Г л а в а 12

Динамика системы

Силы, действующие на механическую систему, разделяют на внутренние $\vec{F}_k^i$ и внешние $\vec{F}_k^e$. Главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю: $\sum\limits_k \vec{F}_k^i = 0$, $\sum\limits_k \vec{m}_0(\vec{F}_k^i) = 0$. Масса системы и радиус-вектор центра масс вычисляются по формулам

$$m = \sum_k m_k,\ \vec{r}_c = (1/m)\sum_k \vec{r}_k m_k. \qquad (12.1)$$

Д5. Теорема о центре масс системы

Теорема. *Центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе системы, под действием внешних сил, приложенных к системе* [6,9,36].

Математическое выражение теоремы имеет векторный вид

$$m\vec{a}_c = \sum_k \vec{F}_k^e, \qquad (12.2)$$

где $\vec{a}_c$ — ускорение центра масс. Отметим, что в формулировке теоремы отсутствуют внутренние силы системы, это облегчает решение задач. Если же внешние силы параллельны, то, выбирая ось, перпендикулярную направлению сил, получаем случай сохранения движения центра масс

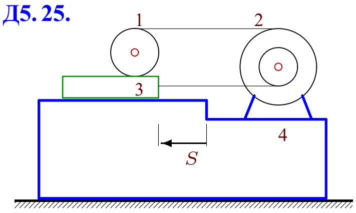
$$ma_{cx} = 0,$$

так как $\sum\limits_k F_{kx}^e = 0$. Этот случай называют теоремой о сохранении центра масс.

Условия задач

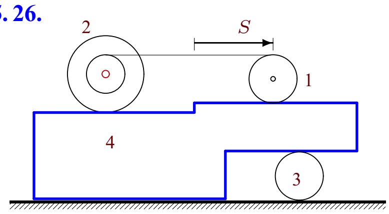
Механизм, состоящий из трех тел, установлен на призме, скользящей по гладкой плоскости. Нити, соединяющие тела, параллельны соответствующим плоскостям. Под действием внутренних сил механизм из состояния покоя пришел в движение. Центр цилиндра (блока) или бруска сместился относительно призмы на расстояние S. Найти смещение призмы. Массы даны в килограммах, радиусы и смещение — в сантиметрах.

Д5. 25.



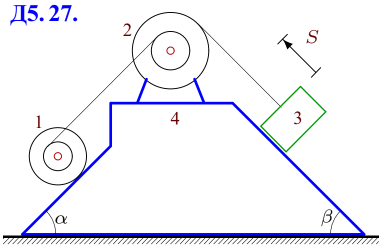
$R_2 = 5$, $r_2 = 3$, $m_1 = 6$, $m_2 = 10$, $m_3 = m_4 = 15$, $S = 138$.

Д5. 26.



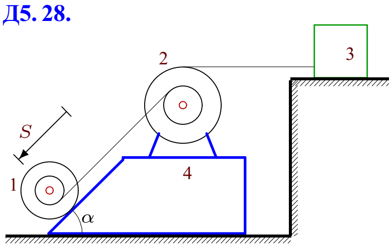
$R_2 = 4$, $r_2 = 2$, $m_1 = 10$, $m_2 = 6$, $m_3 = 26$, $m_4 = 12$, $S = 82$.

Д5. 27.



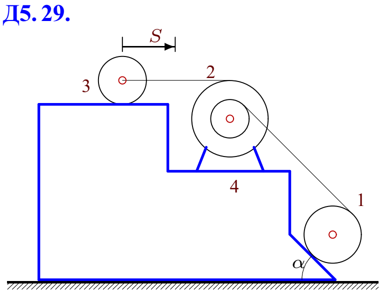
$R_1 = 5$, $r_1 = 3$, $R_2 = 4$, $r_2 = 3$, $m_1 = 64$, $m_2 = 12$, $m_3 = 10$, $m_4 = 13$, $S = 297$, $\alpha = \pi/3$, $\cos\beta = 0{,}6$.

Д5. 28.



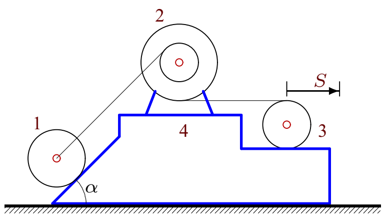
$R_1 = 4$, $r_1 = 3$, $R_2 = 5$, $r_2 = 3$, $m_1 = 5$, $m_2 = 10$, $m_3 = 24$, $m_4 = 15$, $S = 162$, $\cos\alpha = 0{,}6$.

Д5. 29.



$R_2 = 3$, $r_2 = 2$, $m_1 = 15$, $m_2 = 12$, $m_3 = 13$, $m_4 = 10$, S=100, $\cos\alpha$=0,8.

Д5. 30.



$R_2 = 4$, $r_2 = 3$, $m_1 = 4$, $m_2 = 13$, $m_3 = 15$, $m_4 = 13$, $S = 90$, $\alpha = \pi/3$.

