

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ордена ЛЕНИНА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра теоретической механики

К. Д. ЗВЕРЕВА

Утверждено
Учебным управлением МЭИ
в качестве учебного пособия
для студентов

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО СТАТИКЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основные положения методики решения задач статики, использованные в данной работе, изложены в работе М. Г. Слободянского и А. М. Пивоварова «Конспект лекций по статике», МЭИ, 1967.

Методика дает общий подход к решению задач статики.

В настоящем пособии, предназначенном для студентов вечерних и дневных факультетов, иллюстрируется применение методики к решению задач статики. Автор настоящего пособия стремился подобрать типичные задачи, аналогичные тем, которые решаются на упражнениях студентами МЭИ.

Часть первая

ВВЕДЕНИЕ. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

Глава первая

ВВЕДЕНИЕ. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Основные понятия и определения

Статика разделяется на геометрическую и аналитическую. Аналитическая статика (принцип возможных перемещений) в этом пособии не излагается. Геометрическая статика изучает относительный покой абсолютно твердого тела по отношению к какому-то другому телу (например, земле), которое мы принимаем за неподвижное. Абсолютно твердым телом называется такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется. Дадим некоторые основные понятия и определения статики.

Сила характеризует меру механического воздействия на рассматриваемое нами тело со стороны другого тела. Сила — вектор, будем обозначать ее буквами \vec{P} , \vec{Q} , \vec{S} , \vec{R} , \vec{F} , \vec{T} , \vec{N} и т. д. Совокупность сил, приложенных к одному телу, называется системой сил и обозначается $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ или $(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, \vec{S}_n)$ и т. д.

Если под действием данной системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ тело находится в покое по отношению к выбранной системе координат, то говорят, что такая система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ эквивалентна нулю, или, что то же самое, находится в равновесии и записывают это так:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

Две системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ и $(\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k)$ называются эквивалентными друг другу, если, действуя на одно и то же тело порознь, они оставляют его пребывающим в одном и том же состоянии покоя или движения и записывается это так:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k).$$

Равнодействующая. Если данная система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ эквивалентна одной силе \bar{R} , то сила \bar{R} называется равнодействующей данной системы $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$; записывается это так $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim \bar{R}$.

Сила $-\bar{R}$ называется уравновешивающей, если $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n - \bar{R}) \sim 0$.

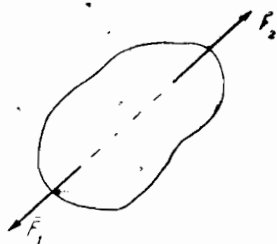
§ 2. Аксиомы статики

Аксиома первая.

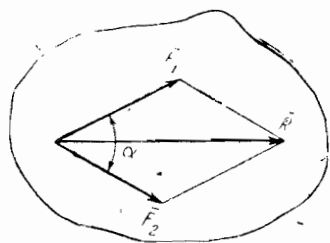
Для равновесия абсолютно твердого тела, находящегося под действием 2-х сил, необходимо и достаточно, чтобы силы были равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны (фиг. 1).

Аксиома вторая.

Если на абсолютно твердое тело действует система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$, то данное состояние покоя или движения тела не изменится, если к этой системе сил присоединить или



Фиг. 1



Фиг. 2

от нее отбросить какую-либо другую систему сил, эквивалентную нулю.

Из этих 2-х аксиом следует, что сила — вектор скользящий.

Аксиома третья.

Две силы, приложенные в одной точке тела, можно заменить одной — равнодействующей. Равнодействующая равна геометрической сумме этих сил (фиг. 2):

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}; \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Численное значение силы R может быть вычислено по следующей формуле:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

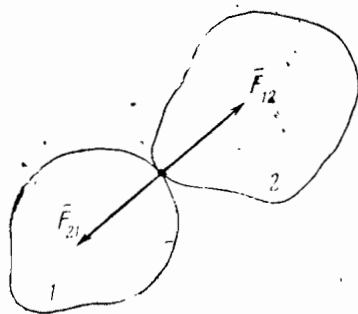
Эта аксиома применима и к частному случаю, когда силы направлены по одной прямой. Могут быть 2 случая:

1) $\alpha = 0$ $R = F_1 + F_2$.

2) $\alpha = \pi$ $R = |F_1 - F_2|$.

Аксиома четвертая. (Аксиома о действии и противодействии);

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены по одной прямой в разные стороны (фиг. 3). \vec{F}_{12} — действие 1-го тела на второе, \vec{F}_{21} — дей-



Фиг. 3

ствие 2-го на первое. Эта аксиома имеет общеизвестную краткую формулировку: действие равно противодействию.

Связи

Тело, которое может занимать любое положение в пространстве, называется свободным.

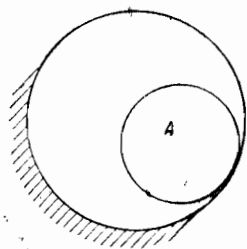
Несвободное тело — такое тело, перемещение которого в каком-либо направлении невозможно или ограничено.

Условия, которые препятствуют перемещению данного тела в том или ином направлении, называются связями.

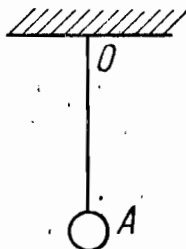
Связями могут быть как абсолютно твердые тела, так и гибкие (нити).

Примеры: а) Внутри полой сферы находится шарик А (фиг. 4). Сфера является для шарика связью, ибо шарик может перемещаться только в пространстве, заключенном внутри сферы. Перейти же за поверхность сферы и очутиться вне ее шарик не может.

б) Шарик висит на нити OA (фиг. 5) ($OA=l$). (Нить предполагается абсолютно гибкой и нерастяжимой). Так как нить нерастяжимая, то шарик не может удалиться от точки O



Фиг. 4



Фиг. 5

на расстояние более чем l . Значит, шарик может находиться либо на поверхности сферы радиуса l (если нить натянута), либо внутри этой сферы (если нить ослаблена).

Следовательно, связь действует на рассматриваемое нами тело с какой-то силой, препятствующей его перемещению в том или ином направлении.

Сила, с которой связь действует на данное тело, называется силой реакции связи или реакцией связи.

Аксиома пятая (аксиома о связях).

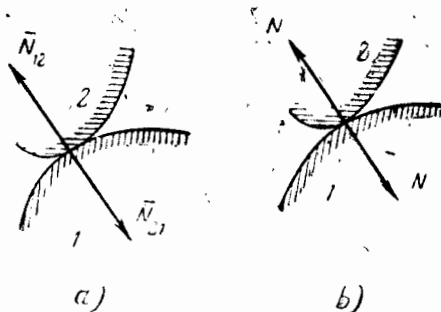
Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действия силами реакций.

Основные виды связей

1-й вид связи.

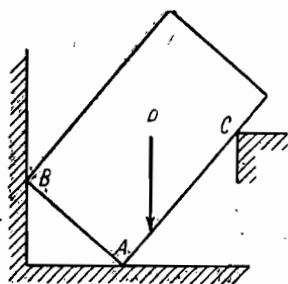
Связь, полученная в результате соприкосновения 2-х абсолютно гладких поверхностей (абсолютно гладкими поверхностями называются такие поверхности, трением между которыми можно пренебречь). В точке касания поверхностей

возникает реакция, направленная по нормали к соприкасающимся поверхностям (фиг. 6а). На фиг. 6а сила \vec{N}_{12} — это сила, с которой тело 1 действует на тело 2, сила \vec{N}_{21} , это —

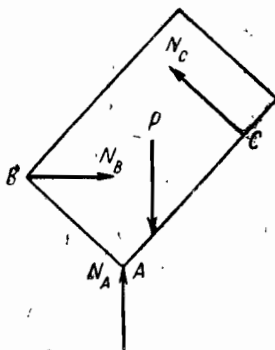


Фиг. 6

сила, с которой тело 2 действует на тело 1. На основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия $\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}$. Абсолютные же значения сил равны. Это можно записать так: $|\vec{N}_{12}| = |\vec{N}_{21}|$, или $N_{12} = N_{21}$. Условимся в дальнейшем равные по величине и противоположно направленные



Фиг. 7



Фиг. 8

ые силы обозначать одной буквой и на чертеже знак вектора (черточка) над силой не ставить, тогда мы получим картину, изображенную на фиг. 6б.

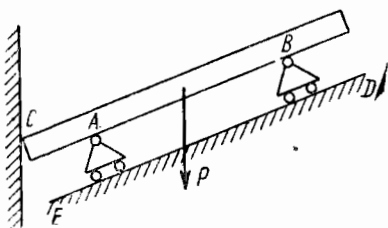
Примеры:

1-й пример. Брусок опирается в точке A на пол, в точке B — на стену и в точке C — на острие. Предполагая, что все поверхности — гладкие, изобразим силы, с которыми связи в точках A, B, C действуют на брусок (фиг. 7).

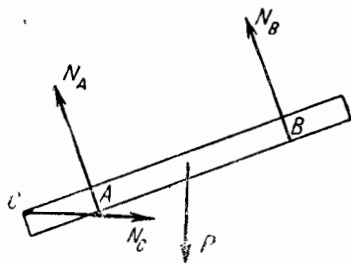
Применяем аксиому о связях — отбрасываем связи в точках A, B, C и заменяем их действие реакциями. Чтобы правильно установить, в какую сторону направлены реакции, полезно помнить следующее:

Реакция — это сила, с которой действует отброшенное нами тело (связь) на данное тело, равновесие которого мы рассматриваем. Так, в нашем случае (фиг. 8), \bar{N}_A — действие со стороны пола на брусок, \bar{N}_B — сила с которой стена действует на брусок, \bar{N}_C — действие со стороны острия C на брусок. Так как реакции связей должны быть направлены по общей нормали к 2-м соприкасающимся поверхностям, то во всех 3-х точках линии действия реакций будут направлены перпендикулярно соответствующим поверхностям.

2-й пример (фиг. 9). Балка весом P кг в точках A и B лежит на катках, расположенных на наклонной плоскости ED , образующей угол α с горизонтом, а в точке C упирается в стену. (Катками называются связи, препятствующие только перемещению тела перпендикулярно некоторой плоскости, на



Фиг. 9



Фиг. 10

которой расположены катки и допускающие его перемещения вдоль этой плоскости). Катки условно изображаются так, как показано на фиг. 9.

Считая, что все поверхности гладкие, нарисовать силы, действующие на балку со стороны стены и катков.

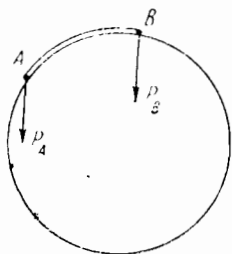
Освободим балку от связей в точках A, B и C , получим следующую картину (фиг. 10).

При этом реакции катков \bar{N}_A и \bar{N}_B приложены в точках A и B перпендикулярно плоскости ED , на которой расположены катки, а в точке C перпендикулярно плоскости опоры. 2-й тип связей.

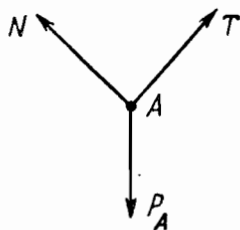
Связь, осуществленная с помощью абсолютно-гибкой нерастяжимой нити:

Реакция нити (натяжение нити в данной точке) направлена по касательной к нити, причем так, что нить работает всегда на растяжение.

Пример. Два шарика A и B , весом P_A и P_B каждый, связаны нитью AB и лежат на гладкой сфере. Нарисовать силы, с которыми нить и сфера действуют на шарик A (фиг. 11) (размерами шариков пренебрегаем).



Фиг. 11



Фиг. 12

Для шарика A связями являются сфера (обозначим силу, с которой сфера действует на шарик \bar{N}) и нить AB . Сила, с которой нить AB действует на шарик A (натяжение нити), направлена по касательной в точке A к дуге AB (обозначим ее \bar{T}). Отбрасывая связи, мы получим следующую картину (фиг. 12). Если нить расположена по прямой, то реакция нити (натяжение нити) направлена по нити.

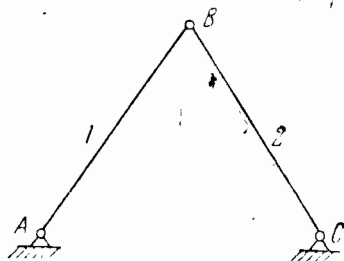
3-й тип связи — шарнир.

Шарниры бывают цилиндрические и сферические. При определении реакций шарниров в обоих случаях будем пренебрегать трением в шарнирах и их размерами.

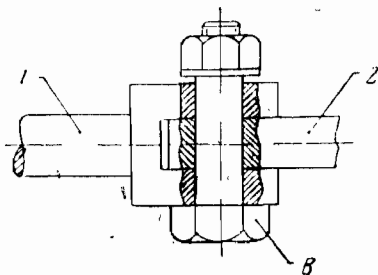
а) Цилиндрические шарниры

Примерами цилиндрических шарниров могут служить: вал в подшипниках или блок на оси, или соединение стержней, представленное на фиг. 13. Два стержня AB и BC соеди-

нены друг с другом в точке B и присоединены к неподвижным стойкам A и C цилиндрическими шарнирами. Шарниры принято обозначать кружочками (фиг. 13). Рассмотрим более подробно устройство одного из шарниров, например B

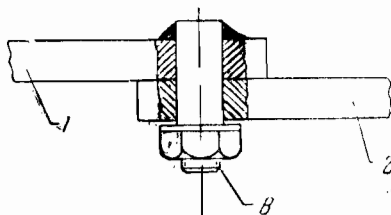


Фиг. 13



Фиг. 14

(фиг. 14). Болт B вставляется в отверстия стержней 1 и 2 и соединяет их между собой. Причем в этом соединении нет непосредственного воздействия одного стержня на другой, так как силы передаются через шарнирный болт B . Можно было бы это соединение сделать по-иному, а именно болт B жестко присоединить к одному из стержней (безразлично какому) например к 1 , тогда получим следующую картину (фиг. 15).

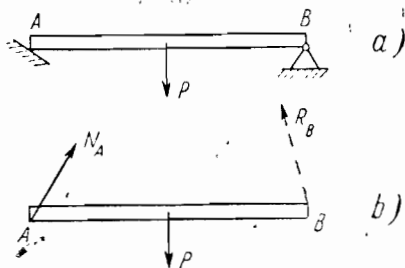


Фиг. 15

Во всех указанных случаях реакция, которая возникает при отбрасывании цилиндрических шарниров, расположена в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндров (в плоскости чертежа для фиг. 13), и неизвестна ни по величине, ни по

направлению. Силу, неизвестную ни по величине, ни по направлению, условимся обозначить пунктиром со стрелкой.

Пример. Балка AB весом $P_{кг}$ опирается одним концом A на наклонную плоскость, а концом B прикреплена шарнир-



Фиг. 16

но к неподвижной стойке. Нарисовать силы действия со стороны плоскости и шарнира на балку (фиг. 16а).

Отбрасываем связи в точках A и B , заменяя их действие реакциями: в точке A реакция \bar{N}_A перпендикулярна опорной плоскости, на которую опирается балка AB ; в точке B — реакция \bar{R}_B со стороны шарнира на балку неизвестна ни по величине, ни по направлению: мы рисуем ее в произвольном направлении — пунктиром со стрелкой (см. фиг. 16б).

б) Сферические шарниры и подпятники

1. Шар, вложенный внутрь полой сферы с малым зазором, образует соединение, называемое сферическим шарниром (фиг. 17а),

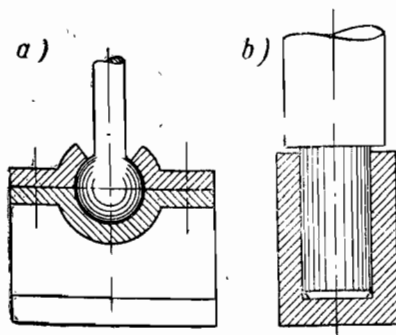
2. Подпятник, не вдаваясь в конструктивные подробности, можно схематично представить, как вал, вставленный с небольшим зазором внутрь полого цилиндрического стакана и опирающийся на его дно (фиг. 17б).

В отличие от цилиндрического шарнира, в подпятнике возникает реакция не только в плоскости, перпендикулярной оси вала, но также и реакция, направленная по оси вала. Размерами сферического шарнира и подпятника пренебрегаем. На чертежах сферический шарнир схематично изображается, так же как и цилиндрический шарнир, кружочком. Во избежании путаницы в условии задачи особо указывается,

что шарнир — сферический. И в сферическом шарнире и в подпятнике реакция не определена по величине и может занимать любое положение в пространстве.

6-я аксиома (аксиома отвердевания)

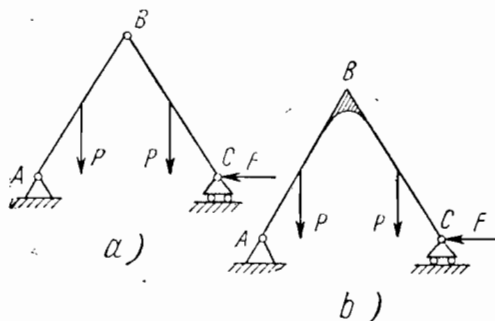
Если изменяемая система тел находится в равновесии,



Фиг. 17

то равновесие такой системы не нарушится, если она внезапно отвердеет.

Пример. Система, состоящая из 2-х стержней AB и BC весом P кг каждый, имеющая в точках A и B шарниры, а в



Фиг. 18

точке C опирающаяся катком на горизонтальную плоскость, удерживается в равновесии горизонтальной силой F кг (фиг. 18а).

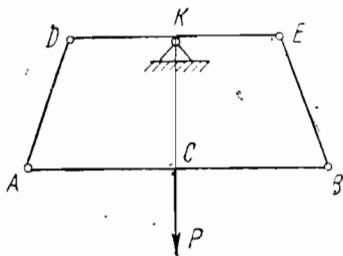
Равновесие системы не нарушится, если стержень AB соединить со стержнем BC не шарниром (фиг. 18a), а жестко (фиг. 18b).

Аксиома отвердевания имеет большое значение, так как дает возможность распространить все аксиомы и выводы, вытекающие из них, применимые для одного абсолютно твердого тела, на систему тел, если известно заранее, что эта система находится в покое.

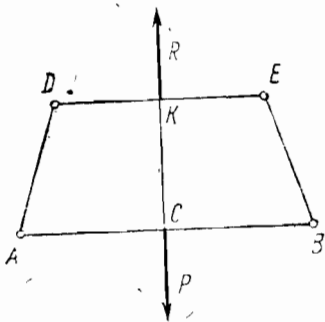
§ 3. Примеры, иллюстрирующие непосредственное применение аксиом статики при решении задач

Пример 1. 4 стержня — AB , BE , ED , DA (фиг. 19), соединенные шарнирами A , D , E , B , образуют равнобокую трапецию. Стержень DE горизонтален. Вес стержня AB — P кг. Весом остальных стержней пренебречь. Определить реакцию шарнира в точке K (точки K и C лежат на одной вертикали), считая, что система покоится.

Так как система $ABED$ находится в покое, то можно применить аксиому отвердевания и рассматривать систему



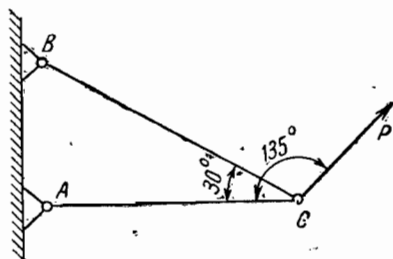
Фиг. 19



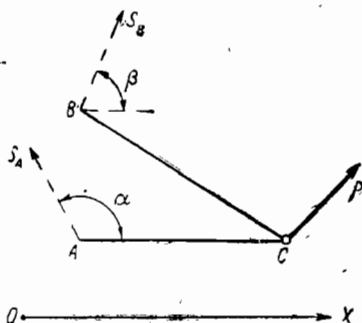
Фиг. 20

$ABED$, как абсолютно твердое тело. Применим к этому «абсолютно твердому телу» аксиому о связях. Отбросим шарнир в точке K и заменим его реакцией \overline{R} , которая неизвестна ни по величине, ни по направлению. Но так как наше «абсолютно твердое тело» находится в покое под действием 2-х сил R и P , то на основании 1-ой аксиомы \overline{R} направлена вертикально вверх. $R = P$ кг (фиг. 20).

Пример 2. Два, невесомых стержня (фиг. 21) AC и CB соединены друг с другом цилиндрическим шарниром C , а в точках A и B прикреплены с помощью цилиндрических шарниров к неподвижным стойкам. Стержень AC — горизонтален, а CB образует с ним угол 30° . На шарнирный болт C (узел) действует сила P , составляющая с AC угол 135° .



Фиг. 21



Фиг. 22

Определить реакции в точках A и B .

Наша система состоит из 3-х тел — стержней AC , BC и шарнирного болта C .

Применим 6-ую аксиому — аксиому отвердевания и рассмотрим систему ABC как одно абсолютно твердое тело.

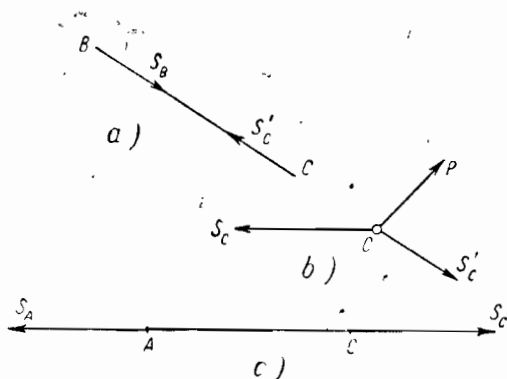
Затем к этому «телу» применим аксиому 5-ую — аксиому о связях, т. е. отбросим связи, заменив их реакциями.

