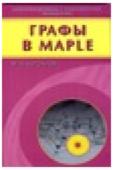
Глава 3

АЛГОРИТМЫ



3.1. Муравьиные алгоритмы

Задан полный евклидов граф. (рис. 1). Найти длину пути муравья в задаче коммивояжера. Начальная вершина 1. Дана последовательность P случайных чисел, выпавших в при выборе очередной вершины, расстояния $L_{k,j}$ между вершинами k, j и интенсивность феромона $\tau_{k,j}$ на ребре $[k, j]$. Секторы вероятности перехода сортировать по возрастанию номеров вершин. Использовать формулу вероятности перехода из вершины k в j

$$P_{k,j} = 100\frac{\eta_{k,j}^{\alpha}\tau_{k,j}^{\beta}}{\Sigma\eta_{k,i}^{\alpha}\tau_{k,i}^{\beta}} \tag{3.1}$$

при $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\eta_{k,j} = 1/L_{k,j}$

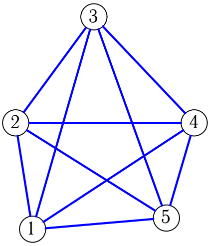


Рис. 1

Задача 5.25.

Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
$1-2$	46	2
$1-3$	87	2
$1-4$	82	2
$1-5$	57	2
$2-3$	54	2
$2-4$	75	2
$2-5$	79	2
$3-4$	48	2
$3-5$	83	2
$4-5$	47	2

$P = 30, 50, 72.$

Задача 5.26.

Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
$1-2$	50	2
$1-3$	86	1
$1-4$	70	1
$1-5$	52	2
$2-3$	51	2
$2-4$	65	2
$2-5$	78	3
$3-4$	46	2
$3-5$	82	3
$4-5$	41	2

$P = 35, 59, 74.$

Задача 5.27.

Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
$1-2$	54	2
$1-3$	83	2
$1-4$	82	2
$1-5$	56	1
$2-3$	38	3
$2-4$	67	3
$2-5$	80	2
$3-4$	48	2
$3-5$	87	1
$4-5$	54	2

$P = 31, 72, 41.$

Задача 5.28.

Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
$1-2$	42	1
$1-3$	83	1
$1-4$	80	1
$1-5$	48	2
$2-3$	46	1
$2-4$	66	1
$2-5$	64	2
$3-4$	51	2
$3-5$	82	3
$4-5$	49	3

$P = 46, 63, 80.$

Задача 5.29.

Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
$1-2$	51	3
$1-3$	83	2
$1-4$	86	3
$1-5$	63	2
$2-3$	47	2
$2-4$	78	3
$2-5$	88	2
$3-4$	49	2
$3-5$	86	1
$4-5$	53	2

$P = 66, 44, 42.$

Задача 5.30.

Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
$1-2$	53	1
$1-3$	85	1
$1-4$	82	1
$1-5$	53	2
$2-3$	40	2
$2-4$	71	2
$2-5$	70	3
$3-4$	54	1
$3-5$	75	2
$4-5$	40	2

$P = 34, 30, 32.$

Задача. Задан взвешенный граф K_5 (рис. 1). Найти длину пути муравья в задаче коммивояжера. Начальная вершина 1. Дана последовательность $P = 65, 61, 35$ случайных чисел, выпавших в при выборе очередной вершины. Расстояния $L_{k,j}$ между вершинами k, j и интенсивность феромона $\tau_{k,j}$ на ребре $[k, j]$ заданы в таблице

Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
$1-2$	38	3	$2-4$	61	1
$1-3$	74	2	$2-5$	72	1
$1-4$	59	2	$3-4$	49	2
$1-5$	45	2	$3-5$	85	2
$2-3$	46	1	$4-5$	42	1

Секторы вероятности перехода сортировать по возрастанию номеров вершин. Использовать формулу (3.1) вероятности перехода из вершины k в j.