Пример решения

Задача. Механизм, состоящий из пяти тел, установлен на призме 4, скользящей по гладкой плоскости (рис. 175). Нить, соединяющая внешний радиус блока 2 с осью цилиндра 3, катящегося по наклонной боковой поверхности призмы, параллельна этой поверхности; $\alpha = 60°$. Под действием внутренних сил из состояния покоя механизм пришел в движение. Брусок 1, расположенный на двух одинаковых катках 5 и соединенный горизонтальной нитью с меньшим радиусом блока, сместился относительно призмы на расстояние $S = 7$ см. Даны радиусы $R_2 = 4$ см, $r_2 = 2$ см и массы $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг, $m_4 = 4$ кг, $m_5 = 2$ кг. Найти смещение призмы.

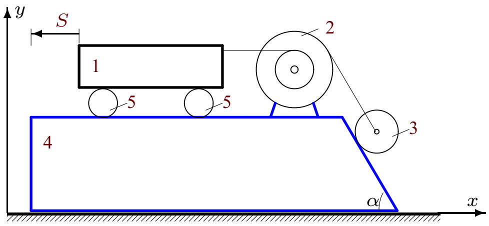


Рис. 175

Решение

Из теоремы о движении центра масс системы (12.2) следует $ma_{cx} = F_x^e$, где a_{cx} — ускорение центра масс системы по оси x, $m = \sum_{i=1}^{5} m_i$ — масса всей системы. По условию задачи плоскость, по которой скользит призма, гладкая, трения и других внешних горизонтальных сил нет [1]. Отсюда $F_x^e = 0$ и $ma_{cx} = 0$. Интегрируя это уравнение при нулевой начальной скорости, получаем $mv_{cx} = 0$. Еще раз интегрируем: $mx_{cx} =$const. Это означает, что в данном случае центр масс имеет постоянное положение. Следовательно, с учетом формулы (12.1) для координаты центра масс, получаем $mx_{cx} = \sum_{i=1}^{5} m_i x_i =$const, или

$$\sum_{i=1}^{5} m_i \Delta x_i = 0, \tag{12.3}$$

где Δx_i, $i = 1, ..., 5$ — смещения центров масс тел системы. Смещения всех тел представим в виде суммы относительных смещений и переносного смещения призмы, которое обозначим за δ и направим вправо. Рассмотрим относительные смещения отдельных тел. Смещение бруска 1 по условию задачи равно S, блок 2 относительно призмы не смещается. Смещение цилиндров 5 вдвое меньше смещения бруска (точки касания цилиндров являются их МЦС в подвижной системе координат, связанной

[1] Для того, чтобы лучше понять суть решаемой задачи, можно представить, что призма находится на гладкой отполированной, хорошо смазанной поверхности, а еще лучше, что она закреплена на плавающей платформе. Иначе трудно понять, как это за счет смещения тела на призме, сама призма начнет смещаться. Может помочь также собственный опыт выхода с лодки на берег. Лодка в этот момент начинает предательски уходить из-под ног, не вовремя демонстрируя теорему о сохранении центра масс системы.

с призмой), рис. 176. Таким образом, абсолютное смещение цилиндров 5 равно $\delta - S/2$.

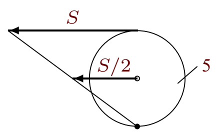


Рис. 176

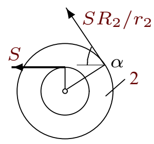


Рис. 177

Для определения относительного смещения цилиндра 3 найдем угол поворота блока: $\varphi = S/r_2$. Так как нить от цилиндра 3 навита на внешний радиус, то искомое смещение равно $R_2\varphi = R_2 S/r_2$, а в проекции на ось x получим отрицательное смещение $-R_2(S/r_2)\cos\alpha$. В уравнение теоремы о движении центра масс войдет абсолютное смещение $\delta - R_2(S/r_2)\cos\alpha$. Уравнение (12.3) примет вид

$$\begin{aligned} m_1\,(\delta - S) + m_2\,\delta + m_3\,(\delta - (R_2/r_2)\,S\cos\alpha) +& \\ + m_4\,\delta + 2\,m_5\,(\delta - S/2) = 0.& \end{aligned} \tag{12.4}$$

Отсюда выражаем смещение призмы δ:

$$\delta = S\,\frac{m_1 + m_3(R_2/r_2)\cos\alpha + m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + 2m_5} = \frac{7\cdot 6}{14} = 3 \text{ см}.$$

Д6. Теорема о моменте количества движения системы

Теорема об изменении момента количества движения системы основана на аналогичной теореме для точки и имеет схожую форму. Момент количества движения системы есть векторная величина, определяемая как сумма моментов количеств движения n точек системы относительно некоторого полюса O

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{q}_k),$$

где $\vec{m}_O(\vec{q}_k) = \vec{r} \times \vec{q}_k$, $\vec{q}_k = m_k \vec{v}_k$ (см. с. 293). Дифференциальная форма теоремы выражается равенством

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k^e), \tag{12.5}$$

где $\vec{F}_k^e$ — внешние силы, действующие на систему.