Реакции в шарнирах A и B неизвестны ни по величине, ни по направлению (они расположены в плоскости чертежа).

Изобразим их пунктиром со стрелкой и назовем \overline{S}_A и \overline{S}_B (фиг. 22). Каждая из сил \overline{S}_A и \overline{S}_B содержит два неизвестных. Неизвестны абсолютная величина вектора и его направление. В плоскости направление вектора определяется одним параметром (углом, который образует вектор с какой-то осью — например осью x) (фиг. 22 ось x).

Итак, теперь мы имеем как бы одно тело, на которое действуют известная сила \overline{P} и неизвестные ни по величине, ни по направлению силы \overline{S}_A , \overline{S}_B (4 неизвестных — $|\overline{S}_A|$, $|\overline{S}_B|$, α , β).

Для определения \overline{S}_A , \overline{S}_B по величине и направлению, разобьем нашу систему тел на отдельные тела и воспользуемся аксиомой о равенстве сил действия и противодействия.



Фиг. 23

Рассмотрим сначала стержень AC , отбросив в точке C шарнир (фиг. 23c).

На стержень действует две силы: реакция шарнира A , (\overline{S}_A) и реакция шарнира C , (\overline{S}_C). Так как стержень находится в равновесии, то на основании 1-ой аксиомы \overline{S}_A и \overline{S}_C направлены по одной прямой в разные стороны, причем $S_A = S_C$, а стрелки поставлены пока произвольно; этот вопрос рассмотрен подробно в примере 1, § 4.

Рассмотрим стержень CB : на него действует тоже две силы: \overline{S}_B , \overline{S}'_C ; мы получаем так же как и в предыдущем случае, что $S_B = S'_C$ и направлены по стержню BC (фиг. 23a).

Рассмотрим теперь шарнирный болт C (фиг. 23b), на него действуют заданная сила \overline{P} и реакции со стороны стержней AC и CB , которые по аксиоме о действии и противодействии равны $-\overline{S}_C$ и $-\overline{S}'_C$; знак минус указывает, что эти силы направлены в сторону, противоположную тем силам, которые действуют со стороны шарнира на стержни AC и BC (фиг. 23a,b,c).

Так как болт C находится в покое под действием трех непараллельных сил, то равнодействующая каких-

либо двух из них (например, $-\bar{S}_C$, $-\bar{S}'_C$) должна уравновешивать третью силу (силу \bar{P}).

На фиг. 24 построен параллелограмм, стороны которого параллельны $-\bar{S}_C$ и $-\bar{S}'_C$, а диагональ равна силе, уравновешивающей силу \bar{P} (см. фиг. 24).

Рассмотрим треугольник EFC .

Применяя теорему синусов, получим:

$$\frac{S'_C}{\sin 45^\circ} = \frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{S_C}{\sin 105^\circ} \quad (\sin 105^\circ = \sin 75^\circ = 0,96)$$

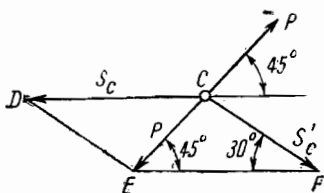
$$S'_C = S_B = \frac{P \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = P\sqrt{2} \approx 1,4 P \text{ кг}$$

$$S_C = S_A = \frac{P \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2P}{0,96} \approx 2,1 P \text{ кг.}$$

$$\alpha = 0^\circ; \quad \beta = -30^\circ$$

Анализируя решение данной задачи, мы приходим к следующему важному выводу: «Если в системе имеются невесомые не нагруженные стержни, соединенные с другими телами системы своими концами шарнирно, и все внешние по отношению к стержням силы приложены только в узлах (в шарнирах), то реакции со стороны шарниров на стержни направлены по стержням» (иногда, при решении задач такие стержни считают свя-

зьями, отбрасывая их, заменяют реакциями, направленными вдоль стержней).



Фиг. 24

зьями, отбрасывая их, заменяют реакциями, направленными вдоль стержней).

Эти стержни подобны нити и отличаются от нее только тем, что нить работает всегда на растяжение, а стержни могут работать как на растяжение (см. стержень AC), так и на сжатие (см. стержень BC). Силы, которые действуют на стержень, стремясь растянуть (стержень AC) или сжать его (см. BC), называются усилием в стержне. Так как по предположению мы имеем дело с абсолютно твердыми телами, то стержни не удлиняются и не укорачиваются.

Количество задач, которые можно решить, применяя непосредственно аксиомы, весьма ограничено. Обычно, на практике, при решении задач пользуются не самими аксиомами, а следствиями и теоремами, вытекающими из них.

§ 4. Система сходящихся сил на плоскости

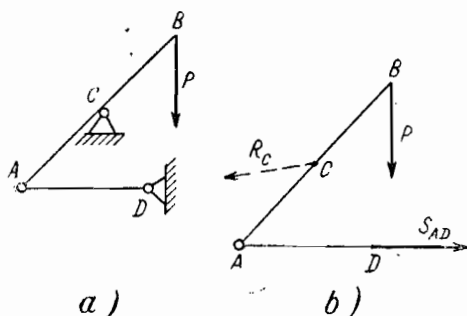
Условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости

а) *В геометрической форме.* Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный для этих сил был замкнут (этим условием удобно пользоваться только в случае равновесия трех сил).

б) *В аналитической форме.* Для равновесия системы сходящихся сил на плоскости необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось x равнялась нулю и сумма проекции всех сил на ось y равнялась нулю; это записывается так:

$$(A) \quad \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

(Здесь: Σ (сигма) — знак суммы, F_x — проекция силы \vec{F} на ось x , F_y — проекция силы \vec{F} на ось y . При этом, для краткости записи значки суммирования опущены).



Фиг. 25

Уравнения (A) называются уравнениями равновесия системы сходящихся сил на плоскости.

Теорема о трех силах

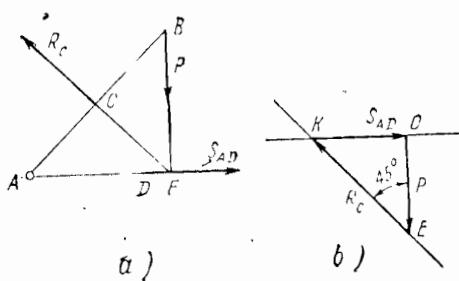
Если тело находится в покое под действием трех непараллельных сил, расположенных в одной плоскости, то линии

действия этих сил пересекаются (сходятся в одной точке)

Пример 1 (фиг. 25а). Два невесомых стержня AB и AD соединены друг с другом шарниром A , горизонтальный стержень AD закреплен с помощью шарнира D , стержень AB наклоненный к AD под углом 45° , удерживается в равновесии шарниром C . $AC=CB$. В точке B стержня приложена вертикальная сила P . Определить реакции в точках A , C и D .

Применим аксиому отвердевания к системе BAD , отбросим связи и заменим их силами реакции. Связями являются шарнир в точке C , реакция которого \bar{R}_C не известна по величине и направлению (нарисуем ее пунктиром со стрелкой) и шарнир D , реакция которого \bar{S}_{AD} на основании предыдущего направлена по стержню. Получим картину, изображенную на фиг. 25б. Мы направили \bar{S}_{AD} так, как если бы стержень AD работал на растяжение.

Для того чтобы найти направление \bar{R}_C , воспользуемся теоремой о трех силах.



Фиг. 26

Так как система BAD находится в равновесии под действием трех сил, то линии действия этих сил пересекаются одной точке (в точке F), а значит \bar{R}_C должна пройти через точки C и F (фиг. 26а).

Так как $AC=CB$, то \bar{R}_C образует с AD угол 45° . Для того, чтобы найти величины сил \bar{R}_C и \bar{S}_{AD} , используем геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.

Требуем, чтобы силовой треугольник, образованный силами \overline{P} , \overline{R}_C , \overline{S}_{AD} , был замкнут.

Строим силовой треугольник.

Построение силового треугольника

Выбираем произвольную точку — полюс O (фиг. 26*b*). Из этой точки проводим известную по величине и направлению силу \overline{P} . Из конца силы \overline{P} — точки E — проводим прямую, параллельную одной из реакции (безразлично какой, например \overline{R}_C , а из начала силы \overline{P} — из полюса O — прямую, параллельную второй реакции, то есть \overline{S}_{AD} . Эти прямые пересекаются в какой-то точке (обозначим ее K), и мы получим силовой треугольник OEK , сторонами которого являются сила $\overline{P} = \overline{OE}$, реакция $\overline{R}_C = \overline{EK}$ и $\overline{S}_{AD} = \overline{KO}$.

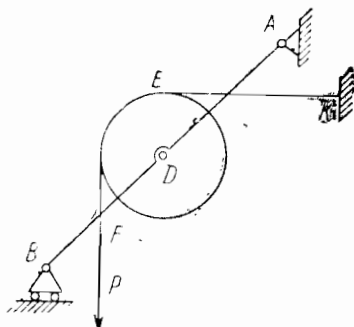
Так как система сил (\overline{P} , \overline{R}_C , \overline{S}_{AD}), действующая на систему BAD (фиг. 26*a*), находится в равновесии, то силовой треугольник для этой системы (фиг. 26*b*) должен быть замкнутым, то есть стрелки для сил \overline{P} , \overline{R}_C и \overline{S}_{AD} нужно ставить так, как указано на фиг. 26*b*. (Выходим из точки O , движемся по линии действия известной силы \overline{P} от точки O к E , от E к K и от K к O и по направлению обхода ставим стрелки. Направление нашего движения определило направление неизвестных сил \overline{R}_C и \overline{S}_{AD}). Решая треугольник, находим: $S_{AD} = P \kappa \Gamma$ $R_C = P \sqrt{2} \kappa \Gamma$. Мы видим, что направление сил \overline{R}_C и \overline{S}_{AD} на фиг. 26*a*, которые мы выбрали произвольно, совпали с направлением сил в силовом треугольнике (фиг. 26*b*). Значит, на фиг. 26*a* направление \overline{R}_C и \overline{S}_{AD} выбраны правильно. Если бы направление какой-либо из этих сил не совпало с ее направлением в силовом треугольнике, то правильным следовало бы считать направление в силовом треугольнике.

Пример 2 (фиг. 27). Стержень AB , наклоненный под углом 45° к горизонту, имеет в точке A шарнир, а в точке B — каток, расположенный на горизонтальной плоскости. В середине стержня AB находятся ось D , на которую насажен блок. Через блок перекинута нить FEK , к вертикальному концу F которой привязан груз $P \kappa \Gamma$, а горизонтальный участок

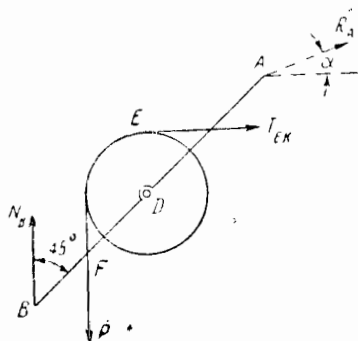
EK прикреплен к неподвижной точке K . Найти реакции в точках A , B , K , D .

Мы видим, что наша система состоит из двух тел — стержня AB и блока D . В точках A , K , B находятся внешние связи, и в точке D — внутренняя связь.

Внешние связи — это такие связи, которые осуществляют взаимодействие между телами нашей системы и телами, не



Фиг. 27



Фиг. 28

принадлежащими нашей системе. Внутренняя связь (в точке D) осуществляет взаимодействие между телами нашей системы (блоком и стержнем).

Сначала мы применяем аксиому о связях ко всей системе в целом, считая ее на основании аксиомы отвердевания одним абсолютно твердым телом.

1. Освобождаем систему только от внешних связей, заменяя их действие силами реакции. После отбрасывания связей в точках B и K возникнут реакции (натяжение нити \overline{T}_{EK} , направленное вдоль нити EK и реакция катка — \overline{N}_B , направленная вертикально вверх). В точке A возникает реакция \overline{R}_A , неизвестная ни по величине, ни по направлению. Получим следующую картину (фиг. 28).

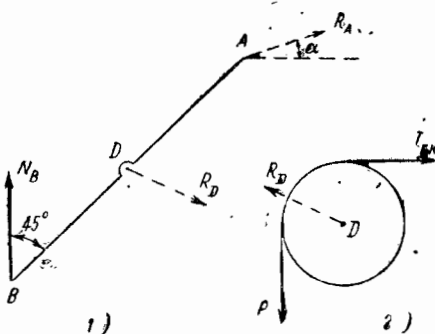
Неизвестными являются: величины \overline{T}_{EK} , \overline{N}_B , величина \overline{R}_A и направление \overline{R}_A (угол α). Всего 4 неизвестных. В дальнейшем будет показано, что для произвольной плоской системы сил, действующих на одно абсолютно твердое тело, можно составить 3 уравнения равновесия. Поэтому, если число не-

известных больше 3-х (в нашем случае 4), то систему тел нужно разбить на отдельные тела.

2. Разбиваем систему на отдельные тела, заменяя действие отброшенных внутренних связей силами реакции. При этом примем во внимание аксиому о равенстве действия и противодействия.

Итак, разбивая систему, изображенную на фиг. 28, на отдельные тела, получим (фиг. 29 (1), (2)).

На блок D помимо уже указанных на фиг. 28 сил \bar{P} и \bar{T}_{EK} действует со стороны отброшенной оси блока D , жестко соединенной со стержнем, сила реакции \bar{R}_D , неизвестная ни по



Фиг. 29

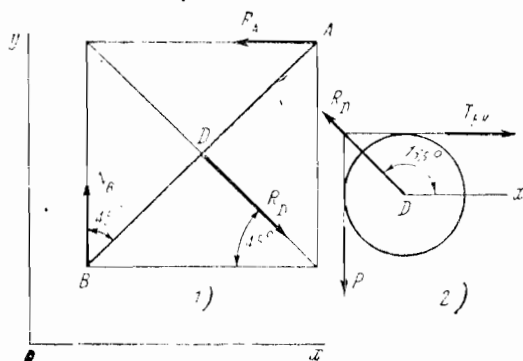
величине, ни по направлению (блок и ось блока образуют цилиндрический шарнир).

На стержень AB в точке D на ось блока действует со стороны отброшенного блока сила $-\bar{R}_D$. Знак минус при \bar{R}_D указывает, что эта сила имеет направление, противоположное той силе \bar{R}_D , которая действует на блок (на основании аксиомы о действии и противодействии). Согласно нашему условию, эти силы на чертеже обозначаются одним и тем же символом R_D и над ними как и вообще над всеми силами, указанными на фиг. 28 и фиг. 29 (1) — (2), не ставим знак вектора (черточку).

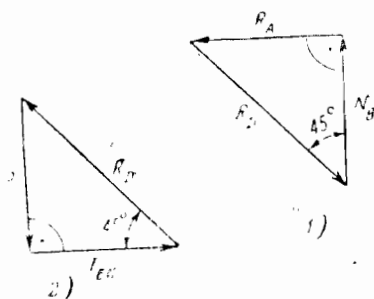
3. Рассматриваем равновесие каждого тела в отдельности. Так как блок находится в равновесии под действием трех сил, то эти силы пересекаются в одной точке, и мы получим

следующую картину (фиг. 30, 2) (теперь уже направление \overline{R}_D является определенным, и она обозначается сплошной чертой, а не пунктиром). То же самое и для тела AB (фиг. 30, 1) линии действия 3-х сил \overline{R}_A , $-\overline{R}_D$ и \overline{N}_B пересекаются в одной точке. Из геометрических соображений следует (так как $AD = DB$ и \overline{AB} , $\alpha = 45^\circ$), что \overline{R}_A — горизонтально.

Строим силовой треугольник для блока D (фиг. 31, 2).



Фиг. 30



Фиг. 31

Решая этот треугольник, находим: $T_{EK} = P \kappa_2$, $R_D = P\sqrt{2}$. Зная R_D , строим силовой треугольник для стержня AB , изображенный на фиг. 31, 1. Решая его, находим:

$$R_A = N_B = R_D \cos 45^\circ = P \kappa_2.$$

Можно было бы вместо построения силовых треугольников составить уравнения равновесия системы сходящихся сил на плоскости.

Напишем уравнения равновесия для блока (фиг. 30,2)

$$\sum F_x \equiv T_{EK} + R_D \cos 135^\circ = 0,$$

$$\sum F_y \equiv -P + R_D \cos 45^\circ \left(\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Решая систему, получим:

$$R_D = \frac{P}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}P; \quad T_{EK} = R_D \cos 45^\circ = P.$$

Напишем уравнения равновесия для стержня AB (фиг. 30,1):

$$\sum F_x \equiv -R_A + R_D \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum F_y \equiv N_B - R_D \cos 45^\circ = 0,$$

откуда:

$$R_A = R_D \cos 45^\circ = P \text{ кг}, \quad N_B = R_D \cos 45^\circ = P \text{ кг}.$$

Замечание. Мы видим, что $T_{EK} = P$. Отсюда можно сделать такой вывод: если к одному концу нити, перекинутой через неподвижный блок, приложена сила P , то натяжение другого конца нити (в случае равновесия системы) тоже равно P .

§ 5. Методика решения задач статики

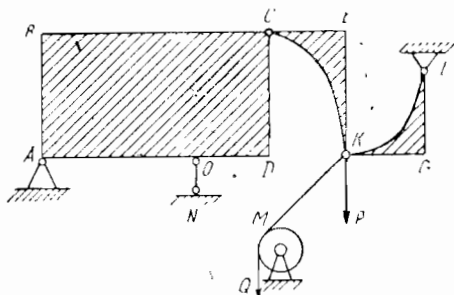
I этап. Освобождаем систему тел от внешних связей, заменяя их действие реакциями. Подсчитываем число полученных неизвестных.

II этап. Если число неизвестных меньше или равно s (где s — число возможных уравнений равновесия для всей системы в целом, если считать ее абсолютно-твердым телом), то рассматриваем систему тел как одно абсолютно-твердое тело, используя условия равновесия или составляя уравнения равновесия данной системы сил.

Если же или число неизвестных больше s , или, по условию задачи, надо найти внутренние силы реакции, то систему разбиваем на части (при этом под частью системы понимается или одно тело или группа тел). Действие каждой отброшенной части на данную часть заменяем силами (внутренние силы реакции).

При разбиении на части учитываем, что «действие равно противодействию». (Действие и противодействие обязательно направлять в разные стороны по одной прямой).

III этап. Рассматриваем равновесие каждой части в отдельности, используя условия или уравнения равновесия, или (в простейших случаях) аксиомы статики. При этом, если мы пользуемся уравнениями равновесия, то нужно стремиться к тому, чтобы система полученных уравнений была наипростейшей (чтобы в каждое из уравнений входило как можно меньше неизвестных, желательно — одно). Исходя из этого,



Фиг. 32

иногда бывает выгодно использовать уравнения равновесия не только для каких-то частей системы, но также и для всей системы в целом.

Пример (фиг. 32).

3 тела — прямоугольная пластина $ABCD$ и уголки CEK и KGL соединены шарнирами C и K . В точках L, O, N, A также шарниры. Найти реакции в точках A, O, L , возникающие под действием сил P_{Kk} и Q_{Kk} . Сила Q приложена к нити, перекинутой через блок и привязанной к шарнирному болту K , нить MK образует с горизонтальным направлением $AODKG$ угол в 45° . Сила \bar{P} вертикальна.

$$AO = 2OD = 2DK = 2CE = 2a,$$

$$AB = DC = KE = a\sqrt{3},$$

$$KG = GL.$$

1. Освобождаем систему от внешних связей — шарниров A и L и стержня ON . Так как нам не надо находить реакции оси блока, то блок не рассматриваем. Отбрасываем нить MK ,

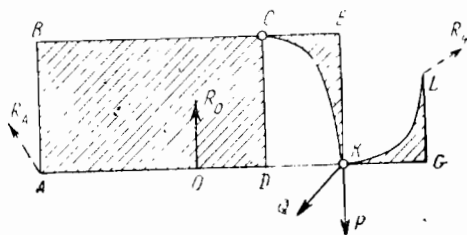
заменяя ее реакцией нити, которая равна силе Q и направлена по MK (см. замечание к предыдущему примеру). Реакции \bar{R}_A и R_L неизвестны ни по величине, ни по направлению. Реакция \bar{R}_O направлена по стержню ON (см. фиг. 33).

2. Подсчитываем число неизвестных:

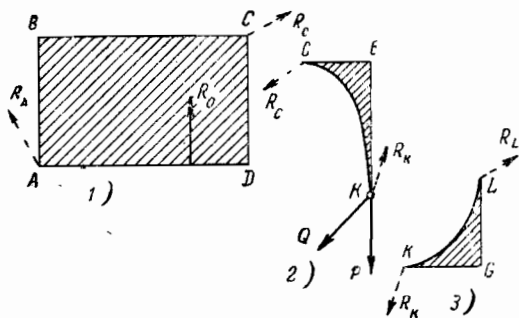
\bar{R}_A (2 неизвестных — величина и угол),

\bar{R}_L (2 неизвестных — величина и угол),

R_0 (1 неизвестное — величина). Всего мы имеем 5 неизвестных, а уравнений равновесия для плоской системы сил



Фиг. 33



Фиг. 34

можно составить только 3 ($s=3$). Так как $5 > s$, то систему разбиваем на части (фиг. 34 — 1, 2, 3).

Первая часть (фиг. 34 (1)). Пластика $ABCD$ находится под действием сил \bar{R}_A , \bar{R}_O и \bar{R}_C (реакция шарнира C).

Вторая часть (фиг. 34 (2)). Уголок CEK вместе с шарнирным болтом K находится под действием сил \bar{P} , \bar{Q} , $-\bar{R}_C$ и \bar{R}_K .

