В начальном состоянии система находилась в покое, и $T_0 = 0$. Получаем отсюда уравнение для определения скорости

$$61v^2 = 122 \cdot 32.$$

Находим скорость груза $v = \sqrt{64} = 8$ м/с.

Задача 120*. Механическая система состоит из двух блоков и двух грузов (рис. 254). Под действием сил тяжести система из состояния покоя приходит в движение. Качение блока D происходит без проскальзывания с коэффициентом трения качения δ=3 мм. Даны радиусы r_C=16 см, R_C=31 см, r_D=20 см, R_D=28 см, радиусы инерции ρ_C=30 см, ρ_D=26 см, массы m_A=28 кг, m_B=6 кг, m_C=10 кг, m_D=4 кг. Какую скорость приобретет груз A, переместившись на $S = 1$ м?

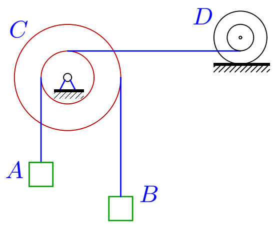

Рис. 254

3.3. Аналитическая механика

Принцип возможных перемещений утверждает, что равновесие механической системы с идеальными связями возможно тогда и только тогда, когда сумма элементарных работ всех активных сил на любых возможных перемещениях равна нулю

$$\sum_k \delta A(\vec{F}_k) = 0. \qquad (3.36)$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода [1] для систем с s степенями свободы имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (3.37)$$

здесь T — кинетическая энергия системы, q_i — обобщенные координаты, Q_i — обобщенные силы, $i = 1, ..., s$.

Задача 121. Механизм состоит из трех стержней, уголка, изогнутого под прямым углом, и цилиндра. Предполагается, что связи в механизме идеальные и стационарные. Механизм находится в равновесии под действием силы F и моментов $M_1 = 22$ Нм, $M_2 = 59$ Нм. Длины звеньев $OA = 6\sqrt{2}$ м, $AB = 7\sqrt{2}$ м, $AD = 12$ м, угол $\alpha = 45°$. Стержень AD — горизонтальный. Уголок CB изогнут под прямым углом, длинная сторона его горизонтальна. Диск радиуса $R = 6$ м

[1] Уравнения Лагранжа 1-го рода см. с. 151.

касается горизонтальной поверхности без проскальзывания (рис. 255). Вес стержней и диска не учитывать. Найти величину F.

Решение

Введем систему координат и пронумеруем тела системы (рис. 256). Принцип возможных перемещений (3.36) запишем в форме возможных

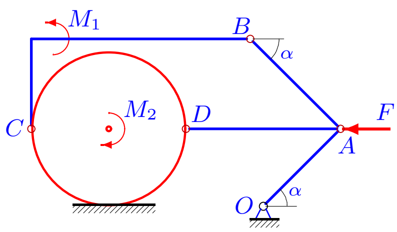

Рис. 255

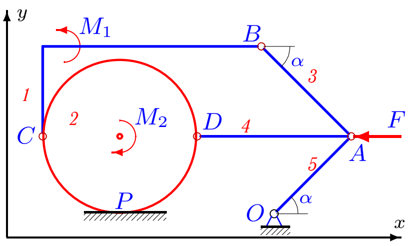

Рис. 256

мощностей. Сумму элементарных мощностей всех нагрузок на возможных скоростях приравняем нулю. Так как связи идеальные, то в уравнение реакции опор не войдут, а войдут только внешние нагрузки — два известных момента и неизвестная сила

$$M_{1z}\omega_{1z} + M_{2z}\,\omega_{2z} + M_{Oz}(F)\,\omega_{5z} = 0, \tag{3.38}$$

где момент силы F относительно шарнира O имеет вид

$$M_{Oz}(F) = F \cdot OA \sin\alpha = 6\,F.$$

В сумме (3.38) каждое слагаемое — скалярное произведение вектора момента на вектор угловой скорости. Проекцию момента $M_{2z} = -59$ Нм берем с минусом, так как момент вращает цилиндр по часовой стрелке. Все угловые скорости системы, имеющей одну степень свободы, можно выразить через какую-нибудь одну угловую скорость. Выразим все угловые скорости, например, через ω_{1z}. Для связи угловых скоростей воспользуемся уравнениями трех угловых скоростей (2.19), с. 93. Для определения четырех величин ω_{iz}, $i = 2-5$, потребуются четыре уравнения. Сразу вносим в эти уравнения разность координат, вычислить которые не составляет труда. Запишем уравнения, соответствующие кинематическому графу

$$P \to D \to A \to O,$$

где P — МЦС цилиндра. Получим два уравнения

$$6\,\omega_{2z} + 12\,\omega_{4z} - 6\,\omega_{5z} = 0,$$

$$6\,\omega_{2z} - 6\,\omega_{5z} = 0.$$

Для графа

$$P \to C \to B \to A \to O$$

запишем два других уравнения

$$-6\,\omega_{2z} + 17\,\omega_{1z} + 7\,\omega_{3z} - 6\,\omega_{5z} = 0,$$

$$6\,\omega_{2z} + 7\,\omega_{1z} - 7\,\omega_{3z} - 6\,\omega_{5z} = 0.$$

Отсюда найдем соотношения

$$\begin{aligned} &\omega_{2z} = 2\,\omega_{1z}, \ \ \omega_{3z} = \omega_{1z}, \\ &\omega_{4z} = 0, \qquad\ \ \omega_{5z} = 2\,\omega_{1z}. \end{aligned}$$

При этом из (3.38) следует

$$-96\,\omega_{1z} + 12\,\omega_{1z}\,F = 0,$$

откуда для $\omega_{1z} \neq 0$ находим искомую силу $F = 8$ Н.

Задача 122. Дано выражение кинетической энергии (кгм^2/с^2) и обобщенной силы (Нм) механической системы с одной степенью свободы

$$T = \frac{\dot\varphi^2}{2}\left(10\sin^2(3\varphi) + 7\right), \ \ Q = -3.$$

В некоторый момент известны значения обобщенной координаты $\varphi = \pi/4$ и скорости $\dot\varphi = 3$ с$^{-1}$. Найти ускорение $\ddot\varphi$.

Решение

Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-го рода (3.37), с. 167. Обобщенная координата в этой задаче является углом, поэтому обобщенная сила имеет размерность момента (Нм). Вычислим производные, входящие в это уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} &= \dot\varphi\,(10\sin^2(3\varphi) + 7), \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} &= \ddot\varphi\,(10\sin^2(3\varphi) + 7) + 30\,\dot\varphi^2\sin(6\varphi), \\ \frac{\partial T}{\partial\varphi} &= 15\,\dot\varphi^2\sin(6\varphi). \end{aligned}$$

Уравнение Лагранжа примет вид [1]

$$\ddot\varphi\,(10\sin^2(3\varphi) + 7) + 15\,\dot\varphi^2\sin(6\varphi) = Q.$$

[1] В общем случае при $T = (1/2)\dot\varphi^2 F(\varphi)$ имеем уравнение Лагранжа $\ddot\varphi F + (1/2)\dot\varphi^2 F'_\varphi = Q$.