Шеффера обозначают функцию $\overline{(x_1 \wedge x_2)}$. Отрицание $\neg$ и конъюнкцию $\wedge$ нетрудно записать с помощью одного только штриха Шеффера:

$$\overline{x} = \overline{(x \wedge x)} = x \mid x,$$

$$x_1 \wedge x_2 = \overline{(x_1 \mid x_2)} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2),$$

поэтому система Σ_2 сводится к Σ_5.

Дизъюнкцию и отрицание выразим с помощью стрелки Пирса $x_1 \downarrow x_2 = \overline{(x_1 \vee x_2)}$:

$$\overline{x} = \overline{(x \vee x)} = x \downarrow x,$$

$$x_1 \vee x_2 = \overline{(x_1 \downarrow x_2)} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2),$$

и система Σ_6 сведена к полной системе Σ_3.

Пример 3.37. Система $\Sigma_7 = \{\wedge, \oplus, 1\}$, где $\oplus$ представляет сложение по модулю 2 (неравнозначность $\overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$, исключающее «или») функционально полная. Напомним, что $x_1 \oplus x_2 = x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2$, поэтому

$$\overline{x} = x \cdot 0 \vee \overline{x} \cdot 1 = x \oplus 1, \tag{3.25}$$

и система Σ_7 сводится к системе Σ_2.

Последняя система логических функций Σ_7 связана с возможностью представления логической функции в виде *полинома* (многочлена) *Жегалкина*.

Полиномом Жегалкина называют любую логическую функцию, записанную в символах сложения по модулю 2 и конъюнкции. Следующая формула задает общий вид такого полинома:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_m\}\in \boldsymbol{B}(\{1,2,\ldots,n\})}(\operatorname{mod}2)\, a_{i_1 i_2\ldots i_m} x_{i_1} x_{i_2}\ldots x_{i_m} \quad . \tag{3.26}$$

В формуле (3.26) множество индексов $\{i_1,i_2,\ldots,i_m\}$ есть элемент булеана множества $\{1,2,\ldots,n\}$. Суммирование по модулю два в (3.26) проводится по всем элементам булеана, причем пустому подмножеству булеана соответствует коэффициент a_0.

Пример 3.38. При $n=3$ произвольный полином Жегалкина имеет вид:

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{123}x_1x_2x_3\oplus a_{12}x_1x_2\oplus a_{13}x_1x_3\oplus a_{23}x_2x_3\oplus$$

$$\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus a_3x_3\oplus a_0 \quad . \tag{3.27}$$

Следующая формула (3.28) представляет линейный полином Жегалкина (многочлен первой степени):

$$f(x_1,\ldots,x_n)=a_nx_n\oplus a_{n-1}x_{n-1}\oplus\ldots\oplus a_1x_1\oplus a_0=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{mod}2)\, a_ix_i\oplus a_0 \quad . \tag{3.28}$$

Пример 3.39. Записать в виде полинома Жегалкина логическую функцию $x_1x_2\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Сначала отметим, что для операции сложения по модулю 2 справедливы следующие равенства (все эти равенства нетрудно подтвердить, составив соответствующие таблицы значений логических функций)

$$1\oplus 0=0\ , \qquad x\oplus 0=x\ , \qquad x\oplus x=0$$

$$x_1\oplus x_2=x_2\oplus x_1\ ,$$

$$x_1(x_2\oplus x_3)=x_1x_2\oplus x_1x_3\ .$$

Теперь выразим дизъюнкцию через операцию $\oplus$:

$$x_1\vee x_2=\overline{\overline{x}_1\overline{x}_2}=\overline{(x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)}=(x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)\oplus 1=$$

$$=x_1x_2\oplus x_1\oplus x_2\oplus 1\oplus 1=x_1x_2\oplus x_1\oplus x_2\oplus 0=$$

$$=x_1x_2\oplus x_1\oplus x_2\ . \qquad (3.29)$$

Используя равенства (3.29) и (3.25), получим

$$x_1x_2\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}=x_1x_2\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\oplus x_1x_2\oplus\overline{x_1}\,\overline{x_2}=$$

$$=0\oplus x_1x_2\oplus(x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)=x_1x_2\oplus x_1x_2\oplus x_1\oplus x_2\oplus 1=$$

$$=0\oplus x_1\oplus x_2\oplus 1=x_1\oplus x_2\oplus 1\,.$$

Нетрудно построить представление логической функции в виде полинома Жегалкина и в том случае, когда функция задается таблицей истинности.

Пример 3.40. Построить полином Жегалкина функции $f(x_1,x_2,x_3)$, заданной таблицей 3.26.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Табл. 3.26

Поскольку функция зависит от трех переменных, общий вид полинома Жегалкина задается равенством (3.27). Подстановка в (3.27) наборов значений переменных (x_1,x_2,x_3) — последовательностей нулей и единиц, приводит к следующим соотношениям для коэффициентов полинома:

$$f(0,0,0) = a_0,$$

$$f(1,0,0) = a_1 \oplus a_0, \qquad f(1,1,0) = a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0,$$

$$f(0,1,0) = a_2 \oplus a_0, \qquad f(1,0,1) = a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0,$$

$$f(0,0,1) = a_3 \oplus a_0, \qquad f(0,1,1) = a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0,$$

$$f(1,1,1) = a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 .$$

Для вычисления коэффициентов многочлена необходимо уметь решать простейшие уравнения над полем $\boldsymbol{Z}_2$. Таблица 3.27 решений таких уравнений согласована с таблицей 3.20.

Уравнение	*Решение*
$a \oplus 1 = 1$	$a = 0$
$a \oplus 0 = 1$	$a = 1$
$a \oplus 1 = 0$	$a = 1$
$a \oplus 0 = 0$	$a = 0$

Табл. 3.27

Теперь вычислим коэффициенты полинома Жегалкина для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблицей 3.27.

Поскольку $f(0,0,0) = 1$, коэффициент $a_0 = 1$;

$f(1,0,0) = a_1 \oplus a_0 = a_1 \oplus 1 = 0$, следовательно, $a_1 = 1$;

$f(0,1,0) = a_2 \oplus a_0 = a_2 \oplus 1 = 1$, поэтому $a_2 = 0$;

$f(0,0,1) = a_3 \oplus a_0 = a_3 \oplus 1 = 0$, значит, $a_3 = 1$;

$f(1,1,0) = a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = a_{12} \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = a_{12} \oplus 0 = 1$,

поэтому $a_{12} = 1$;

$f(1,0,1) = a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0 = a_{13} \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = a_{13} \oplus 1 = 0$,

поэтому $a_{13} = 1$;

$f(0,1,1) = a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = a_{23} \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = a_{23} \oplus 0 = 0$,

следовательно, $a_{23} = 0$;

$f(1,1,1) = a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 =$

$= a_{123} \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = a_{123} \oplus 1 = 1$, поэтому $a_{123} = 0$.

В результате

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus 1 \ .$$