМ Maple	87
О.А. Сачкова// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/</i> Компьютерное моделирование объектов векторной алгебры и стереометрии в системе компьютерной математики Maple	94
Д.Н. Тумаков, А.Р. Тухватова . Дифракция электромагнитной волны на щели между полубесконечными пластинами	99
Ф.А. Хотова// <i>Научный руководитель проф. В.П. Дьяконов/</i> Спектральный анализ реальных осциллограмм в системе MATLAB	108
В.В. Черкасова// <i>Научный руководитель проф. О.В. Мантуров/</i> Разработка компьютерной модели задачи о качении шара средствами системы компьютерной математики Maple	115
О.А. Шапошникова// <i>Научный руководитель проф. В.П. Дьяконов/</i> Новые пакеты расширения по моделированию электронных схем в системе MatLab 2009b	119

О.А. Широкова. Метод возмущений в плоских задачах нелинейной фильтрации	123
А.Г.Ширяев// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/ Тензорные вычисления в пакете Maple для пространства электровакуумной плоской гравитационной волны</i>	123

ЧАСТЬ 2. ТРУДЫ СЕМИНАРА.

127

О.В. Бабурова, К.Н. Липкин, Б.Н. Фролов. Переменный космологический член в теории гравитации со скалярным полем в пространстве Вейля–Картана в формализме внешних форм	127
А.Б. Балакин, Э.С. Пранцузова. О движении частиц с изоспином в поле неминимального монополя Ву-Янга	127
А.М. Баранов. О фазовом переходе гравитационного поля в жидком шаре	132
А.М. Баранов, В.А. Иванов. О некоторых примерах применения эрмитовых и кэлеровых многообразий в ОТО	136
А.М. Баранов, А.Ю. Осипов. Моделирование астрофизических объектов со слоистой структурой в ОТО	141
А.М. Баранов, А.А. Шейкин. Об одной двуслойной модели гравитирующего статического шара	143
К.М. Белоцкий, А.А. Кириллов, С.Г. Рубин. О возможности обнаружения кластеров первичных черных дыр	146
V. Saha, Yu.P. Rybakov, G.N. Shikin, Yu.A. Popov. <i>Electromagnetic field with induced massive term: Case with spinor field</i>	147
Е.И. Бобровских, В.Ф. Панов. Нестационарные космологические модели с вращением типа II по Бьянки	152
С.В. Болохов. Конформные преобразования в моделях Калуцы-Клейна с компактификацией на тор	153
К.А. Бронников. Кротовые норы - некоторые новые результаты	153
К.А. Bronnikov, M.V. Skvortsova, A.A. Starobinsky. <i>Notes on wormhole existence in scalar-tensor and $f(R)$ gravity</i>	154
К.А. Bronnikov, M.S. Chernakova. <i>On a general class of brane-world black holes and wormholes</i>	154
Ю.С. Владимиров. Состояние и перспективы реляционного подхода к физике и геометрии	154
В.В. Гутин// <i>Научный руководитель В.Ф. Панов/ Проблема T-симметрии: понижение порядка уравнений движения</i>	156
Bogdan G. Dimitrov. <i>Perturbative Gravity Theory on a Curved Background and Its Importance for Gravitational Light - Ray Deflection Experiments</i>	157
У.Н. Закиров. Уравнения возмущенного движения сосредоточенной переменной массы (СПМ) в теории Калуца-Клейна	162
Ф.Ш. Зарипов. Обобщение уравнений теории индуцированной гравитации	163
Д.Ю. Игнатъев. Космологическая эволюция неравновесной анизотропной плазмы	164
Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов. Точное решение самосогласованной системы уравнений релятивистской магнитной гидродинамики для анизотропной плазмы на фоне метрики Бонди-Пирани-Робинсона	164
Ю.Г. Игнатъев, Р.Ф. Мифтахов. Математическое моделирование космологической эволюции вырожденной Ферми-системы со скалярным взаимодействием частиц в СКМ Mathematica	178
П.О. Казинский, М.А. Шипуля. Неэкстенсивные поправки в однопетлевой Ω -потенциал квантовых полей с квадратичным законом дисперсии	181
А.С. Киселев, В.Г. Кречет, Б.Н. Фролов. Применение компьютерных символьных вычислений при исследовании 5-мерной модели физических взаимодействий	187
S.M. Kozyrev. <i>Mathematical modelling composite stars an wormholes in Einstein and Jordan-Brans-Dicke</i>	188
А.С. Кубасов. Новый метод построения инфляционных решений в киральной космологической модели	193
О.Н. Кучумов// <i>Научный руководитель проф. Ю.Г. Игнатъев/ Математическое моделирование спонтанного нарушения симметрии в релятивистской статистической системе в СКМ Maple</i>	195
Е.В. Кувшинова, В.Ф. Панов. Квантовое рождение вселенной типа IX по Бьянки со сдвигом	197
Е.В. Кувшинова, В.Ф. Панов, О.В. Сандакова. Квантовое рождение вселенной с вращением типа VIII по Бьянки	197
В.Н. Мельников. Гравитация, космология и переход к новым определениям единиц СИ	198
I.S. Nurgaliev. <i>Accelerating expansion as local isotropic rotation</i>	198
I.S. Nurgaliev. <i>Not singular and not dark universe</i>	199
А.А. Попов. <i>Self-force on a scalar point charge in the long throat</i>	199