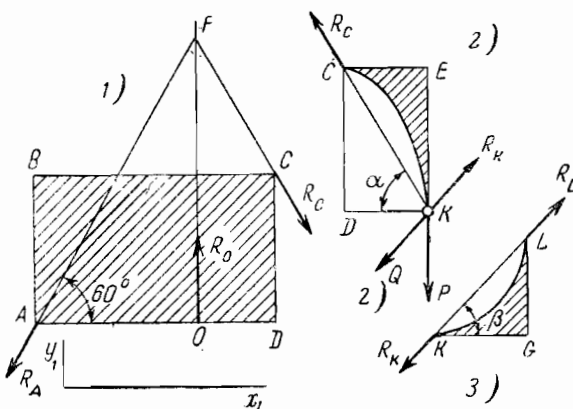
Третья часть (фиг. 34 (3)). Уголок KGL находится под действием сил $-\bar{R}_K$ и \bar{R}_L .

3. Рассматриваем равновесие каждой части в отдельности.

Начинаем с той части, на которую действует наименьшее число сил, то есть с третьей части (уголок KGL). Так как уголок KGL находится под действием двух сил \bar{R}_L и $-\bar{R}_K$, то эти силы равны по величине ($R_L = R_K$) и направлены по прямой, соединяющей их точки приложения (по прямой LK) в разные стороны (фиг. 35 (3)).

Вторая часть: уголок CEK находится под действием четырех сил (три из которых \bar{Q} , \bar{P} , \bar{R}_K приложены в точке K). Для того чтобы эта система находилась в равновесии, необходимо, чтобы равнодействующая сил \bar{P} , \bar{Q} , \bar{R}_K уравнивала силу $-\bar{R}_C$, а это возможно только в том случае, если $-\bar{R}_C$ также пройдет через точку K (фиг. 35 (2)).

Третья часть: пластинка $ABCD$ находится под действием трех сил \bar{R}_A , \bar{R}_B , \bar{R}_C , силы \bar{R}_B и \bar{R}_C пересекаются в точке F , поэтому неизвестная по направлению сила \bar{R}_A должна тоже



Фиг. 35

пройти через точку F (по теореме о трех силах) (фиг. 35 (1)).

Напишем уравнения равновесия для каждой из частей:

Для (3): $R_K = R_L$.

Для (2): так как на тело 2 действует система сходящихся сил, то мы можем написать два уравнения равновесия

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0.$$

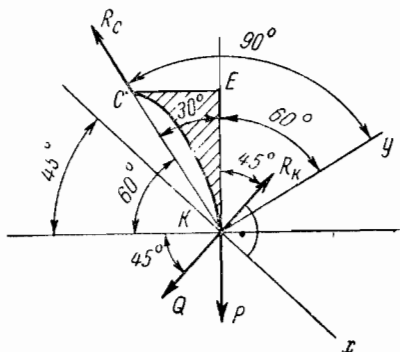
Для того чтобы в каждое из уравнений входило только одно неизвестное, ось x направим перпендикулярно \bar{R}_K и ось y — перпендикулярно \bar{R}_C (система координат xy — косоугольная).

Найдем углы (фиг. 35 (2), (3))

$$\alpha = \angle CKD = \text{arctg} \frac{CD}{DK} = \frac{\bar{a}\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}; \alpha = 60^\circ,$$

$$\beta = \angle LKG = \text{arctg} \frac{LG}{KG} = 1; \beta = 45^\circ.$$

Составим уравнения равновесия (фиг. 35а).



Фиг. 35а

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &\equiv P \cos 45^\circ - R_C \cos 15^\circ = 0, \\ \Sigma F_y &\equiv R_K \cos 15^\circ - Q \cos 15^\circ - P \cos 60^\circ = 0, \\ &(\cos 15^\circ = 0,96) \end{aligned}$$

отсюда:

$$R_C = \frac{P \cos 45^\circ}{\cos 15^\circ} = 0,73P \text{ кг},$$

$$R_K = R_L = Q + \frac{P \cos 60^\circ}{\cos 15^\circ} = (Q + 0,55P) \text{ кг}.$$

Для (1) (пластинка $ABCD$).

Так как $AO = OK$, то \bar{R}_A образует с горизонтом угол $\alpha = 60^\circ$.

Для нахождения R_A и R_O воспользуемся уравнениями равновесия

$$\sum F_{x_1} = 0 \quad \sum F_{y_1} = 0$$

(оси x_1, y_1 указаны на чертеже):

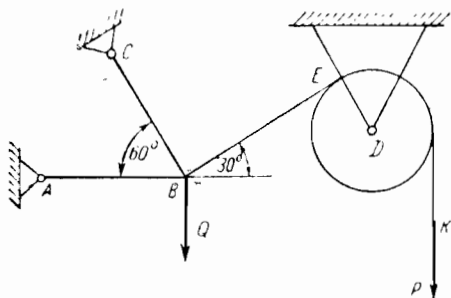
$$\begin{aligned} \sum F_{x_1} &\equiv -R_A \cos 60^\circ + R_C \cos 60^\circ = 0, \\ \sum F_{y_1} &\equiv -R_A \sin 60^\circ - R_C \sin 60^\circ + R_O = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнения, находим:

$$R_A = R_C = 0,73 P \text{ кг}; \quad R_O = 2R_C \sin 60^\circ = 1,27 P \text{ кг}.$$

Решить самостоятельно следующий пример.

Два невесомых стержня (фиг. 36) — горизонтальный AB и BC , наклоненный к нему под углом 60° , — скреплены шар-



Фиг. 36

нирно в точке B . К шарниру B прикреплена нить $BЕК$, перекинутая через блок, к вертикальному концу которой K прикреплен груз весом $P \text{ кг}$. На шарнир B действует вертикальная сила $Q \text{ кг}$.

Определить реакции оси блока D и шарниров A и C .

Указание: систему разбить на две части:

1 часть — блок (одно тело).

2 часть — (группа тел) — стержни AB, BC вместе с шарниром B .

Для 1-й части построить силовой треугольник.

Для 2-й части написать уравнения равновесия системы сходящихся сил.

$$\text{Ответ: } R_D = P\sqrt{3} \text{ кг; } S_{CB} = \frac{2Q-P}{\sqrt{3}} \text{ кг; } S_{AB} = \frac{2P-Q}{\sqrt{3}} \text{ кг.}$$

Решить следующие задачи:

[Л. 4]*, № 43, 50, 52; [Л. 5], № 1, 3, 13, 27.

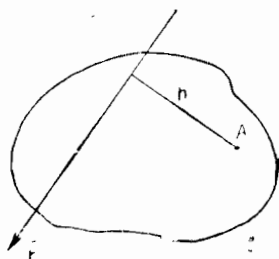
* [Л. 4], [Л. 5] см. в конце настоящего пособия. Список литературы под № 4, 5.

Глава вторая

ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Момент силы относительно точки. Пара сил

Момент силы \vec{F} относительно точки A численно равен произведению абсолютной величины силы на длину перпендикуляра, опущенного из точки A на линию действия силы \vec{F} (плечо силы). Условимся, момент силы \vec{F} считать положительным в том случае, если сила стремится вращать тело



Фиг. 37

вокруг точки A против часовой стрелки, а отрицательным — наоборот (фиг. 37). Записывается это следующим образом

$$\text{мом}_A(\vec{F}) = \pm Fh.$$

Пара сил. Две параллельные силы, равные по величине и направленные в разные стороны, линии действия которых не совпадают, образуют пару (фиг. 38b). Доказано, что пара не имеет равнодействующей. Действие пары на тело можно

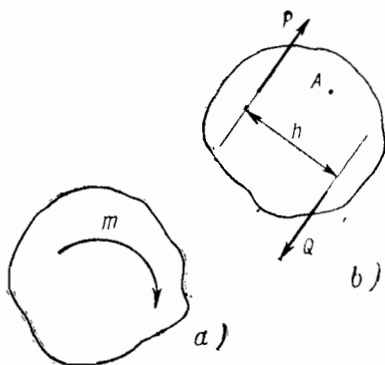
характеризовать моментом, который численно равен произведению абсолютной величины одной из сил пары на расстояние между линиями действия сил пары (плечо пары).

Если пара стремится вращать тело против часовой стрелки, то момент пары считают положительным.

Пара (\bar{P}, \bar{Q}) , изображенная на фиг. 38b, имеет отрицательный момент. Записать это можно так:

$$\text{мом}(\bar{P}, \bar{Q}) = -hP, \text{ или } m(\bar{P}, \bar{Q}) = -hP.$$

Иногда пару изображают в виде дуги окружности со стрелкой (фиг. 38a). Над этой дугой стоит значок m . Это



Фиг. 38

значит, что на тело I , указанное на фиг. 38a, действует пара, расположенная в плоскости чертежа, момент которой численно равен $m \text{ кгм}$. Указанная на чертеже пара стремится вращать тело по часовой стрелке, то есть мы можем написать: $M = -m \text{ кгм}$.

Можно доказать следующие теоремы для пар, расположенных в одной плоскости:

1. Сумма моментов сил, составляющих пару относительно любой точки A , равна моменту пары (фиг. 38b).

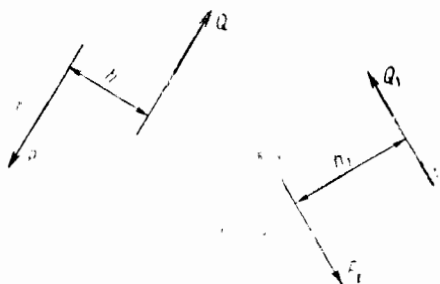
Записывается это так:

$$m_A(\bar{P}) + m_A(\bar{Q}) = m(\bar{P}, \bar{Q}).$$

2. Теорема об эквивалентных парах.

Для того чтобы две пары, расположенные в одной плоскости, были эквивалентны друг другу, необходимо и достаточно, чтобы моменты пар были равны.

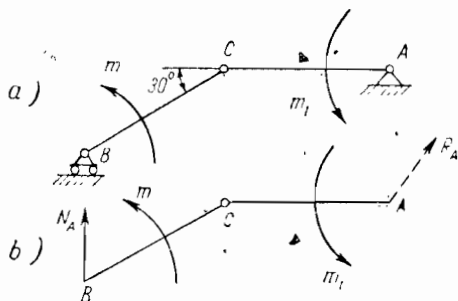
На фиг. 39 изображены две пары (\bar{P}, \bar{Q}) и (\bar{P}_1, \bar{Q}_1) , причем дано, что моменты пар равны, то есть $Ph = P_1h_1$.



Фиг. 39

На основании теоремы об эквивалентных парах пара (\bar{P}, \bar{Q}) эквивалентна паре (\bar{P}_1, \bar{Q}_1) .

Из теоремы об эквивалентных парах вытекает, что пару можно переносить в плоскости ее действия, менять плечо и силы пары, но так, чтобы момент ее при этом не менялся.



Фиг. 40

3. Систему пар, расположенных в одной плоскости, вообще говоря, можно заменить одной парой — результирующей, эквивалентной данной системе пар. Момент результирующей пары равен сумме моментов пар составляющих.

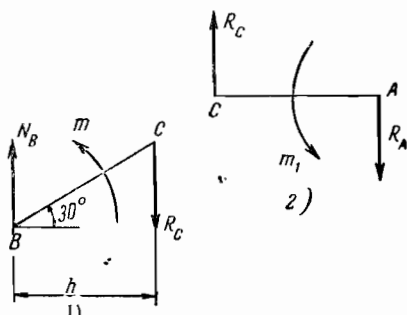
4. Для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов пар равнялась нулю.

Пример.

Две балки (фиг. 40а)— горизонтальная AC и BC , наклоненная к ней под углом 30° , соединены в точке C шарниром. В точке A — шарнир, в точке B — каток, расположенный на горизонтальной плоскости, $AC=CB=5$ м. На балку BC действует пара с моментом $m=10$ кгм.

Пренебрегая весами балок, определить момент пары m_1 , которую надо приложить к балке AC , чтобы система находилась в покое, и найти реакции в точках A , C , B .

1. Отбрасываем внешние связи в точках A и B (фиг. 40б). В точке A реакция шарнира \bar{R}_A неизвестна ни по величине,



Фиг. 41

ни по направлению. В катке B реакция N направлена вертикально вверх.

2. Так как имеем четыре неизвестных: \bar{N}_B , m_1 и R_A (\bar{R}_A неизвестно ни по величине, ни по направлению), то систему разбиваем на части (фиг. 41).

1 часть — балка BC . Она находится под воздействием пары m и двух сил \bar{N}_B и реакции \bar{R}_C неизвестной ни по величине, ни по направлению. Так как пару можно уравновесить только парой, то силы \bar{N}_B и \bar{R}_C образуют пару, то есть \bar{R}_C направлено вертикально вниз (фиг. 41 1).

2 часть — на балку AC действует сила — \bar{R}_C (направленная вертикально вверх), сила \bar{R}_A и пара m_1 . Силы (\bar{R}_A , — \bar{R}_C) образуют пару, которая уравновешивает пару m_1 (фиг. 41 2).

3. Пишем условие равновесия пар:

Для BC : $\text{мом}(\bar{N}_B \bar{R}_C) + m = 0$,

где:

$$\begin{aligned} \text{мом}(\bar{N}_B \bar{R}_C) &= -Rch, \\ h &= BC \cos 30^\circ = 5 \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Получим:

$$-R_C 5 \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 = 0. \quad (1)$$

Для AC $\text{мом}(-\bar{R}_C, \bar{R}_A) + m_1 = 0$,

где

$$\text{мом}(-\bar{R}_C, \bar{R}_A) = -5R_C,$$

получим:

$$-5R_C + m_1 = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (1) находим:

$$R_C = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ кг.}$$

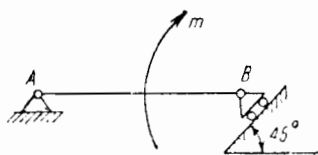
Из уравнения (2):

$$m_1 = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ кгм.}$$

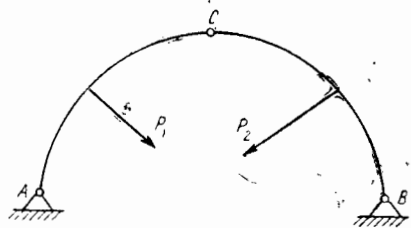
$$R_A = N_B = R_C = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ кг.}$$

Решить самостоятельно следующий пример.

Балка AB длиной 2 м находится под воздействием пары



Фиг. 42



Фиг. 43

с моментом $m = 10$ кгм. Определить реакцию в шарнире A и катке B , расположенном на плоскости, образующей угол 45° с горизонтом (фиг. 42).

Ответ: $R_A = N_B = \frac{10}{\sqrt{2}}$ кг.

Решить по задачку [Л. 5] № 39.

§ 2. Различные формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил

Для одного абсолютно твердого тела можно написать не более трех уравнений равновесия. Эти уравнения равновесия можно взять в трех различных формах (1), (2), (3).

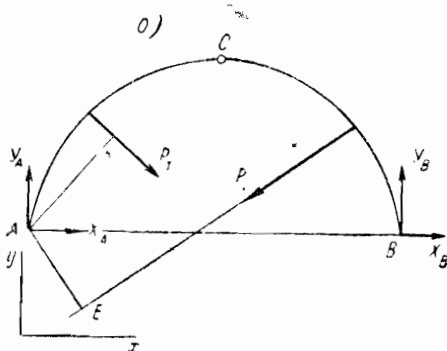
$$\begin{array}{lll}
 (1) & \Sigma F_x = 0 & \Sigma m_A(\bar{F}) = 0 \\
 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma m_B(\bar{F}) = 0 \\
 & \Sigma m_A(\bar{F}) = 0 & \Sigma F_x = 0 \\
 & & \Sigma m_C(\bar{F}) = 0
 \end{array}
 \quad (2) \quad \Sigma m_A(\bar{F}) = 0 \quad (3)$$

причем ось x не перпендикулярна AB ABC не лежат на одной прямой

Вопрос о числе уравнений равновесия для системы, состоящей из нескольких тел рассмотрим на следующем примере:

Пример (фиг. 43).

Арка ACB , состоящая из двух частей AC и CB , соединенных друг с другом шарниром C и прикрепленная к



Фиг. 44

неподвижной плоскости шарнирами A и B , находится под воздействием заданных сил \bar{P}_1 и \bar{P}_2 . Найти реакции в точках A и B (все геометрические размеры считать заданными).

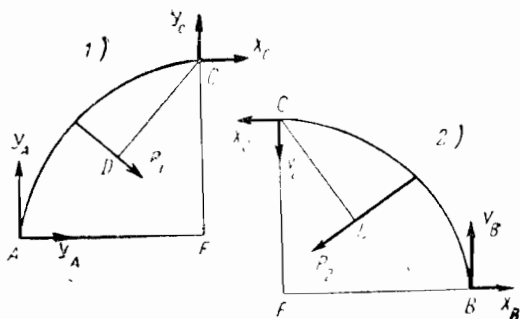
1. Отбрасываем внешние связи—шарниры—в точках A и B .

При этом реакции, неизвестные ни по величине, ни по направлению (реакции в шарнирах A и B), будем раскладывать на две составляющие, параллельные координатным осям. Так, реакцию в точке A разложим на две составляющие и назовем их \bar{X}_A , \bar{Y}_A . Реакцию в точке B разложим на \bar{X}_B и \bar{Y}_B (фиг. 44).

2. Так как число неизвестных (\bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B) четыре $4 > s$ (где $s = 3$), то систему разбиваем на части (фиг. 45 1, 2).

1 часть — AC , на которую действуют помимо указанных на фиг. 44 сил еще силы реакции шарнира C (\bar{X}_C , \bar{Y}_C)
2 часть — CB , на которую действуют силы \bar{X}_B , \bar{Y}_B , \bar{P}_2 , $-\bar{X}_C$, $-\bar{Y}_C$.

3. Составляем уравнения равновесия для каждой части



Фиг. 45

(фиг. 45 1, 2)

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum F_x &\equiv X_A + X_C + P_{1x} = 0, \\ \text{b) } \sum F_y &\equiv Y_A + Y_C + P_{1y} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{c) } \sum m_C(\bar{F}) \equiv -Y_A AF + X_A CF + P_1 CD = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum F_x &\equiv -X_C + X_B + P_{2x} = 0, \\ \text{b) } \sum F_y &\equiv -Y_C + Y_B + P_{2y} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{c) } \sum m_C(\bar{F}) \equiv Y_B BF + X_B CF - P_2 CL = 0.$$

Здесь: P_{1x} , P_{2x} , P_{1y} , P_{2y} (проекции \bar{P}_1 и \bar{P}_2 на оси x), AF , CF , CD и т. д. считать известными.

Мы можем также составить уравнения равновесия для всей системы в целом (фиг. 44):

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum F_x &\equiv X_A + X_B + P_{1x} + P_{2x} = 0, \\ \text{б) } \sum F_y &\equiv Y_A + Y_B + P_{1y} + P_{2y} = 0, \\ \text{в) } \sum m_A(\bar{F}) &\equiv Y_{BAB} - P_{1AK} - P_{2AE} = 0. \end{aligned} \quad (0)$$

Покажем, что любые из этих трех систем уравнений (0), (1), (2) можно получить как линейную комбинацию остальных двух систем.

Например, уравнения (а), (б), (в) для всей системы в целом являются следствием уравнений системы (1) и (2). Так, уравнение (0 а) получится, если левые части уравнений (1 а) и (2 а) сложить. Уравнение (0 б) получится, если левую часть уравнения (1 б) сложить с левой частью уравнения (2 б). Уравнение (0 в) получится, если составить следующую комбинацию из левых частей соответствующих уравнений:

$$1c + 2c - (1a + 2a)CF + (1b + 2b)AF = 0.$$

Здесь под (1 б), (2 в) и т. д. подразумеваются левые части соответствующих уравнений.

Таким образом, мы видим, что из 9-ти уравнений линейно-независимых будет 6.

Итак, в данном случае число линейно-независимых уравнений равно числу отдельных тел, входящих в систему (в нашем случае система состоит из двух тел), умноженному на 3 (три — число уравнений равновесия для каждого тела в отдельности). Это — не случайный факт. Можно в самом общем случае доказать следующее:

Если система состоит из n отдельных тел, то число независимых уравнений равновесия, которое можно составить для этой системы $p \leq 3n$. Знак $<$ (меньше) соответствует тому случаю, когда на какое-либо из тел системы действует не произвольная плоская система сил, а, например, система сходящихся или параллельных сил.

В нашем случае мы имеем право составить 6 уравнений. Чем же мы руководствуемся при составлении уравнений равновесия? Тем, чтобы система уравнений равновесия была наипростейшей, то есть, чтобы каждое из уравнений содержало наименьшее число неизвестных.

В последнем примере мы воспользуемся уравнениями (0) и (1), так как эту систему решать проще, чем систему (1)

и (2). В уравнении (0 с) содержится только одно неизвестное. Решив эту систему, мы найдем все неизвестные.

Примечание. Если число тел, входящих в систему, равно 3 или больше 3-х, можно систему разбивать не только на отдельные тела и не только брать всю систему в целом, но также рассматривать на основании аксиомы отвердевания различные комбинации тел и выбирать из этих комбинаций те, для которых уравнения равновесия будут наипростейшими.

§ 3. Статически-определенные (и неопределенные) задачи

Задачи, в которых число неизвестных больше числа уравнений равновесия, содержащих эти неизвестные, называются статически-неопределенными, а системы тел, для которых это имеет место, называются статически-неопределимыми системами.