Решение

1. В начале движения из вершины 1 муравей имеет четыре возможные пути: в вершину 2, 3, 4 или 5. Вычислим вероятности перехода в эти вершины

$$P_{1,2} = 100\,\frac{3/38}{3/38 + 2/74 + 2/59 + 2/45} = \frac{7.9}{0.18} = 42.83,$$

$$P_{1,3} = 100\,\frac{2/74}{0.18} = \frac{2.7}{0.18} = 14.66,$$

$$P_{1,4} = 100\,\frac{2/59}{0.18} = \frac{3.39}{0.18} = 18.4,$$

$$P_{1,5} = 100\,\frac{2/45}{0.18} = \frac{4.44}{0.18} = 24.11$$

Вычисляем границы четырех секторов $[p'_j, p''_j]$, $j = 2, 3, 4, 5$ вероятностей:

$$p'_2 = 0,\ \ p''_2 = P_{1,2} = 42.83,$$
$$p'_3 = p''_2 + P_{1,3} = 57.5,$$
$$p'_4 = p''_3 + P_{1,4} = 75.89,$$
$$p'_5 = p''_4 + P_{1,5} = 100.$$

Таким образом, отрезок $[0, 100]$ разбился на четыре участка

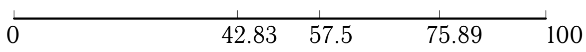


Рис. 2

Остается запустить генератор случайных чисел и узнать, куда попадет случайное число. В нашем случае генератор дает $P_1 = 65$, что указывает на третий участок $57.5 < 65 < 75.89$. Следовательно, муравей должен направится к вершине 4.

2. Из вершины 4 только три возможные пути: 4-2, 4-3, 4-5. Пройденная вершина 1 попадает в tabu-list (список запрещенных вершин)

Вероятности перехода в эти вершины

$$P_{4,2} = 100\,\frac{1/61}{1/61 + 2/49 + 1/42} = \frac{1.64}{0.081} = 20.23,$$

$$P_{4,3} = 100\,\frac{2/49}{0.18} = \frac{4.08}{0.081} = 50.38,$$

$$P_{4,5} = 100\,\frac{1/42}{0.18} = \frac{2.38}{0.081} = 23.39$$

Вычисляем границы четырех секторов $[p'_j, p''_j]$, $j = 2, 3, 5$ вероятностей:

$$p'_2 = 0,\ p''_2 = P_{4,2} = 20.23,$$
$$p'_3 = p''_2 + P_{4,3} = 70.71,$$
$$p'_5 = p''_3 + P_{4,5} = 100.$$

Таким образом, отрезок $[0, 100]$ разбился на три участка

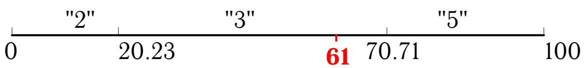


Рис. 3

Случайное число $P_2 = 61$, полученное генератором случайных чисел попадает на второй участок. Этот участок указывает на вершину 3. Далее муравей будет выбирать маршрут из этой вершины.

3. При выходе из вершины 3 имеется только две возможности — направится в вершину 2 или 5. Остальные вершины попадают в tabu-list. Оценим возможности перехода:

$$P_{3,2} = 100\,\frac{1/46}{1/46 + 2/85} = \frac{2.17}{0.045} = 48.02,$$
$$P_{3,5} = 100\,\frac{2/85}{0.18} = \frac{2.35}{0.045} = 51.98$$

Таким образом, отрезок $[0, 100]$ разбился на два участка

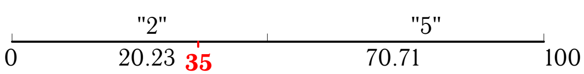


Рис. 4

Случайное число $P_3 = 35$, полученное генератором случайных чисел указывает на вершину 2.

4. В вершине 2 выбор делать не приходится. Все вершины, кроме 5 попали tabu-list, поэтому дальнейший путь муравья очевиден. Сначала он идет в вершину 5, а затем завершает маршрут в 1, там, откуда он и вышел. Общая длина маршрута 1-4-3-2-5-1 равна $L_{1,4} + L_{4,3} + L_{3,2} + L_{2,5} + L_{5,1} = 59 + 49 + 46 + 72 + 45 = 271$.

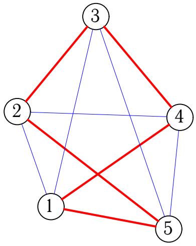


Рис. 5

3.2. Муравьиные алгоритмы. Два цикла.