- [3] Широков, П. А. Интерпретация и метрика квадратичных геометрий. Ч. I. Интерпретация неевклидовых геометрий. – В сб.: Избранные работы по геометрии / П. А. Широков. – Казань: Изд-во КГУ, 1966. – С. 77.
- [4] Gray, A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 2nd ed/ – CRC Press, 1997.

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

М.Н. Кирсанов¹, С.В. Выльева²

¹Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва,

²Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва

¹E-mail: c216@yandex.ru, ²E-mail: sova_ws@mail.ru

Аннотация. Предлагаются варианты генетического алгоритма для решения начальной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Обсуждается выбор начальной популяции, метод получения последующих поколений и оценка погрешности полученного решения.

1. Введение

Для поиска решения дифференциального уравнения традиционно используются три направления: поиска аналитического решения, численный метод решения и приближенный аналитический. Известные точные решения уравнений собраны в справочниках [1], их можно получить в системах компьютерной алгебры Maple, Mathematica. Поиску численных и приближенных аналитических решений посвящены многочисленные работы, например, [2]. В последнее время для решения различных задач математики и естествознания получили распространение генетические алгоритмы. Суть генетического алгоритма состоит в получении из двух приближенных и хороших в каком-то смысле решений нового, лучшего, решения. В настоящей работе делается попытка применения такого алгоритма к решению дифференциального уравнения.

2. Хромосомы

Имеем дифференциальное уравнение

$$y' = F(y, x), \quad (1)$$

где $y' = dy/dx$. Начальное условие

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Решение на интервале $[x_0, a]$ будем искать в виде суммы $y = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x)$, n – длина хромосомы. Функции $\varphi_k(x)$ образуют гены хромосом X_i , $i = 1, \dots, m$, где m – размер популяции. От поколения к поколению это число может меняться. Задаются множества функций Φ_k , из которых выбираются гены $\varphi_k \in \Phi_k$. В общем случае функции $\varphi_k(x)$ могут и не удовлетворять начальному условию. Пусть $\varphi_k(x_0) = f_k$. Коррекция генов по правилу $\psi_k(x) = \varphi_k(x) - f_k + y_0 \mu_k$ при условии на поправочные коэффициенты $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$ приводит к выполнению начального условия (2) для функций $\psi_k(x)$. Для упрощения поправочные коэффициенты можно выбрать одинаковыми $\mu_k = 1/n$, $k = 1..n$.

Степень точности подобранного решения (целевая функция) определяется по формуле

$$Z_j = \sqrt{\left(\max_{i=1..N} (y'_j(x_i) - F(y_j(x_i), x_i))\right)^2 + \left(\min_{i=1..N} (y'_j(x_i) - F(y_j(x_i), x_i))\right)^2}, \quad j = 1..n, \quad (3)$$

где y_j – функции-хромосомы.