В качестве примера статически-неопределимой системы рассмотрим арку ACB (фиг. 43), изменив условие задачи, а именно: предположим, что в точке C нет шарнира. Отбросив связи, мы получим фиг. 44.

Уравнения равновесия для арки ACB :

$$\begin{aligned}\sum F_x &\equiv X_A + X_B + P_{1x} + P_{2x} = 0, \\ \sum F_y &\equiv Y_A + Y_B + P_{1y} + P_{2y} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}) &\equiv Y_B AB - P_1 AK - P_2 AE = 0.\end{aligned}$$

Y_A и Y_B мы можем найти из последних двух уравнений, а X_A и X_B найти нельзя, так как для их определения мы имеем только одно уравнение.

Разбить арку на две части мы не можем, так как в точке C нет шарнира, и арка ACB — одно абсолютно-твердое тело.

Такая задача не может быть решена в статике абсолютно-твердого тела. Она решается методами сопротивления материалов.

Все задачи, которые мы решали до сих пор, были статически-определенными. Это такие задачи, когда число неизвестных не больше числа уравнений равновесия, содержащих эти неизвестные. Системы тел, для которых это имеет место, называются статически-определимыми. В дальнейшем мы будем рассматривать только статически-определимые системы.

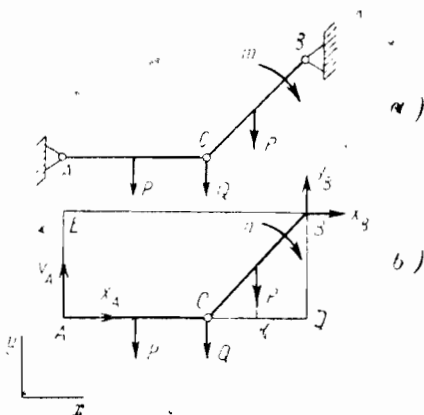
Пример 1. Два стержня, горизонтальный AC и CB , наклоненный к нему под углом 45° , соединены друг с другом и с неподвижными телами шарнирами C , A , B (фиг. 46а).

Веса стержней AC и CB одинаковы и равны P кг. К узлу C приложена вертикальная сила Q кг. На стержень BC действует пара m кгм.

$$m < (P + Q) \frac{l}{\sqrt{2}} \text{ кгм.}$$

Найти реакции в точках A и B $AC=BC=l$.

1. Отбрасываем внешние связи (фиг. 46б); так как в точ-



Фиг. 46

ках A и B шарниры, то реакции в точках A и B раскладываем на составляющие $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$. Получаем 4 неизвестных.

2. Разбиваем систему на отдельные тела, причем узел C вместе с силой \bar{Q} относим к одному из стержней (например, к стержню AC) (фиг. 47 I). При этом добавилось еще 2 неизвестных \bar{X}_C и \bar{Y}_C . Всего мы имеем теперь 6 неизвестных $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$, и мы можем составить систему 6-ти линейно-независимых уравнений равновесия.

Так как по условию задачи не требуется нахождение всех сил реакции, то составляем только те уравнения равновесия, которые необходимы для нахождения этих сил. А именно, напишем три уравнения равновесия для всей системы в целом (фиг. 46б); и уравнение моментов относительно точки C для 1-го тела (фиг. 47 I). Мы получим следующую систему уравнений.

Для системы в целом (фиг. 46b)

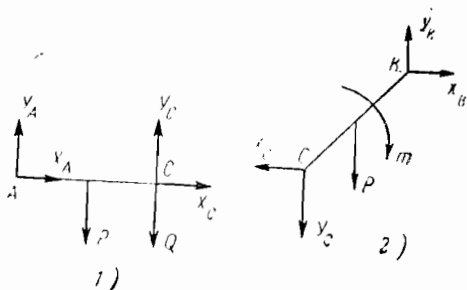
$$a) \sum F_x \equiv X_A + X_B = 0,$$

$$b) \sum F_y \equiv Y_A - 2P - Q + Y_B = 0,$$

$$c) \sum m_A(\bar{F}) \equiv -P \frac{AC}{2} - QAC - PAK + Y_B AD - X_B AE - m = 0,$$

где

$$AK = AC + \frac{CB}{2} \cos 45^\circ = l \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right),$$



Фиг. 47,

$$AD = AC \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = l \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$AE = BC \sin 45^\circ = l \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Для 1-го тела (фиг. 47,1)

$$d) \sum m_C(\bar{F}) \equiv -Y_A AC + P \frac{AC}{2} = 0.$$

Последним уравнением мы пользуемся для того, чтобы исключить реакции в точке B. Таким образом, получаем систему 4-х уравнений с четырьмя неизвестными.

Из последнего уравнения (d) находим $Y_A = \frac{P}{2}$ кг; подставляя это значение Y_A в уравнение (b), получим: $Y_B = \left(\frac{3}{2} P + Q \right)$ кг, из уравнения (c) подставляя в него

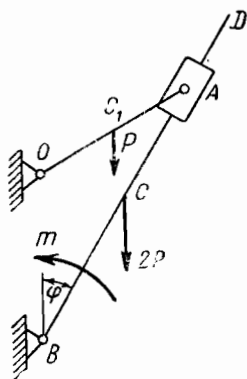
значение Y_B , находим

$$X_B = \left(P + Q - \frac{V\sqrt{2}m}{l} \right) \text{ кг.}$$

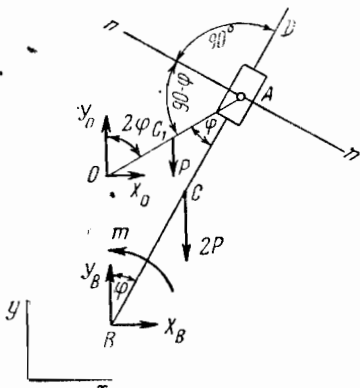
$$X_A = -X_B = - \left(P + Q - \frac{V\sqrt{2}m}{l} \right) \text{ кг.}$$

Мы получили, что $X_A < 0$. Это значит, что на фиг. 46 и 47 направление X_A показано неправильно. Но никаких исправлений на чертежах не делаем. (Можно было бы шарнир вместе с силой \bar{Q} отнести к стержню CB , тогда внутренние силы реакции \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C были бы другие, а именно: $X'_C = X_C$, а $Y'_C = Y_C - Q$. Внешние же силы реакции не изменились бы. Решите самостоятельную эту задачу, отнеся шарнир вместе с \bar{Q} к BC).

Пример 2. На фиг. 48 изображен кривошипно-кулисный механизм, расположенный в вертикальной плоскости. OA — кривошип, могущий вращаться вокруг точки O ; BC — кули-



Фиг. 48



Фиг. 49

са, которая может вращаться вокруг оси B . A — ползун, скользящий в прорезе кулисы и шарнирно прикрепленный к кривошипу OA . Вес кривошипа P кг, вес кулисы $2P$ кг приложен в точке C

$$OA = OB = BC = a \text{ м; } OC_1 = C_1A.$$

Определить момент m кгм пары, которую надо приложить к

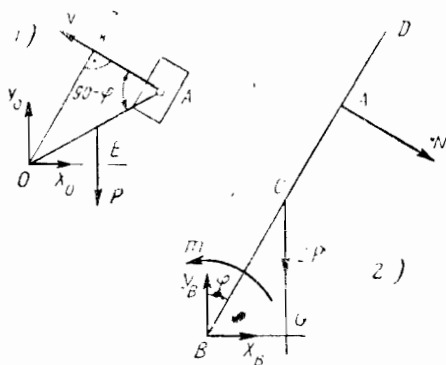
кулисе, чтобы механизм в указанном на чертеже положении, когда $\varphi = 30^\circ$, находился в равновесии.

1. Отбрасывая внешние связи, получим картину фиг. 49. Число неизвестных ($\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{X}_B, \bar{Y}_B, m$) равно 5.

2. Разбиваем систему на части.

1-ая часть — кривошип OA , соединенный шарнирно с ползуном A (фиг. 50 1).

2-ая часть — кулиса BC (фиг. 50 2). При этом \bar{N} — реакция (фиг. 50 2), которая возникает в точке A , перпенди-



Фиг. 50

кулярно кулисе. Она представляет собой силу, с которой ползун действует на кулису.

3. Составляем уравнение равновесия. Для того чтобы определить момент пары m , нет необходимости составлять все уравнения, а достаточно взять для 1-ой части только — $\sum m_O(\bar{F}) = 0$, а для 2-ой части только — $\sum m_B(\bar{F}) = 0$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$a) \sum m_O(\bar{F}) = -P \cdot OE + N \cdot OK = 0,$$

$$b) \sum m_B(\bar{F}) = -2P \cdot BG - N \cdot AB + m = 0.$$

Вычислим OE, OK, BC (см. фиг. 50 1, 50 2)

$$OE = \frac{OA}{2} \cos(90 - 2\varphi) = \frac{a}{2} \sin 2\varphi,$$

$$OK = OA \sin(90 - \varphi) = a \cos \varphi,$$

$$BG = BC \cos(90 - \varphi) = a \sin \varphi.$$

AB находим из равнобедренного треугольника OBA (фиг. 49)

$$AB = 2OA \cos \varphi = 2a \cos \varphi.$$

Подставляя все эти значения в уравнения (а) и (б), получим:

$$а) \sum m_o(\bar{F}) \equiv -P \cdot \frac{a}{2} \sin 2\varphi + Na \cos \varphi = 0,$$

$$б) \sum m_B(\bar{F}) \equiv m - 2Pa \sin \varphi - N2a \cos \varphi = 0.$$

Умножая 1-е уравнение на 2 и складывая со 2-м, получим:

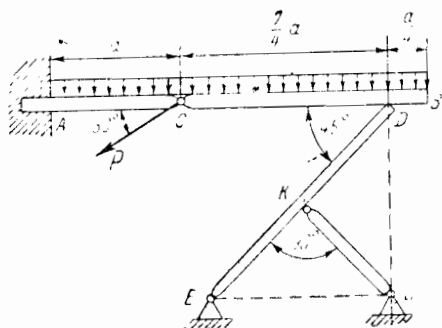
$$-Pa \sin 2\varphi + m - 2Pa \sin \varphi = 0,$$

отсюда находим

$$m = 2aP \sin \varphi + Pa \sin 2\varphi, \text{ так как } \varphi = 30^\circ, \text{ то:}$$

$$m = Pa \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ кгм.}$$

Пример 3. Разрезная горизонтальная балка ACB , концом A заделана и опирается точкой D на стержень DE , удерживаемый в равновесии стержнем LK (фиг. 51). В точках L , K и E — шарниры. Балка AB нагружена равномерно распре-



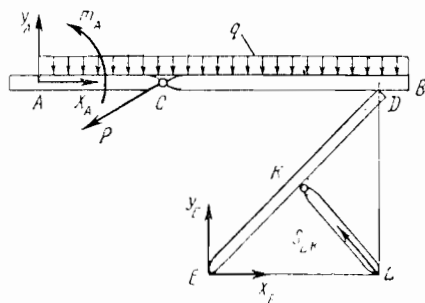
Фиг. 51

деленной нагрузкой, интенсивность которой q кг/м (q — нагрузка, приходящаяся на единицу длины — погонный метр), к шарниру C под углом 30° к балке приложена сила P кг. Определить реакции в точках A , E и L . Размеры и углы указаны на чертеже. Точки D и L лежат на одной вертикали, E и L — на одной горизонтали.

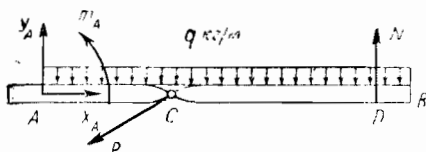
1. Отбрасываем внешние связи и рисуем всю систему в целом (фиг. 52). В заделке A возникает реакция, неизвестная ни по величине ни по направлению (раскладываем ее на 2 составляющих \bar{X}_A, \bar{Y}_A), и пара с неизвестным моментом m_A кгм. В шарнире L реакцию \bar{S}_{LK} направляем по стержню LK . В шарнире E — реакция \bar{X}_E, \bar{Y}_E . Так как мы имеем 6 неизвестных $X_A, Y_A, m_A, S_{LK}, X_E, Y_E$, то систему разбиваем на части.

2. (Напоминаем еще раз:

На основании аксиомы отвердевания мы можем применять уравнения статики не только к отдельно взятому телу,



Фиг. 52



Фиг. 53

но к совокупности тел, считая эту совокупность за одно тело).

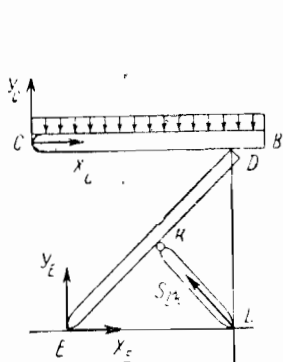
1-я часть — вся система в целом (фиг. 52).

2-я часть — балка AB с шарниром в точке C (фиг. 53).

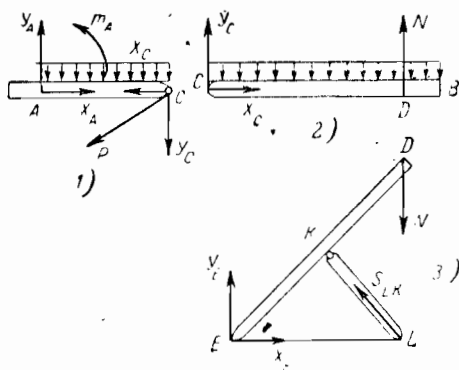
3-я часть — CB вместе со стержнями DE и LK (фиг. 54), причем на балку CB приходится часть равномерно распределенной по длине $CB=2a$ нагрузки q кгм.

В шарнире C появилась сила реакции \bar{X}_C, \bar{Y}_C .

4-я часть — балка AC вместе с шарниром C (фиг. 55 1)



Фиг. 54



Фиг. 55

5-я часть — одно тело — балка CB (фиг. 55 2).

На балку CB действует \bar{N} — реакция со стороны стержня DE .

6-я часть — стержень DE и KL (фиг. 55 3).

3. Так как наша система (фиг. 51) состоит из 3-х отдельных тел: 1-е тело — балка AC , 2-е тело — балка CB , 3-е — стержень DE вместе с KL (стержень KL не считаем, так как направив силу \bar{S}_{LK} по стержню, мы уже использовали условие равновесия тела), то на основании вышеизложенного на стр. 36 мы имеем право написать не более 9-ти уравнений равновесия ($n=3$ $p=9$).

Кроме того, мы видим, что по условию задачи не требуется нахождения \bar{N} и \bar{X}_C, \bar{Y}_C . Поэтому желательно написать такие уравнения (если это возможно), в которые не вошли бы $\bar{N}, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$. Для этого мы можем воспользоваться следующими уравнениями равновесия.

Для стержня DE (вместе с KL) (фиг. 55 3)

$$\sum m_L(\bar{F}) \equiv Y_E L E = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_x \equiv -S_{LK} \cos 45^\circ + X_E = 0. \quad (2)$$

Для балки AC (фиг. 55 I)

$$\sum m_C(\bar{F}) \equiv -Y_A AC + m_A + qa \frac{a}{2} = 0. \quad (3)$$

Здесь $qa \frac{a}{2}$ — момент равномерно-распределенной по длине AC ($AC=a$) нагрузки интенсивностью $q \text{ кг/м}$, которую мы заменили одной силой qa и приложили в середине AC.

Для системы AB (фиг. 53)

$$\begin{aligned} \sum m_D(\bar{F}) \equiv & -Y_A AD + m_A + 3aq \left(\frac{3a}{2} - \frac{1}{4} a \right) + \\ & + P \cdot \frac{7}{4} a \sin 30^\circ = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $3aq \left(\frac{3a}{2} - \frac{1}{4} a \right)$ — момент равномерно-распределенной по AB ($AB=3a$) нагрузки, интенсивностью $q \text{ кг/м}$, которую мы заменили одной силой $3aq$ и приложили в середине AB

$$\sum F_x \equiv X_A - P \cos 30^\circ = 0. \quad (5)$$

Для всей системы в целом (фиг. 52)

$$\sum F_y \equiv Y_A - 3aq + Y_E + S_{LK} \cos 45^\circ - P \sin 30^\circ = 0. \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что полученная система уравнений является линейно независимой (определитель системы не равен нулю).

Решая данную систему, находим:

$$\text{из 5-го уравнения: } X_A = P \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{из 1-го уравнения: } Y_E = 0.$$

Исключая из 3-го и 4-го уравнения m_A , находим Y_A

$$Y_A (AD - AC) - 3aq \left(\frac{3}{2} a - \frac{1}{4} a \right) + qa \frac{a}{2} - P \cdot \frac{7}{8} a = 0,$$

$$Y_A = \frac{1}{2} P + \frac{13}{7} aq.$$

Из уравнения (3), выражая m_A через Y_A , получим $m_A = Y_A AC - qa \frac{a}{2}$ или, подставляя значение Y_A , находим

$$m_A = \frac{1}{2} Pa + \frac{19}{14} qa^2.$$

Из 6-го уравнения находим:

$$S_{LK} = \sqrt{2}(3aq - Y_A + P \sin 30^\circ) = \frac{8\sqrt{2}}{7} qa.$$

Из 2-го уравнения $X_E = S_{LK} \cos 45^\circ$ или $X_E = \frac{8}{7} qa$.

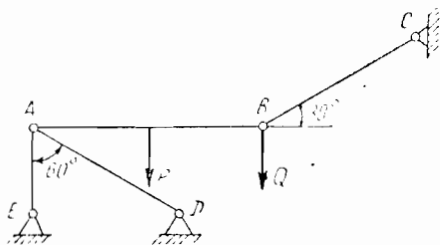
Замечание. Если бы вместо уравнения (6) мы составили для всей системы в целом $\Sigma F_x \equiv X_A - S_{LK} \cos 45^\circ - P \cos 30^\circ + X_E = 0$, то это уравнение было бы следствием уравнения (2) и (5), а именно оно получится, если левые части уравнений (2) и (5) сложить.

Можно показать в общем случае, что если система тел, находящаяся в покое, может быть получена как результат простого соединения нескольких частей (каждая часть состоит из одного или нескольких тел), то уравнения равновесия, полученные для системы тел, есть следствия системы уравнений равновесия, состоящей из уравнений равновесия для каждой части в отдельности (при этом имеется в виду, что и для каждой части и для системы мы составляем все уравнения равновесия).

Примеры для самостоятельного решения

Пример 1. (фиг. 56).

Горизонтальная балка AB соединена шарнирно со стержнем BC , наклоненным к горизонту под углом 30° .



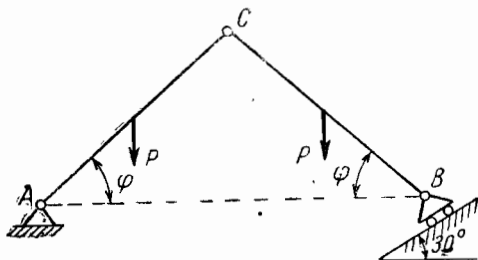
Фиг. 56

В точке A балка прикреплена с помощью шарнира к 2-м невесомым стержням — вертикальному AE и AD , образующему с AE угол в 60° . В точках C , E и D — шарниры. Вес балки P кг. На узел B действует сила Q кг. Определить реакции в точках D , C , E .

Указание. При решении задачи использовать уравнения равновесия в форме 3-х моментов (см. стр. 36), причем за центры моментов взять точки пересечения прямых, на которых расположены стержни AE , AD , BC .

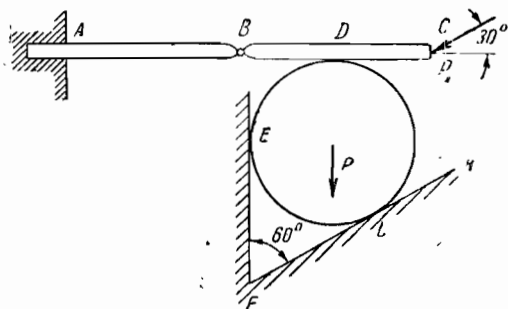
Ответы: $S_C = 2Q + P$; $S_E = Q$; $S_D = -(P + 2Q)$.

Пример 2. Два стержня AC и CB соединены шарниром в точке C (фиг. 57). Конек одного стержня A закреплен с помощью шарнира в точке A , а конек другого стержня B



Фиг. 57

опирается катком на плоскость, которая наклонена к горизонту под углом 30° . Вес каждого стержня P кг. $AC = CB$. Точки A и B лежат на горизонтальной прямой. Найти, при каком угле φ (см. чертеж) система будет в равновесии.



Фиг. 58

Указание. При решении задачи воспользоваться уравнением моментов относительно точки A для всей системы в целом и уравнением моментов относительно точки C для стержня BC .

Ответ: $\varphi = \text{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3. Два горизонтальных невесомых стержня AB

($AB=l$) и BC (фиг. 58) соединены шарниром в точке B . Конец A стержня AB заделан. Стержень BC точкой D ($BD=DC$) опирается на цилиндр. Цилиндр весом P кг зажат между 2-мя плоскостями — вертикальной EF и FK , образующей с EF угол 60° .

К точке C стержня приложена сила P_1 , образующая с BC угол 30° .

Определить реакцию заделки A и реакции со стороны плоскостей FK и EF на цилиндр.

Ответ. $Y_A = -\frac{P_1}{2}$; $X_A = P_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$; $M_A = \frac{P_1}{2} l$;

$$N_E = \frac{P + P_1}{\sqrt{3}}; \quad N_L = \frac{2(P + P_1)}{\sqrt{3}}.$$

Решить: [Л. 4] №№ 143, 149, 152, 164. [Л. 5] 54, 72, 76, 85, 99.

