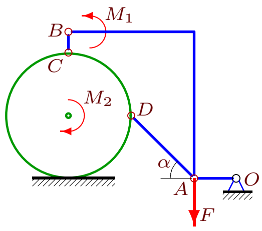
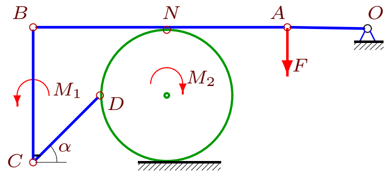
Д10.29.



$M_1 = 49$, $M_2 = 61$, $R = 6$, $OA = 4$, $AD = 6\sqrt{2}$, $BC = 2$.

Д10.30.



$M_1 = 306$, $M_2 = 596$, $R = 5$, $OA = 6$, $CD = 5\sqrt{2}$, $AN = 9$, $AB = 19$.

Пример решения

Задача. Механизм с идеальными стационарными связями находится в равновесии под действием силы F и моментов $M_1 = 10$ Нм, $M_2 = 11$ Нм. Длины звеньев $OA = 4\sqrt{2}$ м, $AB = 6$ м, $AD = 5$ м, угол $\alpha = 45°$. Стержни AD горизонтальный, AB — вертикальный. Уголок CB изогнут под прямым углом, длинная сторона его горизонтальна. Диск радиуса $R = 5$ м касается горизонтальной поверхности без проскальзывания (рис. 174). Вес стержней и диска не учитывать. Найти величину F.

Решение

Введем систему координат и пронумеруем тела системы (рис. 175). Принцип возможных перемещений (12.2) запишем в форме возможных

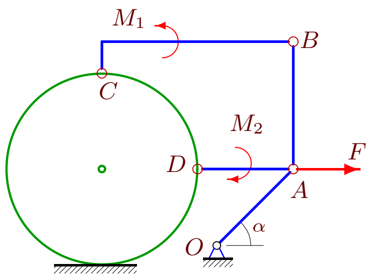


Рис. 174

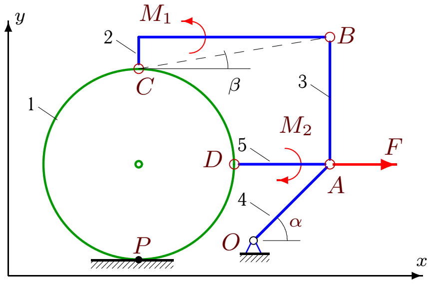


Рис. 175

мощностей, т. е. приравняем нулю сумму элементарных мощностей на возможных скоростях. Так как связи идеальные, то в уравнение войдут только внешние нагрузки — два известных момента и неизвестная сила

$$M_1\omega_{2z} - M_2\,\omega_{5z} + M_{Oz}(F)\,\omega_{4z} = 0, \tag{12.3}$$

где момент силы F относительно шарнира O имеет вид

$$M_{Oz}(F) = -F \cdot OA \sin\alpha = -4\,F.$$

Каждое слагаемое в этой сумме — скалярное произведение вектора момента на вектор угловой скорости, именно поэтому момент M_2 взят с минусом. Система имеет одну степень свободы, поэтому все угловые скорости, входящие в принцип возможных перемещений, можно выразить через какую-нибудь одну. Для связи угловых скоростей воспользуемся уравнениями трех угловых скоростей (6.5), с. 156

$$\begin{aligned} &\omega_{1z}(x_P-x_C)+\omega_{2z}(x_C-x_B)+\omega_{3z}(x_B-x_A)+\omega_{4z}(x_A-x_O)=0,\\ &\omega_{1z}(y_P-y_C)+\omega_{2z}(y_C-y_B)+\omega_{3z}(y_B-y_A)+\omega_{4z}(y_A-y_O)=0. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Эти уравнения соответствуют кинематическому графу

$$P \xrightarrow[\pi/2]{1} C \xrightarrow[\beta]{2} B \xrightarrow[-\pi/2]{3} A \xrightarrow[\pi+\alpha]{4} O$$

в проекциях, где P — точка касания диска и горизонтальной поверхности (МЦС диска). Если задать, например, угловую скорость ω_{1z}, то из уравнений (12.4) не удастся выразить ω_{4z} и ω_{5z}, входящие в (12.3). Необходимы еще уравнения, которые получим из условного четырехзвенника $PDAO$. Имеем следующие уравнения

$$\begin{aligned} &\omega_{1z}(x_P-x_D)+\omega_{5z}(x_D-x_A)+\omega_{4z}(x_A-x_O)=0,\\ &\omega_{1z}(y_P-y_D)+\omega_{5z}(y_D-y_A)+\omega_{4z}(y_A-y_O)=0, \end{aligned} \tag{12.5}$$

соответствующие графу $P \xrightarrow[\pi/4]{1} D \xrightarrow[0]{5} A \xrightarrow[\pi+\alpha]{4} O$.