Задача коммивояжера решается с помощью муравьиного алгоритма. Первый муравей выходит из вершины 1 по ребрам графа с равномерным слоем феромона $\tau_{k,j} = 1$. После прохождения гамильтонова цикла по следу муравья добавляется феромон интенсивностью $100/L_1$, где L_1 — длина его пути. Второй муравей также выходит из вершины 1. Дана последовательность P случайных чисел, выпавших в при выборе очередной вершины и расстояния $L_{k,j}$ между вершинами k, j. Секторы вероятности перехода сортировать по возрастанию номеров вершин. Использовать формулу (3.1) вероятности перехода из вершины k в j при $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\eta_{k,j} = 1/L_{k,j}$. Найти длину пути L_2 второго муравья.

Задача 6.1.

Ребро	$L_{k,j}$
1 − 2	38
1 − 3	85
1 − 4	85
1 − 5	54
2 − 3	55
2 − 4	78
2 − 5	72
3 − 4	54
3 − 5	84
4 − 5	50

$P = 33, 75, 30, 78, 37, 83.$

Задача 6.2.

Ребро	$L_{k,j}$
1 − 2	52
1 − 3	85
1 − 4	80
1 − 5	68
2 − 3	39
2 − 4	68
2 − 5	86
3 − 4	55
3 − 5	89
4 − 5	42

$P = 47, 43, 26, 64, 69, 87.$

Задача 6.3.

Ребро	$L_{k,j}$
1 − 2	44
1 − 3	83
1 − 4	67
1 − 5	51
2 − 3	52
2 − 4	63
2 − 5	72
3 − 4	45
3 − 5	77
4 − 5	36

$P = 53, 66, 42, 58, 46, 71.$

Задача 6.4.

Ребро	$L_{k,j}$
1 − 2	47
1 − 3	80
1 − 4	85
1 − 5	61
2 − 3	42
2 − 4	73
2 − 5	82
3 − 4	51
3 − 5	87
4 − 5	53

$P = 44, 67, 56, 67, 45, 57.$

Задача 6.5.

Ребро	$L_{k,j}$
1 − 2	45
1 − 3	84
1 − 4	65
1 − 5	41
2 − 3	52
2 − 4	62
2 − 5	69
3 − 4	44
3 − 5	82
4 − 5	44

$P = 73, 36, 68, 38, 76, 45.$

Задача 6.6.

Ребро	$L_{k,j}$
1 − 2	43
1 − 3	85
1 − 4	75
1 − 5	55
2 − 3	55
2 − 4	69
2 − 5	78
3 − 4	44
3 − 5	85
4 − 5	48

$P = 37, 40, 51, 74, 72, 62.$

Задача 6.19.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	53
1 – 3	84
1 – 4	79
1 – 5	44
2 – 3	49
2 – 4	73
2 – 5	77
3 – 4	43
3 – 5	80
4 – 5	53

$P = 40, 64, 22, 71, 48, 91.$

Задача 6.20.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	50
1 – 3	82
1 – 4	77
1 – 5	53
2 – 3	46
2 – 4	69
2 – 5	81
3 – 4	44
3 – 5	84
4 – 5	52

$P = 55, 67, 49, 56, 45, 64.$

Задача 6.21.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	36
1 – 3	77
1 – 4	69
1 – 5	55
2 – 3	51
2 – 4	61
2 – 5	75
3 – 4	39
3 – 5	84
4 – 5	51

$P = 68, 77, 41, 43, 35, 72.$

Задача 6.22.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	41
1 – 3	85
1 – 4	84
1 – 5	63
2 – 3	51
2 – 4	73
2 – 5	79
3 – 4	48
3 – 5	85
4 – 5	49

$P = 22, 24, 45, 89, 88, 68.$

Задача 6.23.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	48
1 – 3	85
1 – 4	79
1 – 5	54
2 – 3	48
2 – 4	71
2 – 5	77
3 – 4	48
3 – 5	84
4 – 5	48

$P = 64, 43, 67, 47, 69, 46.$

Задача 6.24.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	45
1 – 3	87
1 – 4	87
1 – 5	59
2 – 3	50
2 – 4	73
2 – 5	71
3 – 4	50
3 – 5	79
4 – 5	45

$P = 68, 57, 50, 43, 55, 63.$

Задача 6.25.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	40
1 – 3	87
1 – 4	75
1 – 5	53
2 – 3	55
2 – 4	67
2 – 5	67
3 – 4	50
3 – 5	78
4 – 5	37