§ 4. Параллельные силы на плоскости

При решении задач на равновесие системы параллельных сил будем пользоваться следующими положениями:

1. Если тело находится в равновесии под действием n сил, причем $n-1$ сил параллельны, то n -я сила тоже им параллельна.

2. Уравнения равновесия параллельных сил можно брать в двух формах.

1 форма: $\Sigma F_y = 0$,

Причем ось y не перпендикулярна силам \vec{F} .

$$\Sigma m_A(\vec{F}) = 0.$$

2 форма: $\Sigma m_A(\vec{F}) = 0$,

$$\Sigma m_B(\vec{F}) = 0.$$

Причем, AB не параллельна \vec{F} .

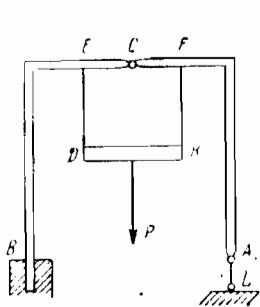
Пример (фиг. 59). Прямоугольная рама ACB в точке A прикреплена вертикальным стержнем AL к опоре, а в точке B — заделана. В точке C — шарнир.

К раме с помощью вертикальных тросов ED и KF привязана доска DK весом P кг $DK \parallel EF$, BA — горизонтально $BA=2a$; $EC=CF=\frac{a}{2}$.

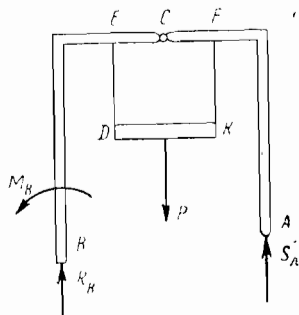
Определить вызываемые силой P реакции в точках A и B .

1. Отбросим внешние связи: стержень AL , реакция которого \vec{S}_A вертикальна, и заделку в точке B .

В заделке возникает пара с неизвестным моментом M_B и неизвестная ни по величине, ни по направлению сила \overline{R}_B . Так как наша система находится в равновесии под действием системы параллельных сил (пару с моментом M_B на основании теоремы об эквивалентных парах можно повернуть так, что-

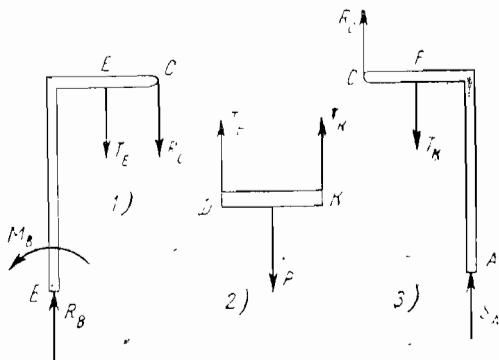


Фиг. 59



Фиг. 60

бы силы пары были параллельны \overline{P}) и неизвестной по направлению силы \overline{R}_B , то \overline{R}_B должна быть параллельна силам. Направим ее вертикально вверх (см. фиг. 60). Мы получим 3 неизвестных: \overline{R}_B , \overline{S}_A , M_B . Уравнений равновесия для системы параллельных сил можно составить только 2.



Фиг. 61

2. Разбиваем систему на отдельные тела (фиг. 61 1, 2, 3). При этом, реакцию в шарнире \overline{R}_C мы направили вертикаль-

но, так как на каждое из тел 1) и 2) действует система параллельных сил.

3. Пишем уравнения равновесия:

Так как по условию задачи нам надо определить только внешние силы реакции, то мы воспользуемся следующими уравнениями:

Для (0) (фиг. 60): $\Sigma F_y = 0$,

$$\Sigma m_B(\bar{F}) = 0.$$

Для (3) (фиг. 61) $\Sigma m_C(\bar{F}) = 0$.

Для (2) (фиг. 61) $\Sigma m_D(\bar{F}) = 0$.

Составляя вышеуказанные уравнения, получим:

Для (0) (а) $\Sigma F_y \equiv R_B + S_A - P = 0$,

$$(b) \Sigma m_B(\bar{F}) \equiv M_B - Pa + S_A 2a = 0.$$

Для (3) (с) $\Sigma m_C(\bar{F}) \equiv -T_K \frac{a}{2} + S_A a = 0$,

Для (2) (d) $\Sigma m_D(\bar{F}) \equiv -P \frac{a}{2} + T_K a = 0$.

Решая систему, находим:

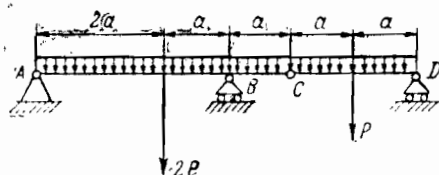
$$T_K = \frac{P}{2},$$

$$S_A = \frac{P}{4},$$

$$M_B = \frac{P}{2} a,$$

$$R_B = \frac{3}{4} P.$$

Решить самостоятельно следующий пример (фиг. 62). Го-



Фиг. 62

ризонгальная балка ACD в точке A закреплена шарнирно, в точках B и D опирается катками на горизонтальные плос-

кости. В точке C — шарнир. Вес балки AC — $2P$, вес CD — P . Балка находится под воздействием равномерно-распределенной вертикальной нагрузки, интенсивностью q кг/м. Размеры заданы на чертеже.

Найти реакции в точках A , B , D .

Ответ:

$$N_D = \frac{P}{2} + qa; \quad N_B = 2P + 4qa;$$

$$Y_A = \frac{P}{2} + qa; \quad X_A = 0.$$

Решить: [Л. 4] №№ 90, 112,

[Л. 5] №№ 53, 69.

Глава третья

СУХОЕ ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ ПОКОЕ

§ 1. Законы трения скольжения

В месте соприкосновения 2-х шероховатых поверхностей, помимо нормальной реакции возникает сила трения, расположенная в касательной плоскости, проведенной в точке касания соприкасающихся поверхностей. Эта сила препятствует скольжению одной поверхности по другой. Величина силы трения может меняться от 0 до некоторого наибольшего значения — $F_{\text{макс}}$.

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{макс}}$$

Наибольшая сила трения пропорциональна нормальной силе реакции N , возникающей в точке соприкосновения поверхностей $F_{\text{макс}} = kN$. k — коэффициент трения.

Задачи при наличии силы трения решаются обычными методами статики.

К системе уравнений равновесия, которое мы получим, применяя методы статики, следует добавить еще систему неравенств

$$F_{\text{имп}} \leq k_i N_i$$

В том случае, когда рассматривается предельный случай равновесия, следует вышенаписанные неравенства заменить уравнениями:

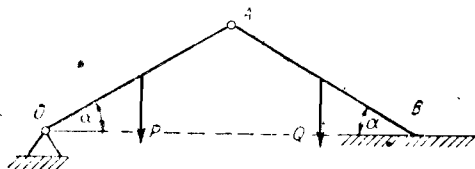
$$F_{\text{имп}} = k_i N_i$$

Пример. Два однородных стержня OA и AB (фиг. 63) ($OA=AB$) соединены друг с другом шарнирно в точке A . Концы стержня B лежит на шероховатой плоскости. Точки O и B лежат на горизонтальной, прямой. Задан коэффициент трения между плоскостью и стержнем — k . Вес стержня OA равен P кг, вес стержня AB — Q кг. Определить, при каком угле α система будет оставаться в равновесии (α — угол образованный OA с горизонтом).

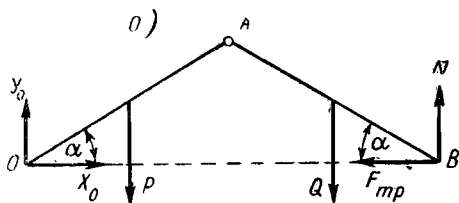
1. Отбрасываем внешние связи (фиг. 64). В точке O появятся реакции \bar{X}_O, \bar{Y}_O и в точке B — \bar{N} (нормальная реакция) и сила трения $\bar{F}_{тр}$ (сила трения направлена в сторону, противоположную возможному движению, то есть влево).

2. Так как неизвестных 5 — $X_0, Y_0, N, F_{тр}, \alpha$, а составить можно 3 уравнения статики и 1 неравенство $F_{тр} \leq kN$, то систему разбиваем на отдельные тела (фиг. 65 1, 2).

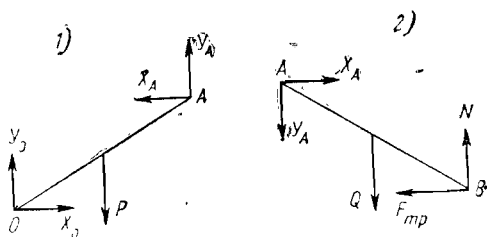
3. Так как по условию задачи нам нужно определить



Фиг. 63



Фиг. 64



Фиг. 65

только одно неизвестное α , то мы воспользуемся следующими уравнениями. Для всей системы в целом (фиг. 64) составим сумму моментов относительно точки O , а для тела

(2) (фиг. 65 2) составим сумму моментов относительно точки A .

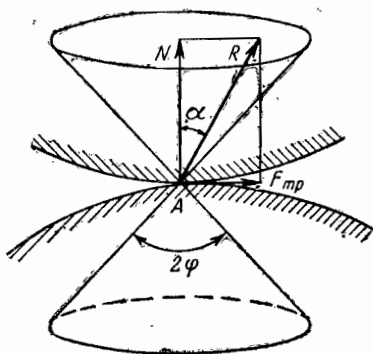
Кроме того, воспользуемся неравенством $F_{mp} \leq kN$. Мы получим систему 2-х уравнений и 1 неравенство, в которые войдет 3 неизвестных N , F_{mp} , α . Составим эти уравнения:

Для всей системы (фиг. 64)

$$\Sigma m_O(\bar{F}) = -P \frac{OA}{2} \cos \alpha - Q \frac{3}{2} OA \cos \alpha + N 2OA \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Для тела (2) (фиг. 65 2)

$$\Sigma m_A(\bar{F}) = -Q \frac{AB}{2} \cos \alpha + NAB \cos \alpha - F_{mp} AB \sin \alpha = 0. \quad (2)$$



Фиг. 66

Присоединим к этим уравнениям неравенство

$$F_{mp} \leq kN. \quad (3)$$

Выражаем из первых 2-х уравнений F_{mp} и N через α

$$N = \frac{3Q + P}{4},$$

$$F_{mp} = \frac{(3Q + P) - 2Q}{4 \sin \alpha} \cos \alpha \text{ или } F_{mp} = \frac{Q + P}{4} \operatorname{ctg} \alpha,$$

подставляя эти значения N и P в неравенства (3), получим:

$$\frac{P + Q}{4} \operatorname{ctg} \alpha \leq k \frac{P + 3Q}{4} \text{ или } \operatorname{ctg} \alpha \leq k \frac{P + 3Q}{P + Q}.$$

§ 2. Конус трения. Угол трения

Обозначим через \bar{R} равнодействующую сил трения \bar{F}_{mp} и нормальной реакции \bar{N} (фиг. 66) $\bar{R} = \bar{F}_{mp} + \bar{N}$.

Обозначим через α угол между \bar{R} и \bar{N} .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{тр}}}{N} \leq \frac{F_{\text{макс}}}{N} \quad \text{так как } F_{\text{тр}} \leq F_{\text{макс}}, \quad F_{\text{макс}} = kN,$$

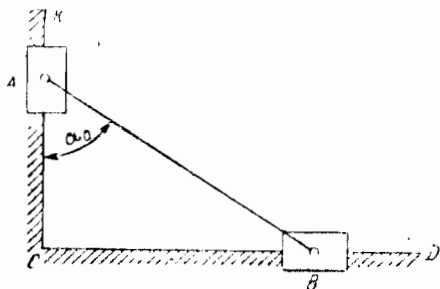
откуда

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{kN}{N}, \quad \text{то есть } \operatorname{tg} \alpha \leq k.$$

Наибольшее значение угла α — $\alpha_{\text{макс}}$ обозначим через φ . Этот угол (угол φ , $\varphi = \operatorname{arctg} k$) называется углом трения. Итак, углом трения называется наибольшее значение угла отклонения направления силы реакции, возникающей в точке касания негладких поверхностей от направления нормали к поверхностям.

Конусом трения называется конус, ось которого совпадает с нормалью к поверхностям N , вершина — в точке касания к поверхностям A , а угол раствора конуса равен 2φ (фиг. 66) ($\varphi = \operatorname{arctg} k$). Сила реакции $\bar{R} = \bar{F}_{\text{тр}} + \bar{N}$ лежит где-либо внутри или на границе конуса трения. В предельном случае равновесия сила реакции \bar{R} лежит на образующей конуса трения.

Пример. Два ползуна A и B одинакового веса P кг (фиг. 67) соединены невесомым стержнем AB . Ползун A может



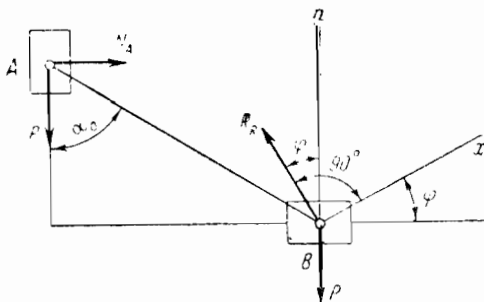
Фиг. 67

двигаться по вертикальной стороне AC прямого угла ACD и ползун B по его горизонтальной стороне CD . Предполагая, что трение между CK и ползуном A отсутствует, а между CD и ползуном B коэффициент трения равен k , определить наименьший угол α_0 , при котором начнется движение,

1. Отбрасываем внешние силы (см. фиг. 68).

В точке A трение отсутствует и N направлена перпендикулярно CK .

Так как мы рассматриваем начало движения или конец покоя (пределный случай равновесия), то реакция в точке B , \bar{R}_B ($\bar{R}_B = \bar{F}_{тр} + \bar{N}_B$) лежит на образующей



Фиг. 68

конуса трения. Таким образом, \bar{R}_B образует угол φ с нормалью к плоскости $CD - n$ ($\varphi = \text{arctg } k$).

Мы имеем 3 неизвестных N_A , R_B , α .

2. Так как число неизвестных $3 = s$ ($s = 3$ — число уравнений для произвольной плоской системы сил), то составляем уравнения равновесия для всей системы в целом.

По условию задачи нам не нужно определять R_B , поэтому желательно составить такие уравнения, в которые \bar{R}_B не вошло бы.

Таковыми уравнениями являются:

$$\Sigma m_B(\bar{F}) = 0,$$

$$\Sigma F_x = 0 \text{ (ось } x \text{ перпендикулярна } \bar{R}_B \text{)}.$$

Получим

$$\Sigma m_B(\bar{F}) \equiv -N_A AB \cos \alpha_0 + PAB \sin \alpha_0 = 0,$$

$$\Sigma F_x \equiv N_A \cos \varphi - 2P \sin \varphi = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим:

$$N_A = 2P \text{tg } \varphi.$$

Подставляя это значение N_A в первое уравнение, имеем:

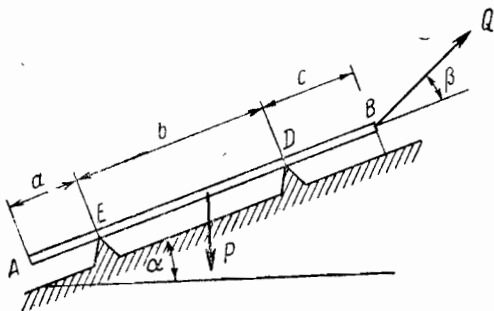
$$2P \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha_0 - P \sin \alpha_0 = 0;$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = 2 \operatorname{tg} \varphi$$

или $\alpha_0 = \operatorname{arctg} 2k$, так как $\operatorname{tg} \varphi = k$.

Решить самостоятельно следующий пример (фиг. 69):
Стержень AB опирается в точках D и E на наклонную плос-



Фиг. 69

кость. Угол наклона стержня и плоскости к горизонту — α . Вес стержня P кг.

Найти, какую силу Q надо приложить под углом β к стержню, чтобы он стал двигаться вверх по наклонной плоскости. Определить реакции в точках E и D . Размеры даны на чертеже.

Ответ:

$$Q = P \frac{\sin \alpha + k \cos \alpha}{\cos \beta + k \sin \beta},$$

$$N_D = \frac{P \cos \alpha (c + b - a) - 2Q \sin \beta (b + c)}{2b},$$

$$N_E = P \frac{(a + b - c)}{2b} \cos \alpha + \frac{Qc}{b} \sin \beta.$$

Решить: [Л. 4] №№ 74, 178, 180.

Глава четвертая

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

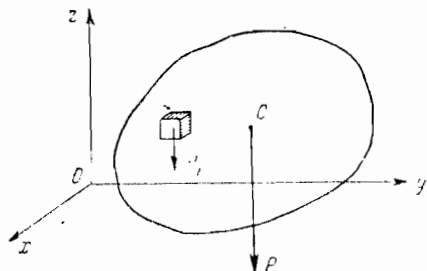
§ 1. Центр тяжести тела и методы его нахождения

Центром тяжести абсолютно твердого тела называется точка, неизменно связанная с телом, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела в пространстве.

Формулы, определяющие координаты центра тяжести x_c, y_c, z_c :

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P}, \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{P}, \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{P},$$

где x_i, y_i, z_i — координаты точек приложения сил тяжести P_i частиц тела, P — вес тела (фиг. 70).



Фиг. 70

Некоторые способы определения центров тяжести тела

1. Симметрия. Если однородное тело симметрично относительно плоскости или оси или точки, то центр тяжести лежит, соответственно, или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии. Например, центр тяжести однородного шара лежит в центре шара и т. д.

2. Разбиение. Если тело можно разбить на конечное число частей так, что центр тяжести каждой части будет известен, то координаты центра тяжести всего тела можно вычислить по формулам:

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P}, \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{P}, \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{P}.$$

3. Метод отрицательных масс. Этот метод является частным случаем метода разбиения. Он применяется к однородному телу, имеющему отверстие, при условии, что: а) центр тяжести тела, в котором отверстие заполнено тем же веществом, что и тело, известен; б) центр тяжести отверстия тоже известен.

Обозначим координаты центра тяжести сплошного тела (без отверстия) x_1, y_1, z_1 ; вес тела P_1 . Координаты центра тяжести отверстия обозначим — x_2, y_2, z_2 ; вес отверстия заполненного тем же веществом, что и тело — P_2 . Тогда координаты центра тяжести тела с отверстием находятся по формулам:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{P_1 x_1 + (-P_2) x_2}{P_1 + (-P_2)}, \\ y_c &= \frac{P_1 y_1 + (-P_2) y_2}{P_1 + (-P_2)}, \\ z_c &= \frac{P_1 z_1 + (-P_2) z_2}{P_1 + (-P_2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы применяем те же формулы, что и во втором способе, но только вес отверстия считаем отрицательным.

Существуют еще и другие способы определения центров тяжести, которые мы здесь не рассматриваем.

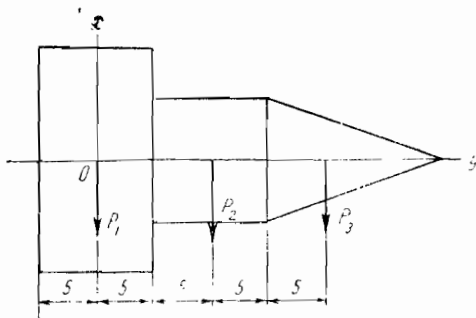
Пример. Плоская пластина представляет собой тело сложной формы, состоящей из квадрата, прямоугольника и треугольника. Вес прямоугольника $P_1 = 1$ кг, квадрата $P_2 = 0,5$ кг и треугольника $P_3 = 0,6$ кг. Найти координаты центра тяжести. Размеры в см указаны на чертеже (фиг. 71).

Решение. Так как пластинка симметрична относительно оси, то $y_c = 0$, надо найти x_c :

$$x_c = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{1 \cdot 0 + 0,5 \cdot 10 + 0,6 \cdot 20}{1 + 0,5 + 0,6} \approx 8,1 \text{ см.}$$

§ 2. Центр тяжести объема, площади поверхности, дуги кривой

Если вес тела равномерно распределен или по объему, или по площади, или по дуге кривой, то в формулах, определяющих координаты центра тяжести, нужно вместо P_i



Фиг. 71

вставить или элемент объема v_i или элемент площади σ_i или элемент дуги l_i ; так, для определения координат центра тяжести объема нужно записать следующие формулы

$$x_C = \frac{\sum v_i x_i}{v},$$

$$y_C = \frac{\sum v_i y_i}{v}, \quad z_C = \frac{\sum v_i z_i}{v},$$

где v — объем тела, v_i — объем выделенного элемента. Координаты центра тяжести площади поверхности определяются следующими формулами:

$$x_C = \frac{\sum \sigma_i x_i}{\sigma}, \quad y_C = \frac{\sum \sigma_i y_i}{\sigma}, \quad z_C = \frac{\sum \sigma_i z_i}{\sigma}.$$

Координаты центра тяжести дуги кривой:

$$x_C = \frac{\sum l_i x_i}{l}, \quad y_C = \frac{\sum l_i y_i}{l}, \quad z_C = \frac{\sum l_i z_i}{l},$$

где l — длина дуги кривой.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти координаты центра тяжести объема, состоящего из цилиндра и конуса (фиг. 72). Размеры указаны на чертеже.