Другой вариант целевой функции:

$$Z = \sum_{i=1}^N (y'(x_i) - F(y(x_i), x_i))^2. \quad (4)$$

Точки $x_0 < x_i < a$, в которых измеряется квадрат разности, можно расположить равномерно по области определения решения.

Еще один вариант $Z = \int_{x_0}^a (y'(x_i) - F(y(x_i), x_i))^2 dx$. В этом случае, при вычислениях в системе Maple, время счета значительно больше.

3. Мутация генов

Процедура мутации случайным образом выбирает хромосому h_i , $i = 1..n$ и тип гена G_j , $j = 0..3$, который будем менять в этой хромосоме. Также случайным образом выбирается ген из начального генотипа аналогичного типа $G_{j,k}$, $k = 1..n$. Мутация таким образом состоит в замене некоторого гена в хромосоме $h_{i,j}$ на другой: $h_{i,j} = G_{j,k}$. Стоит отметить, что мутация может и не происходить, если значение $j = 0$, причем на каждом этапе рассматривается эта возможность. Будет ген мутировать или нет также определяется случайным образом. В данной реализации мутация не происходит с вероятностью $1/4$. С этой же вероятностью определяется, какой именно тип гена будет мутировать.

4. Пример

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение:

$$xy_x - (2x + 1) \cdot y + y^2 = -x^2. \tag{5}$$

Общее решение этого уравнения: $y(x) = x + \frac{x}{x + C}$, C — некоторая константа. Рассмотрим следующую задачу Коши

$$xy_x - (2x + 1)y + y^2 = -x^2, \quad y(1) = 1. \tag{6}$$

Множество начальных генов примем в виде $\Phi_{1,i} = i - 10$, $i = 1..m$, $\Phi_{2,i} = \frac{1}{x^{i-10}}$, $i = 1..m$, $\Phi_{3,i} = \frac{(-1)^i}{x^i + 1}$, $i = 1..m$, $m = 21$.

Кроссинговер производится по следующей схеме: из данного набора хромосом выбираются некоторые три хромосомы, из них выявляется лучшая, а далее происходит процесс скрещивания генов. Схема кроссинговера приведена ниже:



Рис.1. Схема кроссинговера

Как видно, хромосома с наименьшим значением целевой функции (выделена черным цветом), т.е. лучшая из трех имеющихся, занимает привилегированное положение. Ее гены находятся в каждой новой хромосоме, причем по два гена в каждой. Таким образом, гены из лучшей хромосомы точно попадут в следующее поколение:

$$\begin{aligned} h'_{1,j} &= h_{1,j}, \quad j = 1, 2, & h'_{1,j} &= h_{2,j}, \quad j = 3, & h'_{2,j} &= h_{1,j}, \quad j = 1, 2, & h'_{2,j} &= h_{3,j}, \quad j = 3, \\ h'_{3,j} &= h_{1,j}, \quad j = 1, 3, & h'_{3,j} &= h_{2,j}, \quad j = 2, & h'_{4,j} &= h_{1,j}, \quad j = 1, 3, & h'_{4,j} &= h_{3,j}, \quad j = 2, \\ h'_{5,j} &= h_{1,j}, \quad j = 2, 3, & h'_{5,j} &= h_{2,j}, \quad j = 1, & h'_{6,j} &= h_{1,j}, \quad j = 2, 3, & h'_{6,j} &= h_{3,j}, \quad j = 1. \end{aligned}$$

Из полученных шести хромосом выбираем три лучшие хромосомы. Три оставшихся хромосомы отбрасываются и более не участвуют в формировании новых поколений. Аналогичный процесс производим и для оставшихся хромосом из начального набора. После осуществления кроссинговера получаем набор возможных решений уже нового поколения, по количеству совпадающий с начальной популяцией. После нескольких этапов скрещивания получаем решение.

Для поставленной задачи (1) решение было найдено за 5 этапов. Найденное решение имеет вид: $y(x) = x$ и совпадает с точным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00498-а).

Литература

[1] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
 [2] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994.
 [3] Гладков Л.А., В.В.Курейчик, В.М.Курейчик. Генетические алгоритмы — М.: Физматлит, 2006.