$P = 24, 69, 38, 87, 43, 75.$

Задача 6.26.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	42
1 – 3	81
1 – 4	80
1 – 5	51
2 – 3	48
2 – 4	75
2 – 5	75
3 – 4	54
3 – 5	85
4 – 5	51

$P = 68, 23, 42, 43, 89, 71.$

Задача 6.27.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	38
1 – 3	83
1 – 4	70
1 – 5	50
2 – 3	55
2 – 4	67
2 – 5	72
3 – 4	49
3 – 5	85
4 – 5	44

$P = 53, 61, 36, 58, 51, 77.$

Задача 6.28.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	36
1 – 3	76
1 – 4	64
1 – 5	43
2 – 3	50
2 – 4	67
2 – 5	68
3 – 4	55
3 – 5	84
4 – 5	42

$P = 74, 50, 72, 37, 62, 41.$

Задача 6.29.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	48
1 – 3	76
1 – 4	65
1 – 5	53
2 – 3	46
2 – 4	69
2 – 5	86
3 – 4	47
3 – 5	86
4 – 5	46

$P = 21, 37, 74, 90, 75, 39.$

Задача 6.30.

Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	46
1 – 3	80
1 – 4	74
1 – 5	46
2 – 3	46
2 – 4	67
2 – 5	73
3 – 4	44
3 – 5	82
4 – 5	51

$P = 30, 56, 77, 81, 56, 36.$

Задача. Кратчайший гамильтонов цикл разыскивается с помощью муравьиного алгоритма. Первый муравей выходит из вершины 1 по ребрам графа с равномерным слоем феромона $\tau_{k,j} = 1$ (рис. 1). После прохождения цикла по следу муравья добавляется феромон интенсивностью $100/L_1$, где L_1 — длина его пути. Второй муравей также выходит из вершины 1. Дана последовательность $P = 24, 46, 74, 66, 39, 39$ случайных чисел, выпавших в при выборе очередной вершины и расстояния $L_{k,j}$ между вершинами k, j:

Ребро	$L_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$
$1-2$	39	$2-4$	69
$1-3$	74	$2-5$	75
$1-4$	73	$3-4$	50
$1-5$	51	$3-5$	85
$2-3$	44	$4-5$	49

Секторы вероятности перехода сортировать по возрастанию номеров вершин. Использовать формулу (3.1) вероятности перехода из вершины k в j при $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\eta_{k,j} = 1/L_{k,j}$. Найти длину пути L_2 второго муравья.

Решение

1. В начале движения из вершины 1 муравей имеет четыре возможные пути: в вершину 2, 3, 4 или 5. По формуле (3.1) вычисляем вероятности перехода в эти вершины

$$P_{1,2} = 100\,\frac{1/39}{1/39 + 1/74 + 1/73 + 1/51} = \frac{2.56}{0.0724} = 35.39,$$

$$P_{1,3} = 100\,\frac{1/74}{0.0724} = \frac{1.35}{0.0724} = 18.65,$$

$$P_{1,4} = 100\,\frac{1/73}{0.0724} = \frac{1.36}{0.0724} = 18.90,$$

$$P_{1,5} = 100\,\frac{1/51}{0.0724} = \frac{4.44}{0.0724} = 27.06$$

Получаем границы четырех секторов $[p'_j, p''_j]$, $j = 2, 3, 4, 5$ вероятностей:

$$p'_2 = 0,\ p''_2 = P_{1,2} = 35.39,$$
$$p'_3 = p''_2 + P_{1,3} = 54.04,$$
$$p'_4 = p''_3 + P_{1,4} = 72.94,$$
$$p'_5 = p''_4 + P_{1,5} = 100.$$

Таким образом, отрезок $[0, 100]$ разбился на четыре участка: $[0, 35.39]$, $[35.39, 54.04]$, $[54.04, 72.94]$, $[72.94, 100]$. Генератор случайных чисел выдает значение 24, что соответствует первому участку

$$0 < 24 < 35.39,$$

связанному с вершиной 2. Муравей должен направится к вершине 2.