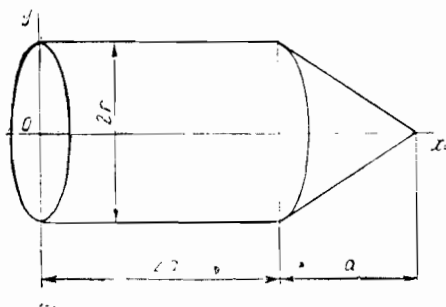
Решение. Так как центр тяжести лежит на оси симметрии, то $y_A = 0$

$$x_C = \frac{v_{\text{цил}} x_1 + v_{\text{кон}} x_2}{v_{\text{цил}} + v_{\text{кон}}},$$

где $v_{\text{цил}}$, x_1 — объем и координата тяжести цилиндра, $v_{\text{кон}}$, x_2 — объем и координата центра тяжести конуса:

$$v_{\text{цил}} = \pi r^2 2a, \quad x_1 = a, \quad v_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi r^2 a,$$

Как найти x_2 ? Известно, что центр тяжести объема конуса находится на расстоянии равном одной четверти высоты над



Фиг. 72

основанием конуса, то есть в нашем случае на расстоянии $\frac{a}{4}$ от основания конуса, поэтому $x_2 = 2a + \frac{a}{4} = \frac{9}{4} a$. Подставляя указанные значения в формулу, определяющую x_C находим

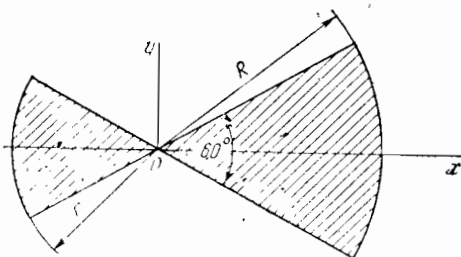
$$x_C = \frac{\pi r^2 \cdot 2a \cdot a + \frac{1}{3} \pi r^2 a \cdot \frac{9}{4} a}{\pi r^2 2a + \frac{1}{3} \pi r^2 a} = \frac{33}{28} a.$$

Пример 2. Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, состоящей из двух секторов: размеры и углы даны на чертеже (фиг. 73).

Мы замечаем, что в силу симметрии $y_C = 0$.

$$x_C = \frac{\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2}{\sigma_1 + \sigma_2},$$

где σ_1 , x_1 — соответственно площадь и координаты центра тяжести маленького сектора, σ_2 , x_2 — площадь и координата центра тяжести большого сектора.



Фиг. 73

Известно, что центр тяжести сектора лежит на линии симметрии и находится от вершины сектора на расстоянии

$$OC_2 = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

где R — радиус сектора, 2α — угол раствора сектора. В нашем случае $2\alpha = \frac{\pi}{3}$ ($\frac{\pi}{3} \sim 60^\circ$) (угол надо брать в радианах).

Отсюда следует, что:

$$x_1 = -OC_1 = -\frac{2}{3}r \frac{\sin 30^\circ}{\frac{\pi}{6}} = -\frac{2}{3}r \frac{6}{2\pi}, \quad \sigma_1 = \frac{\pi r^2}{6},$$

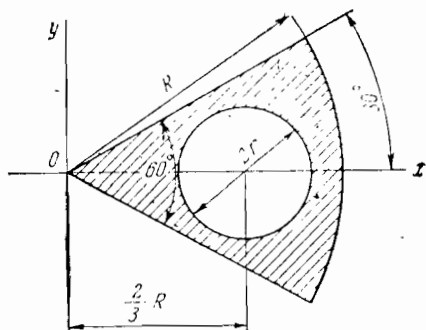
$$x_2 = \frac{2}{3}R \frac{\sin 30^\circ}{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3}R \frac{6}{\pi}, \quad \sigma_2 = \frac{\pi R^2}{6},$$

и мы получим:

$$x_C = \frac{\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\frac{\pi r^2}{6} \left(-\frac{2}{3}r \frac{6}{2\pi} \right) + \frac{\pi R^2}{6} \left(\frac{2}{3}R \frac{6}{\pi} \right)}{\frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi R^2}{6}},$$

$$x_C = \frac{2}{\pi} \frac{R^3 - r^3}{r^2 + R^2}.$$

Пример 3. Определить центр тяжести сектора, из которого вырезано круглое отверстие радиуса r . Остальные размеры указаны на чертеже (фиг. 74). При решении этой задачи применяем метод отрицательных масс. Мы считаем, что от-



Фиг. 74

верстие заполнено тем же самым веществом, что и сектор, но площадь отверстия (вес) отрицателен.

Для нахождения x_C пользуемся следующей формулой:

$$x_C = \frac{\sigma_1 x_1 + x_2 (-\sigma_2)}{\sigma_1 + (-\sigma_2)}.$$

Здесь σ_1 , x_1 — соответственно площадь и координаты центра тяжести сектора без отверстия; σ_2 , x_2 — площадь и координаты центра тяжести отверстия

$$\sigma_1 = \frac{\pi R^2}{6}, \quad x_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin 30^\circ}{\frac{\pi}{6}} = \frac{2R}{\pi}, \quad x_2 = \frac{2}{3} R \quad \sigma_2 = \pi r^2,$$

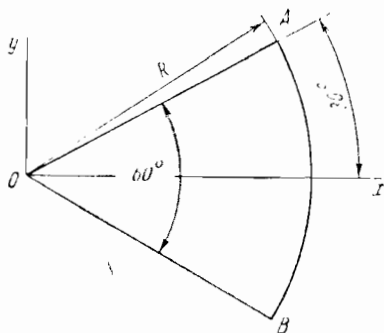
$$x_C = \frac{\frac{2R}{\pi} \frac{\pi R^2}{6} + \frac{2}{3} R (-\pi r^2)}{\frac{\pi R^2}{6} + (-\pi r^2)} = 2 \frac{R^3 - 2R\pi r^2}{\pi (R^2 - 6r^2)}.$$

Пример 4. Определить центр тяжести контура сектора, состоящего из дуги окружности радиуса R и двух радиусов (фиг. 75).

Решение: Центр тяжести контура лежит на оси x , $y_C = 0$.

$$x_C = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3}{l_1 + l_2 + l_3}.$$

Здесь l_1, x_1 — соответственно длина дуги и координата центра тяжести C_1 дуги, причем $x_1 = OC_1 = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, где $2\alpha = \frac{\pi}{3}$, $l_1 = R \frac{\pi}{3}$; l_2, x_2 — соответственно длина отрезка OA



Фиг. 75

и координата центра тяжести OA ; $l_2 = R, x_2 = R \cos 30^\circ = \frac{1}{2} R$; l_3, x_3 — соответственно длина отрезка OB и координата центра тяжести отрезка OB .

Подставляя эти значения в x_C , найдем

$$x_C = \frac{R \frac{\pi}{3} R \frac{1}{2} + R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} + R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2}}{R \frac{\pi}{3} + R + R} = 0,72R.$$

Решить: [Л. 4] №№ 292, 287, 294.

Часть вторая

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

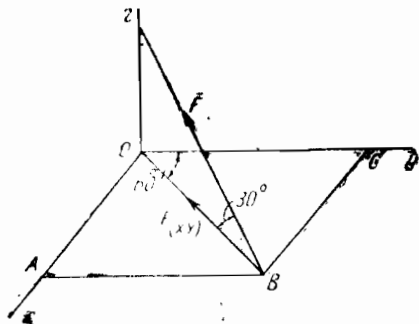
Глава первая

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ КАК ВЕКТОР

§ 1. Система сходящихся сил в пространстве

Для системы сходящихся сил в пространстве можно написать 3 уравнения равновесия:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0.$$



Фиг. 76

Пример 1. Сила \vec{F} образует с диагональю прямоугольника $OABC$ угол в 30° (фиг. 76). Диагональ BO образует с осью y угол 60° . Найти проекции силы \vec{F} на оси x, y, z . При проектировании силы на ось надо сначала спроектировать силу на плоскость, содержащую ось, а затем уже на саму ось.

Проекция силы \vec{F} на плоскость xy есть вектор $\vec{F}_{(xy)}$.

Вектор $\bar{F}_{(xy)}$ численно равен произведению силы F на \cos угла между силой \bar{F} и плоскостью xy .

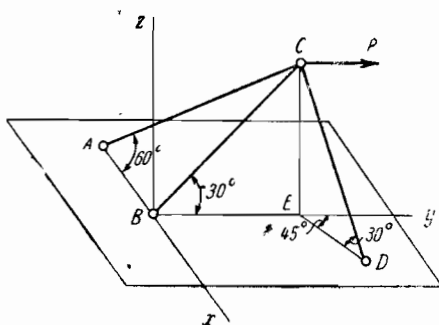
$\bar{F}_{(xy)} = F \cos 30^\circ$ и направлен по BO (фиг. 76):

$$F_x = -F_{xy} \cos 30^\circ = -F \cos^2 30^\circ = -\frac{3}{4} F,$$

$$F_y = -F_{xy} \cos 60^\circ = -F \cos 30^\circ \cos 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{4} F,$$

$$F_z = F \cos 60^\circ = \frac{1}{2} F.$$

Пример 2. (фиг. 77). 3 стержня — AC , BC , DC соединены в точке C сферическим шарниром и в точках A , B и D при-



Фиг. 77

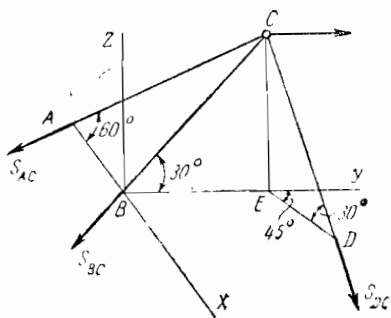
соединены к горизонтальной плоскости xy сферическими шарнирами A , B , D . На узел (шарнир) C действует сила P_{Kz} , параллельная y ; CE параллельно z . Углы указаны на чертеже.

Определить реакции шарниров A , B , D .

1. Отбрасываем внешние связи — шарниры в точках A , B и D . Так как каждый из стержней AC , BC и DC находится под действием двух сил (например, стержень AC находится под действием реакций шарниров A и C), то эти силы направлены по стержням. Заранее не всегда можно указать, на что работает стержень — на растяжение или на сжатие.

Нарисуем эти силы так, как если бы стержни работали на растяжение (фиг. 78), обозначив их \bar{S}_{AC} , \bar{S}_{BC} , \bar{S}_{DC} .

2. Составляем уравнения равновесия. (При проектировании силы S_{AC} на оси y и z поступаем так: сначала проектируем \bar{S}_{AC} на плоскость yz — она проектируется в вектор, расположенный по BC и равный $S_{AC} \cos 30^\circ$, а затем уже полученную проекцию проектируем на оси z и y . Анало-



Фиг. 78

гично поступаем с S_{DC} при проектировании ее на оси x и y . Проекция S_{DC} на плоскость xy — вектор, расположенный по ED и численно равный $S_{DC} \cos 30^\circ$).

Для сходящихся сил в пространстве можно составить 3 уравнения равновесия.

$$\Sigma F_x \equiv -S_{AC} \cos 60^\circ + S_{DC} \cos 30^\circ \cos 45^\circ = 0. \quad (1)$$

$$\Sigma F_y \equiv -S_{AC} \cos 30^\circ \cos 30^\circ - S_{BC} \cos 30^\circ + S_{DC} \cos 30^\circ \cos 45^\circ + P = 0. \quad (2)$$

$$\Sigma F_z \equiv -S_{AC} \cos 30^\circ \cos 60^\circ - S_{BC} \cos 60^\circ - S_{DC} \cos 60^\circ = 0. \quad (3)$$

Деля левую часть уравнения (2) на $\cos 30^\circ$ и левую часть уравнения (3) на $(-\cos 60^\circ)$, а затем складывая их, получим

$$S_{DC} \cos 45^\circ + \frac{P}{\cos 30^\circ} + S_{DC} = 0.$$

Откуда находим S_{DC} :

$$S_{DC} = \frac{-P}{\cos 30^\circ (\cos 45^\circ + 1)} = -\frac{4P}{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)} < 0.$$

Из первого уравнения находим:

$$S_{AC} = S_{DC} \frac{\cos 30^\circ \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} = - \frac{4P}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} < 0.$$

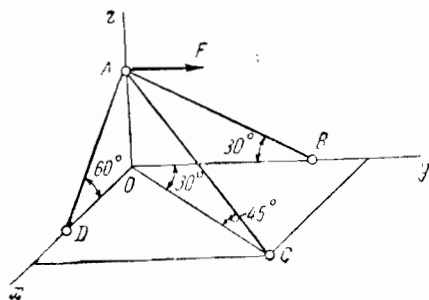
Из третьего уравнения:

$$S_{BC} = - (S_{AC} \cos 30^\circ + S_{CD}) = \frac{4P \sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) > 0.$$

Стержни AC и DC работают на сжатие, так как $S_{AC} < 0$ и $S_{DC} < 0$.

Решить самостоятельно следующий пример (фиг. 79).

3 стержня — DA , CA , BA соединены в точке A сферичес-



Фиг. 79

ким шарниром, а в точках D , C , B сферическими шарнирами присоединены к горизонтальной плоскости x , y . Углы указаны на чертеже. На узел A действует сила $F \parallel y$.

Найти реакции в точках D , C , B .

Ответ:

$$S_{AC} = - \frac{4P}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)} < 0,$$

$$S_{AB} = P \left(2,5 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) > 0,$$

$$S_{AD} = \frac{2P}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} > 0.$$

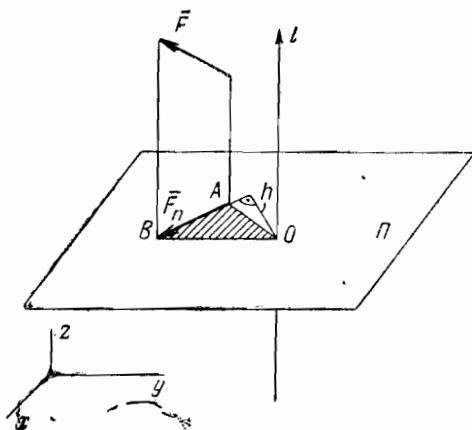
Решить: [Л. 4] №№ 215, 217;

[Л. 5] № 117.

§ 2. Момент силы относительно оси

Для нахождения момента силы относительно какой-либо оси поступают следующим образом. Сначала проектируют

силу на плоскость Π , перпендикулярную оси l , а затем вычисляют момент полученного вектора \overline{F}_{Π} относительно точки O пересечения оси l с плоскостью. Момент силы относительно оси—скаляр. Если система координат правая, то момент силы относительно оси l считают положительным, если при



Фиг. 80

взгляде с положительного направления оси l на плоскость Π вращение плоскости Π под действием силы \overline{F}_{Π} вокруг оси l происходит против часовой стрелки (фиг. 80).

Момент силы \overline{F} относительно оси l записывается так: $\text{mom}_l(\overline{F})$ или короче $m_l(\overline{F})$.

В нашем случае

$$m_l(\overline{F}) = h F_{\Pi},$$

где h — плечо силы \overline{F}_{Π} относительно точки O ; F_{Π} — вектор, который представляет собой проекцию силы на плоскость, перпендикулярную оси.

Момент силы \overline{F} относительно оси l численно равен удвоенной площади треугольника OAB . На фиг. 80 этот треугольник заштрихован.

Если сила параллельна оси или пересекает ось, то ее момент относительно оси равен нулю.

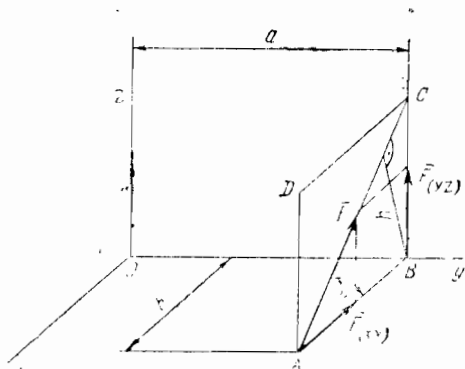
Пример на вычисление момента силы относительно оси

По диагонали прямоугольника $ABCD$ (фиг. 81), плоскость которого параллельна x, z и удалена от нее на расстоянии a , действует сила F .

Дано: $AB=b, CAB=\alpha$.

Найти моменты силы \vec{F} относительно осей x, y, z .

Решение. Для определения момента силы \vec{F} относительно



Фиг. 81

оси x спроектируем ее на плоскость, перпендикулярную оси x , то есть на плоскость yz . Назовем эту проекцию $\vec{F}_{(yz)}$.

$$F_{(yz)} = F \sin \alpha.$$

Затем вычислим момент $\vec{F}_{(yz)}$ относительно точки O (точки пересечения оси x с плоскостью yz).

$$\text{мом}_O [\vec{F}_{(yz)}] = OB F_{(yz)} = a F \sin \alpha.$$

так как по определению $m_x(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_{(yz)})$,

то $m_x(\vec{F}) = a F \sin \alpha$.

Момент силы \vec{F} относительно оси y .

Так как сила \vec{F} расположена в плоскости $ABCD$ перпендикулярной оси y , то для вычисления момента силы относительно оси y нужно из точки B (точка пересечения оси y с плоскостью $ABCD$) опустить на линию действия силы F перпендикуляр h . ($h=AB \sin \alpha$) — см. фиг. 81 и тогда:

$$m_y(\vec{F}) = -hF = -b \sin \alpha F.$$

Момент силы относительно оси z .

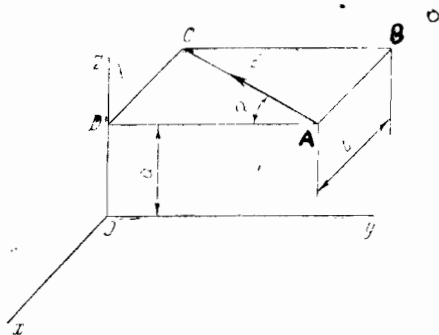
Проекция силы \vec{F} на плоскость $\perp z$ (на плоскость xy) равна $\vec{F}_{(xy)}$ (см фиг. 81). $F_{(xy)} = F \cos \alpha$.

По определению $m_z(\vec{F}) = m_o \vec{F}_{(xy)} = a F \cos \alpha$,

то есть $m_z(\vec{F}) = a F \cos \alpha$.

Решить самостоятельно следующий пример.

Сила \vec{F} (фиг. 82) расположена по диагонали прямоуголь-



Фиг. 82

ника $ABCD$, плоскость которого параллельна плоскости xy и удалена от нее на расстояние a , а его сторона AD лежит в плоскости yz

$$AB = b, \quad \angle DAC = \alpha.$$

Найти моменты силы относительно координатных осей.

Ответ:

$$\begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= F \cos \alpha a, \\ m_y(\vec{F}) &= -F \sin \alpha a, \\ m_z(\vec{F}) &= F b \cos \alpha. \end{aligned}$$

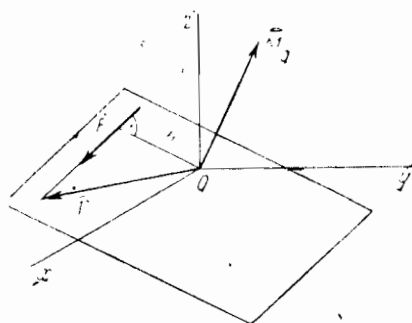
§ 3. Момент силы относительно точки в пространстве

Момент силы \vec{F} относительно точки O в пространстве — вектор, численно равный произведению силы на плечо и направленный перпендикулярно плоскости, проведенной через силу и точку так, что, смотря из конца этого вектора, мы

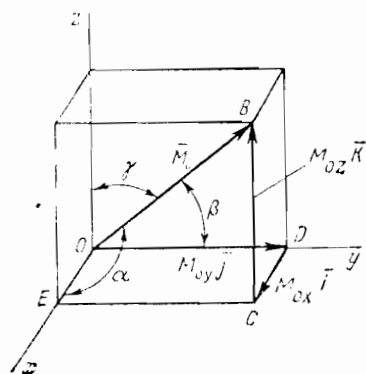
видим вращение плоскости вокруг этой точки под действием силы против часовой стрелки (фиг. 83) (в случае правой системы координат).

$$\bar{M}_O = \bar{m}_O (\bar{F}), \quad M_O = h F.$$

Как известно из векторной алгебры, всякий вектор можно



Фиг. 83



Фиг. 84

разложить по ортам, то есть можно написать следующую формулу:

$$\bar{M}_O = M_{Ox} \bar{i} + M_{Oy} \bar{j} + M_{Oz} \bar{k}.$$

Здесь (фиг. 84)

$$M_{Ox} = OE = M_O \cos \alpha,$$

$$M_{Oy} = OD = M_0 \cos \beta,$$

$$M_{Oz} = CB = M_0 \cos \gamma,$$

где α, β, γ — углы, составляемые моментом M_0 с осями x, y, z , а M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} — проекция момента \overline{M}_0 на оси x, y, z . Момент $\overline{M}_0 = \overline{m}_0 (\overline{F})$ можно представить в виде векторного произведения: $\overline{M}_0 = [\overline{r} \overline{F}]$, где \overline{r} — вектор, начало которого находится в точке O , а конец где-либо на линии действия силы \overline{F} (фиг. 83).

Как известно, векторное произведение можно выразить через определитель:

$$\overline{M}_0 = [\overline{r} \overline{F}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Здесь x, y, z — текущие координаты линии действия силы, так как

$$r_x = x - x_0 = x,$$

$$r_y = y - y_0 = y,$$

$$r_z = z - z_0 = z.$$

($x_0 = y_0 = z_0 = 0$ см. фиг. 83).

Раскрывая определитель по элементам 1-ой строки, получим:

$$\overline{M}_0 = (y F_z - z F_y) \overline{i} + (z F_x - x F_z) \overline{j} + (x F_y - y F_x) \overline{k}.$$

Выражения, стоящие в скобках при $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, представляют собой проекции M_0 на $\overline{оси} x, y, z$, то есть

$$M_{Ox} = (m_0 \overline{F})_x = y F_z - z F_y, \quad M_{Oy} = z F_x - x F_z,$$

$$M_{Oz} = x F_y - y F_x.$$

Пример (фиг. 85). Определить вектор-момент \overline{M}_0 относительно точки O силы \overline{F} , расположенной по высоте DK грани EDB правильного тетраэдра $ODBE$, сторона которого равна a .

