Пример. По заданной матрице смежности:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

определить число циклов длины 3 (c_3) и длины 4 (c_4). Записать матрицу инцидентности и матрицу фундаментальных циклов.

Решение. Матрица смежности данного графа симметричная, поэтому ей соответствует неориентированный граф. Сумма элементов матрицы равна 12, следовательно, по лемме о рукопожатиях (см. с. 7) в графе 6 ребер. Построим этот граф (рис. 1.17). Очевидно, в нем два цикла (3–4–5 и 1–3–5) длиной 3 и один цикл (1–3–4–5) длиной 4. В данной задаче решение получено прямым подсчетом по изображению графа. Для более сложных случаев существует алгоритм решения задачи по матрице смежности.

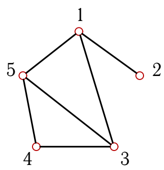

Рис. 1.17

Известно, что след (trace) матрицы смежности, возведенной в k-ю степень, равен числу циклических маршрутов длины k [1]. Это число включает в себя и искомое число циклов. Цикл отличается от циклического маршрута тем, что в нем не повторяются ребра. Кроме того, предполагается, что искомые циклы не помечены, а в след матрицы входят именно помеченные маршруты. Непомеченных циклов длиной 3 в 6 раз меньше, чем помеченных, так как каждый помеченный цикл может отличаться началом, а их в данном случае три, и двумя направлениями обхода (по и против часовой стрелки). Возведем заданную матрицу смежности в третью степень:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \tag{1.14}$$

и получим

$$c_3 = \frac{1}{6}\mathrm{trace} A^3 = 2. \tag{1.15}$$

Возведение матрицы в степень лучше выполнить по программе системы **Maple**: `c3:=A^3;` при этом подключения пакета линейной алгебры

[1] См. теорему 5 на с. 11.

`LinearAlgebra` не требуется. Поскольку циклических маршрутов длиной 3, отличных от циклов длиной 3, не существует, найденное число и есть ответ в поставленной задаче. След матрицы в пакете `LinearAlgebra` системы **Maple** вычисляется оператором `Trace(c3)`.

С циклами длиной 4 немного сложнее. В след четвертой степени матрицы смежности графа:

$$A^4 = \begin{bmatrix} 15 & 2 & 10 & 12 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 6 \\ 10 & 6 & 16 & 9 & 15 \\ 12 & 2 & 9 & 10 & 9 \\ 10 & 6 & 15 & 9 & 16 \end{bmatrix}, \qquad (1.16)$$

входят не только циклы, но и циклические маршруты с двойным и четырехкратным прохождением ребер. Обозначим количества таких маршрутов через x_2 и x_4 соответственно. Очевидно, число маршрутов с четырехкратным прохождением одного ребра для вершины v_i равно степени этой вершины: $x_4 = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg(v_i)$. Число маршрутов с двукратным прохождением ребра складывается из числа x_{2v} маршрутов с висячей вершиной v_i и числа x_{2c} маршрутов с вершиной v_i в центре. Легко заметить, что $x_{2c} = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg(v_i)(\deg(v_i) - 1)$. Число x_{2v} зависит от степеней вершин, соседних с v_i:

$$x_{2v} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\{k,i\} \subseteq G} (\deg(v_k) - 1),$$

где $\{k, i\}$ — ребро, инцидентное вершинам i и k.

Для графа на рис. 1.17 получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{trace} A^4 = 60, \\ &x_{2v} = 4 + 2 + 5 + 4 + 5 = 20, \\ &x_{2c} = 6 + 0 + 6 + 2 + 6 = 20, \\ &x_4 = 3 + 1 + 3 + 2 + 3 = 12. \end{aligned}$$

С учетом того, что непомеченных циклов длиной 4 в 8 раз меньше, получим

$$c_4 = (\mathrm{trace}\, A^4 - x_{2c} - x_{2v} - x_4)/8 = (60 - 20 - 20 - 12)/8 = 1.$$

После преобразований формула примет вид

$$c_4 = \frac{1}{8} \left(\mathrm{trace}\, A^4 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\{k,i\} \subseteq G} (\deg v_k - 1) - \sum_{i=1}^{n} \deg^2 v_i \right) = 1. \qquad (1.17)$$