2. Из вершины 2 имеются только три возможные пути: 2-3, 2-4, 2-5. Вычисляя аналогичным образом вероятности перехода в эти вершины $P_{2,3} = 44.96$, $P_{2,4} = 28.67$, $P_{2,5} = 26.37$, разбиваем отрезок $[0, 100]$ на три сектора [0,44.96], [44.96,73.63], [73.63,100]. Случайное число $P_2 = 46$, полученное генератором случайных чисел попадает на второй участок. Этот участок указывает на вершину 4. Далее муравей будет выбирать маршрут из этой вершины.

3. При выходе из вершины 4 остается только две возможности — либо направится в вершину 3 либо в 5. Оценим возможности перехода: $P_{4,2} = 49.5$, $P_{4,5} = 50.5$.

Случайное число $P_3 = 74$, полученное генератором случайных чисел указывает на вершину 5. Из вершины 5 есть только один путь в начальную вершину 1, поэтому генератор случайных чисел здесь не требуется. Муравей замыкает путь в вершине 1, проходя через вершину 3 (рис. 6).

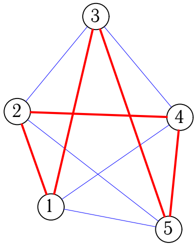


Рис. 6

Общая длина маршрута 1-2-4-5-3-1 равна $L_{1,2} + L_{2,4} + L_{4,5} + L_{5,3} + + L_{3,1} = 39 + 69 + 49 + 85 + 74 = 316$.

4. Первый муравей, пройдя весь путь, помечает его феромоном. Чем длиннее путь, тем след феромона меньше. В нашем случае по маршруту 1-2-4-5-3-1 надо добавить $\Delta\tau = 100/L_1 = 100/316 = 0.32$. Информационная таблица, отображающая длины ребер и толщину следа, для второго муравья примет вид

Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
$1-2$	39	1.32	$2-4$	69	1.32
$1-3$	74	1.32	$2-5$	75	1
$1-4$	73	1	$3-4$	50	1
$1-5$	51	1	$3-5$	85	1.32
$2-3$	44	1	$4-5$	49	1.32

5. В начале движения из вершины 1 второй муравей, как и первый, опять имеет четыре возможные пути: в вершину 2, 3, 4 или 5. Вычислим вероятности перехода в эти вершины с учетом нового значения

феромона

$$P_{1,2} = 100\,\frac{1.32/39}{1.32/39 + 1.32/74 + 1/73 + 1/51} = \frac{3.37}{0.0848} = 39.78,$$

$$P_{1,3} = 100\,\frac{1.32/74}{0.0848} = 20.97,$$

$$P_{1,4} = 100\,\frac{1/73}{0.0848} = 16.14,$$

$$P_{1,5} = 100\,\frac{1/51}{0.0848} = 23.11$$

Полученные значения разбивают отрезок $[0, 100]$ на четыре участка: $[0, 39.78]$, $[39.78, 60.75]$, $[60.75, 76.9]$, $[76.9, 100]$. Используем очередное число $P_4 = 66$, выработанное генератором случайных чисел. Очевидно, $60.75 < 66 < 76.90$. Это неравенство указывает на третий участок, соответствующий вершине 4. Далее муравей должен направится к этой вершине. Продолжая описанный алгоритм, получаем маршрут второго муравья (рис. 5): 1-4-3-2-5-1. Его длина $L_{1,4} + L_{4,3} + L_{3,2} + L_{2,5} + L_{5,1} = 73 + 50 + 44 + 75 + 51 = 293$.

3.3. Алгоритм отжига

Найти длину гамильтонова цикла S_4 в полном графе K_6 после четырех циклов решения задачи методом отжига. Даны расстояния $L_{i,j}$ между вершинами. Даны также: начальная последовательность вершин L_0, последовательность замен вершин $\mathbf{Z}$ и выпавшие при этом вероятности перехода $\mathbf{P}_k$, $k = 1, ..., 4$. Переход на худшее ($\Delta S_k = S_k - S_{k-1} > 0$) решение допустим, если

$$P_* = 100e^{-\Delta S_k/T_k} > P_k, \qquad (3.2)$$

где снижение температуры происходит по закону $T_{k+1} = 0.5T_k$ от $T_1 = 100$.

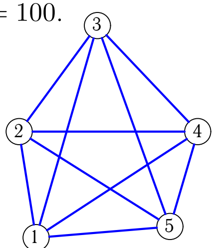


Рис. 7