

Пример решения

Задача. Груз массой $m = 2$ кг расположен на гладкой горизонтальной плоскости и скреплен с пружинами, жесткостью $c_1 = 4$ Н/м, $c_2 = 6$ Н/м, $c_3 = 3,6$ Н/м, $c_4 = 12$ Н/м (рис. 198). Определить частоту собственных колебаний груза. Массой пружин пренебречь.

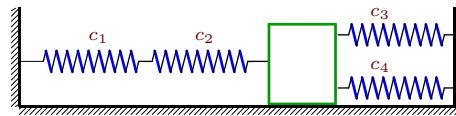


Рис. 198

Решение

Груз, совершающий прямолинейное поступательное движение, примем за материальную точку. Введем систему координат с началом в положении равновесия груза (рис. 199) и рассмотрим силы, действующие на него при движении.

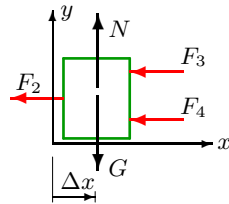


Рис. 199

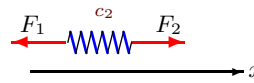


Рис. 200

Смещение груза обозначим Δx . Со стороны пружин возникают силы, которые обозначим по номерам соответствующих пружин: F_2 , F_3 , F_4 . Величины сил F_4 , F_3 пропорциональны удлинениям пружин

$$F_3 = c_4 \Delta x, \quad F_3 = c_3 \Delta x. \quad (15.1)$$

Запишем аналогичные соотношения для последовательно соединенных пружин 1 и 2

$$F_1 = c_1 \Delta x_1, \quad F_2 = c_2 \Delta x_2, \quad \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2. \quad (15.2)$$

Если масса m_2 пружины 2 равна нулю, то уравнение ее движения $m_2 \ddot{x} = F_2 - F_1$ под действием сил F_1 и F_2 вырождается в равенство сил $F_1 = F_2$ (рис. 200). С учетом этого из (15.2) следует

$$F_2 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \Delta x.$$

Подставим это выражение и выражения (15.1) в уравнение движения груза в проекции на ось x

$$m\ddot{x} = -F_2 - F_3 - F_4.$$

Получим

$$m\ddot{x} = -\left(\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} + c_3 + c_4\right) \Delta x.$$

Учитывая, что начало координат совпадает с положением равновесия груза, имеем $\Delta x = x$. Дифференциальное уравнение свободных колебаний имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad (15.3)$$

где

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} + c_3 + c_4 = 18 \text{ Н/м.}$$

Частота ¹ собственных колебаний равна

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Интегрированием (15.3) можно получить уравнение гармонических колебаний

$$x = A \sin(kt + \beta),$$

где A — амплитуда колебаний, β — начальная фаза определяются по начальным условиям. Период свободных колебаний определяется по формуле $T = 2\pi/k$. Другая форма уравнения колебаний имеет вид

$$x = B_1 \sin(kt) + B_2 \cos(kt),$$

где B_1 и B_2 — константы.

Д19. Колебания системы. Одна степень свободы

Условия задач

Механическая система, состоящая из цилиндров, стержней и одной или нескольких пружин, совершает малые колебания. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Массы даны в килограммах, жесткости — в Н/м. Массой пружин пренебречь. Найти собственную частоту системы.

¹Или циклическая частота.