Найдем сначала проекции момента силы \overline{F} относительно точки O на оси x, y, z — M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} .

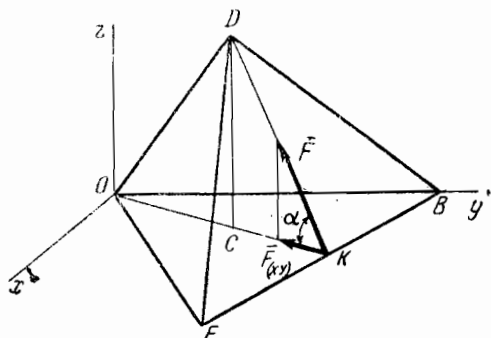
Для этого вычислим координаты какой-либо точки, например точки K на линии действия силы F :

$$x = x_K = OK \cos 60^\circ = OB \cos 30^\circ \cos 60^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$y = y_K = OB \cos 30^\circ \cos 30^\circ = \frac{3}{4} a,$$

$$z = z_K = 0.$$

Найдем проекции силы \vec{F} на оси x , y , z



Фиг. 85

$$F_x = -F_{(xy)} \cos 60^\circ = -F \cos \alpha \cos 60^\circ,$$

$$F_y = -F_{(xy)} \cos 30^\circ = -F \cos \alpha \cos 30^\circ,$$

$$F_z = F \sin \alpha,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{CK}{DK} = \frac{1}{3} \frac{OK}{DK} = \frac{1}{3},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(точка C на фиг. 85—центр тяжести треугольника OBE , в которой пересекаются медианы треугольника, $OC = 2CK$).

Подставляя эти значения x , y , z , F_x , F_y , F_z в формулы, определяющие M_{Ox} , M_{Oy} , M_{Oz} , получим $M_{Ox} = y F_z -$

$$- z F_y = \frac{3}{4} a F \sin \alpha - 0 \cdot F \cos \alpha \cos 30^\circ =$$

$$= \frac{3}{4} a F \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{a F \sqrt{2}}{2},$$

$$M_{Oy} = z F_x - x F_z = - \frac{a\sqrt{3}}{4} F \sin \alpha = - \frac{aF}{\sqrt{6}},$$

$$\begin{aligned}
 M_{Oz} &= x F_y - y F_z = \frac{a\sqrt{3}}{4} F \cos \alpha \cos 30^\circ - \\
 &\quad - \frac{3}{4} a F \sin \alpha = -aF \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\
 \bar{M}_O &= M_{Ox} \bar{i} + M_{Oy} \bar{j} + M_{Oz} \bar{k} = aF \times \\
 &\quad \times \left[\frac{\bar{i}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{j} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \bar{k} \right].
 \end{aligned}$$

Решить самостоятельно следующий пример. Сила \bar{F}_1 расположена по грани ED правильного тетраэдра $ODBE$ со стороной a и направлена от точки E к точке D (см. фиг. 85) (сила \bar{F}_1 на чертеже не показана — нарисуйте ее сами).

Определить момент относительно точки O силы \bar{F}_1 и проекции вышеуказанного момента на оси x, y, z .

Ответ:

1.
$$M_O = \frac{F_1 a}{\sqrt{6}} \bar{i} - a F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{j} + \frac{F_1 \sqrt{3}}{6} a \bar{k}.$$
2.
$$M_{Ox} = \frac{F_1 a}{\sqrt{6}}, \quad M_{Oy} = -a F_1 \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad M_{Oz} = \frac{F_1 \sqrt{3}}{6}.$$

§ 4. Теорема о зависимости между моментом силы относительно оси и моментом силы относительно точки, лежащей на этой оси

Проекция на какую-либо ось l вектора момента силы \bar{F} , вычисленного относительно точки A , лежащей на этой оси, равна моменту силы \bar{F} относительно оси l . (проделайте самостоятельно следующее задание: вернитесь к примеру, который Вы только что решили в конце § 3, и найдите момент силы \bar{F}_1 относительно оси z — $m_z(\bar{F}_1)$. Вы должны получить, что $m_z(\bar{F}_1) = M_{Oz}$).

Из этой теоремы следует, что момент силы относительно оси или, что то же самое, проекция момента на ось может быть вычислена двумя способами.

1-й способ (геометрический). Для вычисления момента силы \bar{F} относительно оси x поступаем следующим образом: проектируем силу на плоскость, перпендикулярную оси x , и вычисляем момент проекции относительно начала координат.

2-й способ (аналитический). Вычисляем момент силы относительно оси x по формуле:

$$m_x(\vec{F}) = y F_z - z F_y.$$

В большинстве задач удобнее пользоваться 1-ым способом.

§ 5. Теорема Вариньона

Если система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно любой точки или оси равен сумме моментов сил составляющих относительно той же точки или оси. В сущности, этой теоремой мы пользуемся все время, даже не подозревая о ее существовании. Так, например, когда мы имеем однородную балку, то мы прикладываем вес балки в ее середине и составляем уравнения равновесия — в том числе уравнения моментов. При этом мы фактически пользуемся теоремой Вариньона, а именно, вместо того, чтобы вычислять момент сил веса, считая вес равномерно распределенным по всей длине балки, мы вычисляем момент равнодействующей сил веса, которую прикладываем в середине длины балки.

Пример. Вычислить момент силы \vec{F} относительно осей x , y , z и относительно точки O . Дано: отрезок $OK = a$, лежит в плоскости yz Указанные на чертеже углы α и β заданы. Величина силы \vec{F} известна (фиг. 86).

Так как сила \vec{F} лежит в плоскости треугольника ODK , то можно разложить ее на 2 составляющие силы: F_1 — расположенную по OK и F_2 — параллельную OD (фиг. 87). При этом $F_1 = F \cos \alpha$, $F_2 = F \sin \alpha$. Воспользуемся теоремой Вариньона:

$$m_l(\vec{F}) = m_l(\vec{F}_1) + m_l(\vec{F}_2).$$

Если сила \vec{F}_1 пересекает ось l , то $m_l(\vec{F}_1) = 0$, то есть мы имеем $m_l(\vec{F}) = m_l(\vec{F}_2)$, а так как оси x , y , z пересекают силу \vec{F}_1 , то: $m_x(\vec{F}_1) = 0$; $m_y(\vec{F}_1) = 0$; $m_z(\vec{F}_1) = 0$

$$m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}_2) = 0 \quad (\vec{F}_2 \parallel x),$$

$$m_y(\vec{F}) = m_y(\vec{F}_2),$$

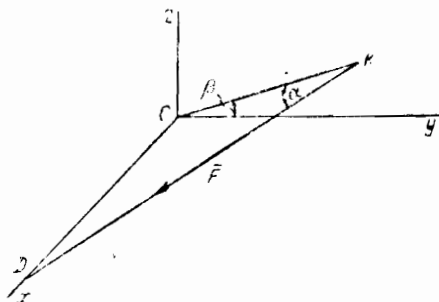
$$m_z(\vec{F}) = m_z(\vec{F}_2).$$

Для того чтобы вычислить момент силы \vec{F}_2 относительно оси y , спроектируем \vec{F}_2 на плоскость xz . Сила \vec{F}_2 спроек-

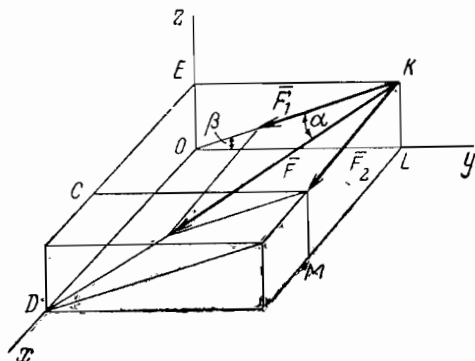
тируется в натуральную величину (в отрезок EC фиг. 87) и поэтому момент \bar{F}_2 относительно y равен $F_2 \cdot OE$; $OE = a \sin \beta$.

Итак получим $m_y(\bar{F}) = m_y(\bar{F}_2) = Fa \sin \alpha \sin \beta$.

Для вычисления момента силы \bar{F}_2 относительно оси z спроектируем силу на плоскость (yx), она спроектируется в натуральную величину — в отрезок LM (фиг. 87))



Фиг. 86



Фиг. 87

Тогда момент силы \bar{F}_2 относительно z — $m_z(\bar{F}_2) = -OL F_2$, так как $OL = a \cos \beta$, то $m_z(\bar{F}_2) = m_z(\bar{F}) = -Fa \cos \beta \sin \alpha$,

Найдем теперь вектор-момент силы \vec{F} относительно точки O :

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = m_x(F)\vec{i} + m_y(F)\vec{j} + m_z(F)\vec{k} =$$

$$= aF \sin \alpha [\sin \beta \vec{j} - \cos \beta \vec{k}].$$

Абсолютная величина вектора-момента силы относительно точки O :

$$|m_O(\vec{F})| = \sqrt{[m_x(\vec{F})]^2 + [m_y(F)]^2 + [m_z(\vec{F})]^2} =$$

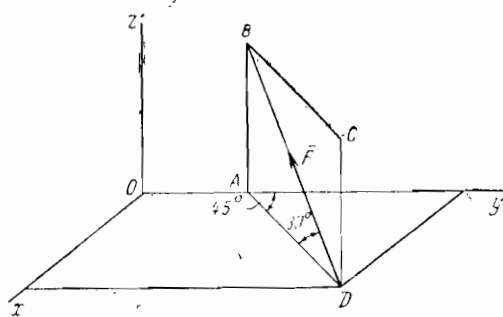
$$= aF \sin \alpha \sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta} = aF \sin \alpha.$$

З а м е ч а н и е. Абсолютное значение вектора-момента силы относительно точки O можно было вычислить через векторное произведение, а именно:

$$|m_O(\vec{F})| = |[\vec{OK} \vec{F}]| = aF \sin \alpha.$$

Решить самостоятельно пример (фиг. 88):

Найти вектор-момент силы \vec{F} относительно точки O и его проекции на оси x , y , z . Сила \vec{F} действует по диагонали



Фиг. 88

прямоугольника $ABCD$, расположенного в вертикальной плоскости и образующего с плоскостью (zy) угол в 45°
 $CA = a$, $AD = b$.

Указание: при решении задачи силу \vec{F} разложить на составляющие по AD и DC и воспользоваться теоремой Вариньона.

О т в е т :

$$M_{Ox} = m_x(\vec{F}) = \left(a + \frac{b}{\sqrt{2}}\right) \frac{F}{2},$$

$$M_{Oy} = m_y(\bar{F}) = -\frac{Fb}{4}\sqrt{2},$$

$$M_{Oz} = m_z(\bar{F}) = \frac{aF\sqrt{6}}{4},$$

$$\bar{M}_O = \left(a + \frac{b}{\sqrt{3}}\right)F \bar{i} - \frac{Fb\sqrt{2}}{4}\bar{j} + \frac{aF\sqrt{6}}{4}\bar{k}.$$

Решить: [Л. 5] № 121.

Глава вторая

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ И СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Произвольная пространственная система сил

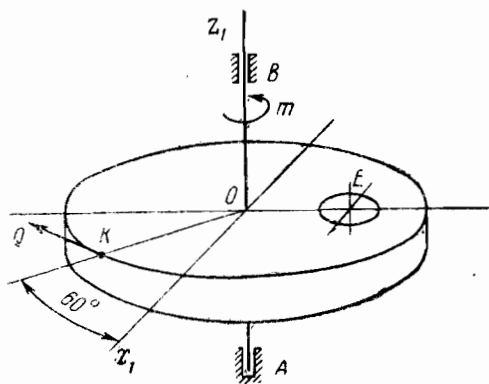
Для произвольной пространственной системы сил можно составить 6 уравнений равновесия:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma m_x(\bar{F}) = 0,$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad \Sigma m_y(\bar{F}) = 0,$$

$$\Sigma F_z = 0, \quad \Sigma m_z(\bar{F}) = 0.$$

Примеры. 1-й пример (фиг. 89). Горизонтальная круглая



Фиг. 89

пластинка радиусом $R = 5$ см и толщиной $d = 1$ см из стали, с отверстием (радиус которого $r = 1$ см и центр в точке E — $OE = 3$ см) может вращаться вокруг вертикальной оси z_1 .

Пластинка находится в покое под действием пары, расположенной в плоскости пластинки, момент которой $m = 10 \text{ кгсм}$ и силы $Q \text{ кг}$, приложенной в точке K по касательной к окружности.

Определить величину силы Q и реакции подпятника A и подшипника B . $AO = OB = 6 \text{ см}$ (удельный вес стали $\gamma = 7,8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$).

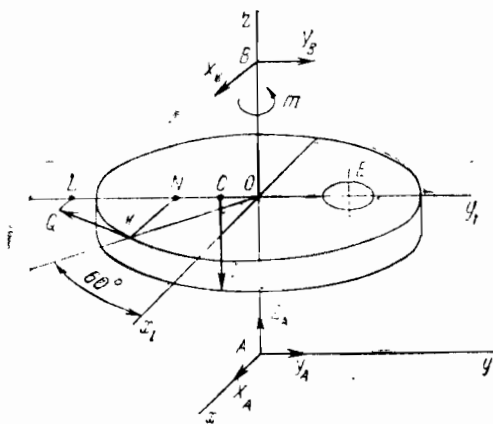
Прежде чем искать реакции, найдем точку приложения C веса пластинки.

$x_{1C} = 0$, так как в силу симметрии точка C лежит на оси y_1 .

Для нахождения y_{1C} воспользуемся следующей формулой (см. центр тяжести стр. 61, § 1. 3 — метод отрицательных масс)

$$y_{1C} \equiv \frac{\sigma_1 y_1 + (-\sigma_2) y_2}{\sigma_1 + (-\sigma_2)}$$

Здесь y_1 , σ_1 — координата центра тяжести и площадь пластинки, если бы пластинка была без отверстия.



Фиг. 90

y_2 , σ_2 — координата центра тяжести и площадь отверстия.

Так как $y_1 = 0$, $\sigma_1 = \pi R^2 = 25\pi \text{ см}^2$,
 $y_2 = 3 \text{ см}$, $\sigma_2 = \pi r^2 = \pi \text{ см}^2$,

то:

$$y_{1c} = \frac{-\pi r^2 \cdot 3}{\pi R^2 - \pi r^2} = -\frac{1}{8} \text{ см.}$$

Вес пластинки

$$P = \gamma (\pi R^2 h - \pi r^2 h) = 24 \pi \gamma = 24 \cdot \pi \cdot 7,8 = 0,59 \text{ кг.}$$

Теперь приступим к решению нашей задачи.

1. Отбросим внешние связи (фиг. 90). В подпятнике A возникает реакция, неизвестная ни по величине, ни по направлению, которую мы разложим на составляющие $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$. Реакция подшипника B то же неизвестна ни по величине, ни по направлению и расположена в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. Раскладываем ее на составляющие \bar{X}_B, \bar{Y}_B .

2. Напишем 6 уравнений равновесия, причем начало координат выберем в подпятнике A (тогда силы X_A, Y_A, Z_A не войдут в уравнение моментов относительно координатных осей), и проведем оси xy параллельно x_1, y_1 :

$$\Sigma P_x \equiv X_A + X_B - Q \cos 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma F_y \equiv Y_A + Y_B - Q \cos 60^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\Sigma F_z \equiv Z_A - P = 0, \quad (3)$$

$$\Sigma m_x (\bar{F}) \equiv -Y_B AB + P \cdot OC + Q \cos 60^\circ OA = 0, \quad (4)$$

$$\Sigma m_y (\bar{F}) \equiv X_B AB - Q \cos 30^\circ OA = 0, \quad (5)$$

$$\Sigma m_z (\bar{F}) \equiv QR - m = 0. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. При составлении уравнений моментов сил относительно оси (например x) мы проектируем все силы на плоскость, перпендикулярную оси (на плоскость yz , так как $yz \perp x$), и вычисляем моменты полученных проекций относительно начала координат A .

Так, например, при вычислении момента силы \bar{Q} относительно оси x мы проектируем \bar{Q} на плоскость zy ; она спроектируется в вектор $\bar{Q}_{(zy)}$, расположенный вдоль отрицательной оси y_1 $\bar{Q}_{(zy)} = \overline{NL}$ (фиг. 90) $Q_{(zy)} = Q \cos 60^\circ$. Затем вычисляем момент полученной проекции относительно точки A :

$$m_x (\bar{Q}) \equiv m_A (\bar{Q}_{(zy)}) = Q \cos 60^\circ OA.$$

В последнее уравнение (6) не входят силы реакции. Оно представляет собой условие, которому должны удовлетворять пара (m кг см) и сила \bar{Q} , чтобы пластинка находилась в равновесии.

В общем случае, если тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, находится в покое под действием системы сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$), то сумма моментов этих сил относительно оси вращения z равна 0. Уравнение $\Sigma m_z(\vec{F}) = 0$ называется условием равновесия тела, имеющего неподвижную ось вращения z .

Вернемся к нашей задаче.

Из последнего уравнения находим: $Q = \frac{m}{R} = 2 \text{ кг}$; подставляя это значение Q в уравнение (5), находим: $X_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ кг}$.

Из уравнения (4) получим:

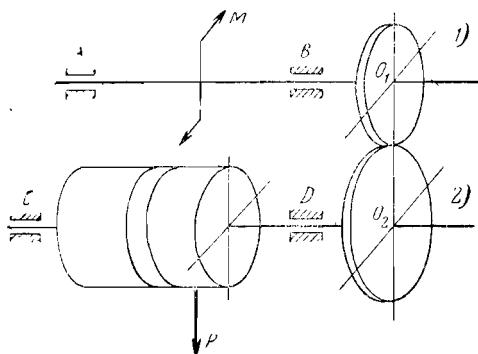
$$Y_B = \frac{1}{2} \frac{Q OA}{AB} + P \frac{OC}{AB} = \frac{1}{2} + 0,59 \frac{1}{8 \cdot 12} = 0,51 \text{ кг},$$

$$Z_A = P = 0,59 \text{ кг},$$

$$Y_A = Q \cos 60^\circ - Y_B = 1 - 0,51 = 0,49 \text{ кг},$$

$$X_A = Q \cos 30^\circ - X_B = 0,14 \text{ кг}.$$

2-й пример (фиг. 91). На вал AB , установленный в подшипниках A и B , насажена зубчатая шестеренка 1, находящаяся в зацеплении с шестеренкой 2, насаженной на вал CD . С валом CD жестко связан барабан радиуса R . На барабан навёрнута веревка, к концу которой подвешен груз P кг. Передаточное отношение 1-й шестеренки ко 2-й $|i_{12}| =$



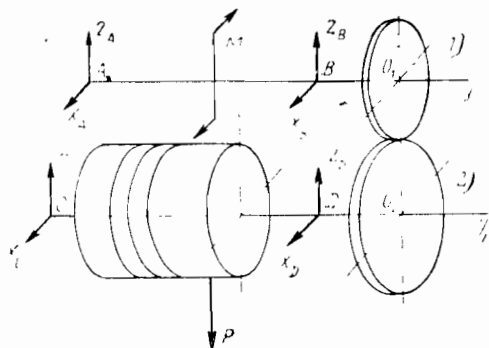
Фиг. 91

CD . С валом CD жестко связан барабан радиуса R . На барабан навёрнута веревка, к концу которой подвешен груз P кг. Передаточное отношение 1-й шестеренки ко 2-й $|i_{12}| =$

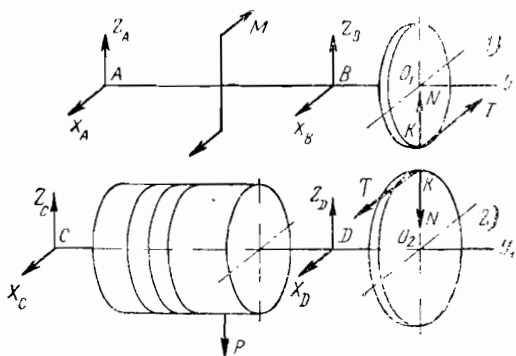
$= \frac{z_2}{z_1} = k$, где z_2 и z_1 — соответственно число зубцов 2-й и 1-й шестеренок. Найти, какой момент M кгм надо приложить к валу AB , чтобы система оставалась в равновесии.

1. Отбрасываем внешние связи — подшипники.

Реакции в подшипниках раскладываем на 2 составляю-



Фиг. 92



Фиг. 93

щие перпендикулярно оси вала. Получим картину, изображенную на фиг. 92.

2. Так как мы имеем 9 неизвестных

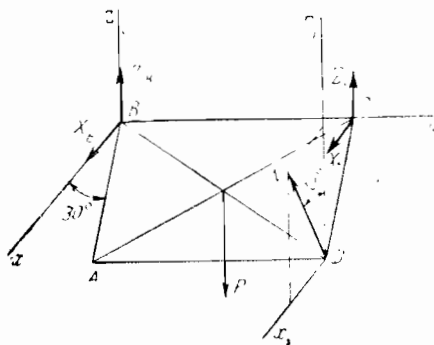
$$X_A, Z_A, X_B, Z_B, X_C, Z_C, X_D, Z_D, M,$$

а уравнений можно составить только 6, то систему разбиваем на 2 тела: при этом в точке касания шестеренок

1. Отбрасываем связи в точках B, C, D (фиг. 95). Реакции в точках B и C (петли) направлены перпендикулярно оси петли, то есть перпендикулярно y ; разложим их на составляющие

$$X_B, Z_B, X_C, Z_C.$$

Реакция точки $D - \bar{N}$ направлена перпендикулярно пластине $ABCD$, то есть перпендикулярно y , а значит



Фиг. 95

лежит в плоскости $x_1 z_1$, параллельной плоскости xz . Так как ось $z \perp (xy)$, а $\bar{N} \perp ABCD$, то угол между \bar{N} и z равен углу между плоскостями (xy) и $ABCD$, то есть равен 30° .