Подставив значения координат, получим из (12.4) и (12.5) следующую систему для угловых скоростей

$$\begin{aligned} &10\omega_{2z} - 4\omega_{4z} = 0,\\ &10\omega_{1z} + \omega_{2z} - 6\omega_{3z} - 4\omega_{4z} = 0,\\ &-5\omega_{1z} - 5\omega_{5z} + 4\omega_{4z} = 0,\\ &-5\omega_{1z} + 4\omega_{4z} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда найдем соотношения

$$\begin{aligned} &\omega_{2z} = \omega_{1z}/2,\\ &\omega_{3z} = (11/12)\,\omega_{1z},\\ &\omega_{4z} = (5/4)\,\omega_{1z},\\ &\omega_{5z} = 0. \end{aligned}$$

При этом из (12.3) следует

$$M_1\omega_{1z}/2 - 5\omega_{1z}F = 0,$$

откуда для $\omega_{1z} \neq 0$ и $M_1 = 10$ Нм находим искомую силу $F = 1$ Н. В результате решения выяснилось также, что момент M_2 никак не влияет на силу F в условии равновесия. Это объясняется тем, что он приложен к стержню 5, совершающему мгновенно поступательное возможное движение.

Д11. Уравнение Лагранжа 2-го рода. Определение ускорения по заданной кинетической энергии и обобщенной силе

Условия задач

Дано выражение кинетической энергии и обобщенной силы механической системы с одной степенью свободы. В некоторый момент известны значения обобщенной координаты φ и скорости $\dot{\varphi}$. Найти ускорение $\ddot{\varphi}$.

Д11.1.

$T = \dfrac{\dot{\varphi}^2}{2}(14\sin^2\varphi + 3)$,

$Q = 122$, $\varphi = \pi/4$, $\dot{\varphi} = 4$.

Д11.2.

$T = \dfrac{\dot{\varphi}^2}{2}(4\cos^2\varphi + 3)$,

$Q = -32$, $\varphi = \pi/4$, $\dot{\varphi} = 1$.

Д11.3.

$T = \dfrac{\dot{\varphi}^2}{2}(3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi + 3)$,

$Q = 78$, $\varphi = \pi/4$, $\dot{\varphi} = 4$.

Д11.4.

$T = \dfrac{\dot{\varphi}^2}{2}(4\,\mathrm{tg}\,\varphi + 3)$,

$Q = 46$, $\varphi = \pi/4$, $\dot{\varphi} = 1$.

Д11.5.

$T = \dfrac{\dot{\varphi}^2}{2}(5\,\mathrm{ctg}\,\varphi + 3)$,

$Q = -277$, $\varphi = \pi/4$, $\dot{\varphi} = 7$.

Д11.6.

$T = \dfrac{\dot{\varphi}^2}{2}(7\cos(2\varphi) + 5)$,

$Q = -217$, $\varphi = \pi/4$, $\dot{\varphi} = 6$.

Д11.7.

$T = \dfrac{\dot{\varphi}^2}{2}(2\sin(2\varphi) + 10\cos^2(3\varphi))$,

$Q = 170$, $\varphi = \pi/4$, $\dot{\varphi} = 3$.

Д11.8.

$T = \dfrac{\dot{\varphi}^2}{2}(3\sin(2\varphi) + 10\sin^2\varphi + 1)$,

$Q = 243$, $\varphi = \pi/4$, $\dot{\varphi} = 6$.

Д11.9.

$T = \dfrac{\dot{\varphi}^2}{2}(8\sin^2(3\varphi) + 5)$,

$Q = -423$, $\varphi = \pi/4$, $\dot{\varphi} = 6$.

Д11.10.

$T = \dfrac{\dot{\varphi}^2}{2}(14\sin^2\varphi + 5\cos\varphi)$,

$Q = -190$, $\varphi = \pi$, $\dot{\varphi} = 5$.