2. Пишем 6 уравнений равновесия:

$$\Sigma F_x = X_C + X_B + N \cos 60^\circ = 0. \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0. \quad (2)$$

$$\Sigma F_z = Z_B + Z_C - P + N \cos 30^\circ = 0. \quad (3)$$

$$\Sigma m_x(\bar{F}) = Z_C BC + N \cos 30^\circ BC - P \frac{BC}{2} = 0. \quad (4)$$

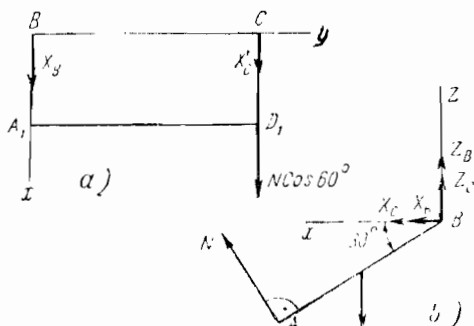
$$\Sigma m_y(\bar{F}) = P \frac{AB}{2} \cos 30^\circ - NCD = 0 \quad (\text{фиг. 96 } b) \quad (5)$$

$$\Sigma m_z(\bar{F}) = -X_C BC - N \cos 60^\circ BC = 0. \quad (\text{фиг. 96 } a) \quad (6)$$

При составлении уравнений моментов относительно оси y мы воспользовались картиной фиг. 96b, которая представляет собой вид сбоку — вид с положительной оси y . При этом пластинка проектируется в отрезок AB . Сила \bar{N} проек-

тируется в \bar{N} , \bar{P} в \bar{P} и т. д. На этой фигуре изображены проекции всех сил на плоскость (xz) ($xz \perp y$).

Вычисляя моменты сил относительно оси y , мы вычисляем моменты изображенных проекций на плоскости xz относи-



Фиг. 96

тельно точки B (точка пересечения оси y с плоскостью xz), то есть

$$\Sigma m_y (\bar{F}) = \Sigma m_B [\bar{F}_{zx}].$$

При составлении уравнений моментов относительно оси z мы используем фиг. 96а, на которой нарисован вид на фиг. 95 сверху (с положительной оси z). При этом пластинки $ABCD$ проектируются в прямоугольник A_1BCD_1 , сторона которого $A_1B = AB \cos 30^\circ$. Сила \bar{N} проектируется в вектор, расположенный на продолжении CD_1 и равный $N \cos 60^\circ$.

Решаем полученную систему уравнений; из уравнения (5)

$$N = P \frac{\cos 30^\circ}{2} = \frac{P\sqrt{3}}{4} \text{ кг},$$

подставляя это значение N в уравнение (6), находим X_C ;

$$X_C = -N \cos 60^\circ = -\frac{P\sqrt{3}}{8} \text{ кг}.$$

Из уравнения (1) находим:

$$X_B = -X_C - N \cos 60^\circ = 0$$

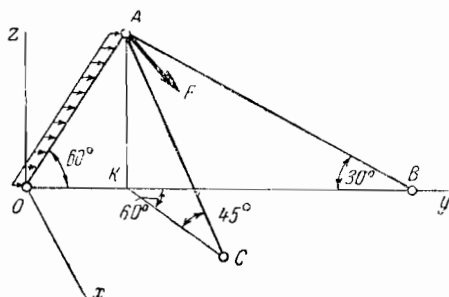
Зная N , находим из уравнения (4) Z_C .

$$Z_C = \frac{P}{2} - N \cos 30^\circ = \frac{P}{8}.$$

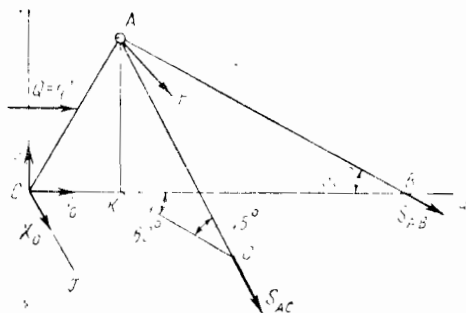
И из уравнения (3) находим Z_B :

$$Z_B = P - Z_C - N \cos 30^\circ = \frac{P}{2}.$$

4-й пример (фиг. 97). Три невесомых стержня OA , AB , AC соединены в точке A шарниром и прикреплены шарнирами в точках O , C , B к горизонтальному фундаменту. Треугольник OAB лежит в плоскости yz . На стержень OA , дли-



Фиг. 97



Фиг. 98

ны l , действует равномерно распределенная горизонтальная сила интенсивности q кг/м; на узел A действует сила F_{Kz} , параллельная оси x . Углы указаны на чертеже (при решении положить $F = ql$). Определить реакции в точках O , C , B .

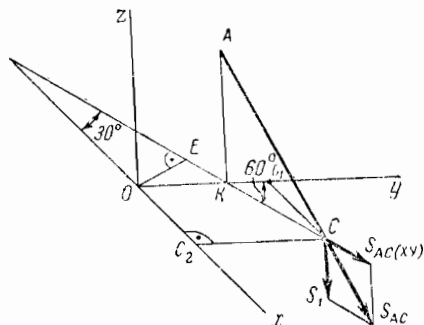
1. Решение. Отбрасываем связи — шарниры в точках O , C , B (фиг. 98); реакции в шарнирах C и B , так как стержни

AC и AB невесомые, направим по стержням и назовем их \overline{S}_{AC} и \overline{S}_{AB} . Реакцию в точке O разложим на три силы $\overline{X}_O, \overline{Y}_O, \overline{Z}_O$. Равномерно распределенную силу заменим результирующей $Q=ql$ и приложим ее в середине стержня.

Примечание. Мы нарисовали силы реакции $\overline{S}_{AC}, \overline{S}_{AB}$ так, как если бы стержни работали на растяжение.

Составим 6 уравнений равновесия (фиг. 98, 99).

$$\Sigma F_x \equiv X_O + F + S_{AC} \cos 45^\circ \cos 30^\circ = 0.$$



Фиг. 99

Замечание. Силу \overline{S}_{AC} мы спроектировали на плоскость xy (фиг. 99). Её проекция на эту плоскость направлена по прямой KC и равна $\overline{S}_{AC(xy)}$.

$$S_{AC(xy)} = S_{AC} \cos 45^\circ,$$

а затем эту проекцию спроектировали на ось x (с осью x KC образует угол в 30°):

$$\Sigma F_y \equiv Y_O + ql + S_{AC} \cos 45^\circ \cos 60^\circ + S_{AB} \cos 30^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_z \equiv Z_O - S_{AC} \cos 45^\circ - S_{AB} \cos 60^\circ = 0,$$

$$\Sigma m_x (\overline{F}) \equiv -ql \frac{AK}{2} -$$

$$- \left[\frac{AK\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} AK \right] S_{AC} \cos 45^\circ - S_{AB} \frac{AK}{\cos 30^\circ} = 0,$$

$$\Sigma m_y (\overline{F}) \equiv FAK + S_{AC} \cos 45^\circ AK \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

$$\Sigma m_z (\overline{F}) \equiv -F OK - S_{AC} \cos 45^\circ OK \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

З а м е ч а н и е. При составлении суммы моментов относительно осей мы силу \bar{S}_{AC} считали приложенной в точке C и раскладывали ее на 2 составляющие (фиг. 99): $\bar{S}_1 \parallel z$, $\bar{S}_{AC(xy)} \perp z$. Направление $\bar{S}_{AC(xy)}$ совпадает с направлением KC . Так как $\bar{S}_{AC(xy)}$ пересекает оси x, y , то ее моменты относительно этих осей равны 0; $\bar{S}_1 \parallel z$, ее момент относительно z равен 0.

Итак имеем:

$$\begin{aligned}\Sigma m_x (\bar{S}_{AC}) &= m_x (\bar{S}_1) = -OC_1 S_1, \\ \Sigma m_y (\bar{S}_{AC}) &= m_y (\bar{S}_1) = OC_2 S_1, \\ \Sigma m_z (\bar{S}_{AC}) &= m_x [\bar{S}_{AC(xy)}] = -OE S_{AC(xy)}.\end{aligned}$$

Здесь:

$$OC_1 = OK + KC_1 = AK \operatorname{ctg} 60^\circ + KC \cos 60^\circ = AK \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right), \text{ так как } KC = AK.$$

$$OC_2 = KC \cos 30^\circ = AK \frac{\sqrt{3}}{2} \quad OE = OK \sin 60 = OK \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Анализируя полученную систему уравнений, мы видим, что последние два уравнения тождественны.

Одно из них можно отбросить, и мы получим 5 уравнений с 5-ю неизвестными.

Решая систему уравнений, находим:

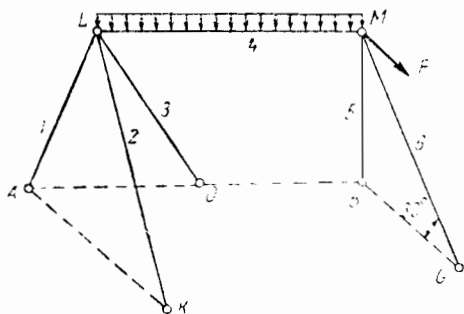
$$\begin{aligned}S_{AC} &= -\frac{4F}{\sqrt{6}} \approx -1,6 \, ql, \\ S_{AB} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2F}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{ql\sqrt{3}}{4} \approx 0,64 \, ql, \\ Z_0 &= \frac{-2F}{\sqrt{3}} + F \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{4} \right) - \frac{ql\sqrt{3}}{8} \approx -0,85 \, ql, \\ Y_0 &= -ql - S_{AC} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - S_{AB} \frac{\sqrt{3}}{2} = -ql + \\ &+ \frac{F}{\sqrt{3}} - 0,64 \, ql \approx -0,98 \, ql, \\ X_0 &= -F - S_{AC} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = -F + F = 0.\end{aligned}$$

Знак минус в ответах указывает, что силы реакции направлены не так, как мы нарисовали (фиг. 98), а в обратную

сторону, в частности, стержень AC работает не на растяжение, как мы предполагали, а на сжатие.

Решить самостоятельно.

Пример 1 (фиг. 100). Стержневая система состоит из 6 стержней. В точках A, L, K, O, M, B, G — сферические шар-



Фиг. 100

иры. Стержни 1, 3, 5, 4 находятся в одной вертикальной плоскости, LM — горизонтален ($LM=l$), отрезок $AK \parallel BG$ и перпендикулярен вертикальной плоскости. На стержень 4 действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q кг/м и сила $\vec{F} \parallel AK$. Угол $MGB=30^\circ$. Определить реакции в точках B и G .

Указание. Начало координат поместить в точку L . Оси: z — вертикально, y — по LM . $x \parallel AK$. Воспользоваться следующими уравнениями.

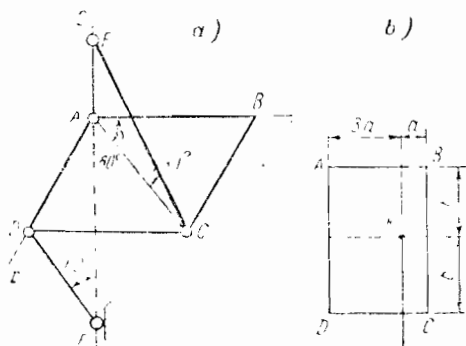
$$\begin{aligned} \Sigma m_x(\vec{F}) &= 0, \\ \Sigma m_z(\vec{F}) &= 0. \end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} S_G = S_6 &= -\frac{2F}{\sqrt{3}} < 0, \\ S_B = S_5 &= -\frac{ql}{2} + \frac{F}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Пример 2. Горизонтальная неоднородная пластинка $ABCD$, вес которой P кг приложен в точке K (см. фиг. 101 б), удерживается в равновесии сферическим шарниром A и не-

сомыми стержнями CF и DE , присоединенными к пластине сферическими шарнирами (фиг. 101a). Точки F, A, E лежат на одной вертикали. Определить реакции во всех шарнирах.



Фиг. 101

Ответ:

$$S_{CF} = \frac{3}{2} P \text{ кг}; S_{DE} = \frac{1}{2} P \text{ кг}; Y_A = \frac{3P\sqrt{3}}{8} \text{ кг};$$

$$Z_A = \frac{P}{2} \text{ кг}; X_A = \frac{P}{4} \left(-\frac{9}{2} + \sqrt{3} \right) \text{ кг}.$$

Решить:

[Л. 4] 258, 265, 270, 267.

[Л. 5] 129, 133.

§ 2. Уравнения равновесия системы параллельных сил в пространстве

Допустим, что имеется пространственная система сил, параллельная оси z . Для такой системы можно написать 3 уравнения равновесия

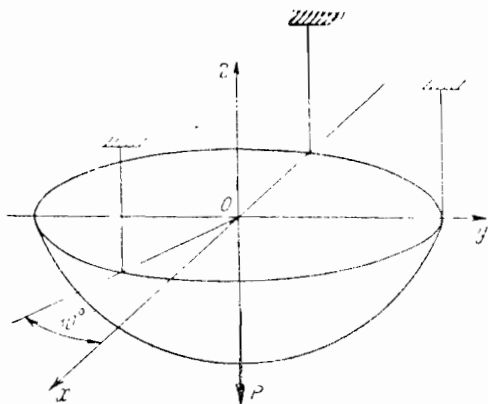
$$\Sigma F_z = 0,$$

$$\Sigma m_x (\vec{F}) = 0,$$

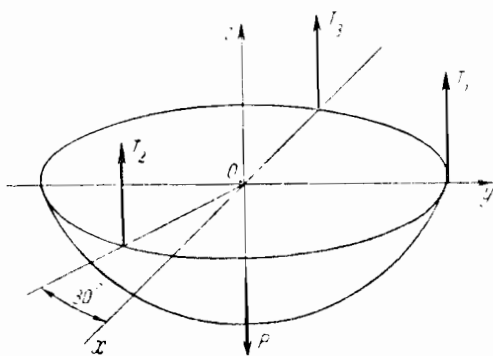
$$\Sigma m_y (\vec{F}) = 0.$$

Пример 1. Плафон, имеющий форму полусферы, весом P кг подвешен на трех вертикальных тросах, расположенных как показано на фиг. 102. Найти натяжение тросов.

Отбрасывая внешние связи, получим систему, изображенную на фиг. 103. Мы имеем систему параллельных сил в пространстве, для которых можно написать 3 уравнения равновесия:



Фиг. 102



Фиг. 103

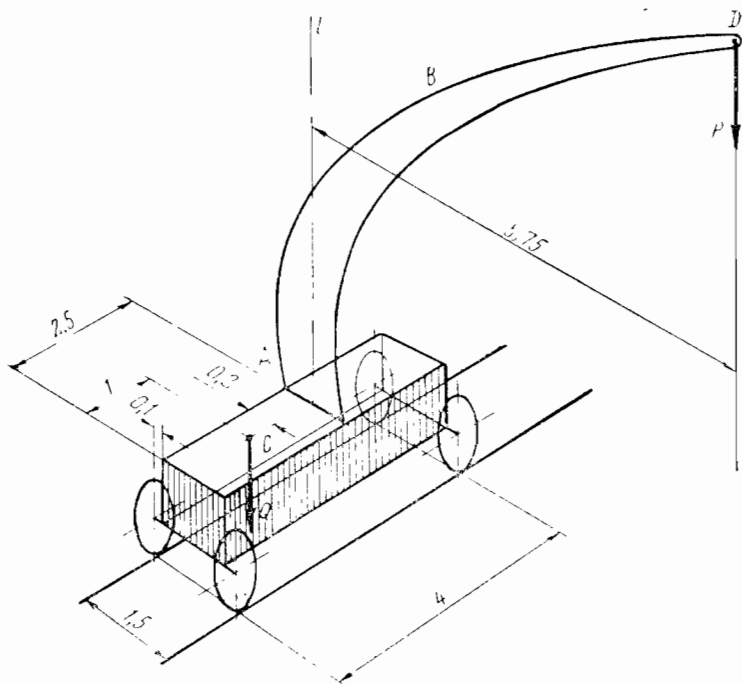
$$\begin{aligned} \Sigma F_z &= T_1 + T_2 + T_3 - P = 0; \quad \Sigma m_x (\bar{F}) \equiv \\ &\equiv T_1 r - T_2 r \sin 30^\circ = 0; \quad \Sigma m_y (\bar{F}) \equiv \\ &\equiv T_3 r - T_2 r \cos 30^\circ = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнения, находим:

$$T_1 = \frac{P}{3 + \sqrt{3}}; \quad T_2 = \frac{2P}{3 + \sqrt{3}}; \quad T_3 = \frac{\sqrt{3}P}{3 + \sqrt{3}}.$$

Пример 2. Задача на опрокидывание.

На фиг. 104 изображен поворотный кран, стрела которого ABD может поворачиваться вокруг вертикальной оси l , расположенной в продольной плоскости симметрии тележки.

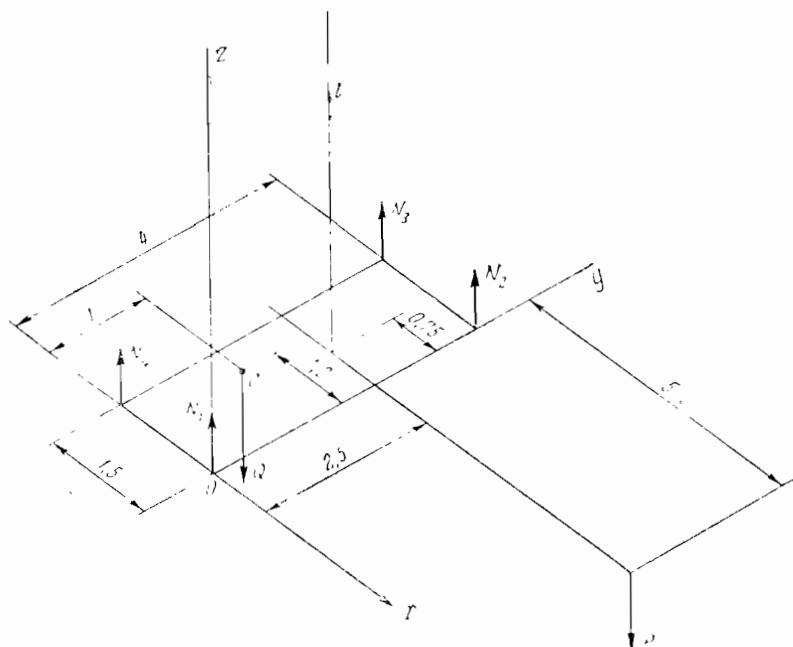


Фиг. 104

Пренебрегая весом стрелы и считая, что центр тяжести тележки со всеми деталями находится в точке C , определить наибольший груз P , при котором система в указанном на чертеже положении не опрокинется. Найти также силы реакции колес в момент опрокидывания. Размеры заданы на чертеже. Вес сооружения $Q = 15 \text{ т}$.

1. Отбрасываем связи и рисуем схему расположения сил (фиг. 105).

2. Опрокидывание может произойти вокруг оси y , в момент опрокидывания $N_3 = N_4 = 0$. Составим для этого момента уравнение равновесия.



Фиг. 105

$$\begin{aligned} \Sigma m_y (\bar{F}) &\equiv -Q \cdot 1,2 + 5P = 0; \\ \Sigma m_x (\bar{F}) &\equiv -Q \cdot 1 - 2,5P + N_2 \cdot 4 = 0; \\ \Sigma F_z &= N_1 + N_2 - P - Q = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнения, находим:

$$\begin{aligned} P &= 3,6 \text{ т}, \\ N_2 &= 6 \text{ т}, \\ N_1 &= 12,6 \text{ т}. \end{aligned}$$

Решить:

[Л. 4] №№ 246, 247.

[Л. 5] № 144.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Воронков, Курс теоретической механики, Техтеоретиздат, 4-е изд., 1953.
2. С. М. Тарг, Краткий курс теоретической механики, Физматгиз, 1958.
3. Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Курс теоретической механики, Техтеоретиздат, т. 1, 1954.
4. И. В. Мещерский, Сборник задач по теоретической механике, Техтеоретиздат, 23-е изд., 1957.
(Можно пользоваться всеми изданиями, начиная с 1947 г.).
5. Сборник задач по теоретической механике, под редакцией М. Г. Слободянского, ч. I (статика), 1953.
6. М. Г. Слободянский, А. М. Пивоваров, Конспект лекций по статике (с методическими указаниями к решению задач), МЭИ, 1967.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие.	
Часть I. Введение. Плоская система сил. Центр тяжести	
Глава первая. Введение, Система сходящихся сил на плоскости	3
Глава вторая. Произвольная система сил на плоскости	30
Глава третья. Сухое трение скольжения при покое	53
Глава четвертая. Центр тяжести	59
Часть II. Пространственная система сил	
Глава первая. Система сходящихся сил в пространстве. Момент силы относительно точки как вектор	66
Глава вторая. Произвольная пространственная система сил и система параллельных сил в пространстве	81

Методическое руководство к решению задач по статике

Автор **К. Д. Зверева.**

Редактор **А. К. Мызин.**

28/VIII 1968 г.

Объем 6 $\frac{1}{4}$ п. л.

Зак. 1393. Тир. 2200.

Типография МЭИ