Свободные колебания системы с одной степенью свободы

Задача D35

Механизм, состоящий из пяти тел и двух одинаковых пружин с жесткостью $c = 12$ Н/м, расположен в горизонтальной плоскости. Стержни 4 и 5 жестко скреплены с блоком 2, вращающимся на неподвижной опоре. Однородный цилиндр 1 входит в зацепление с внешним ободом блока, внутренний радиус блока зацеплен с рейкой 3, свободно скользящей в направляющих. Даны массы $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 10$ кг, $m_4 = 4$ кг, $m_5 = 1$ кг и относительные размеры: радиусы $R_2 = 1{,}5r_2$, радиус инерции блока 2 $\rho_2 = r_2$, длины стержней $l_4 = 2R_2$, $l_5 = 4R_2$. Массой пружин пренебречь. Найти частоту собственных колебаний механизма.

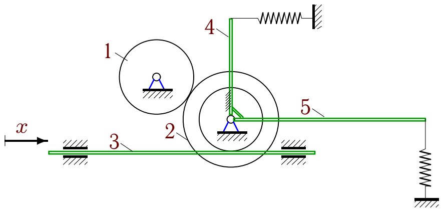

Рис. 1

Решение

Используем уравнение Лагранжа 2-го рода, выбрав за обобщенную координату смещение x рейки 3

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{m_3\dot{x}^2}{2} + \frac{J_4\omega_2^2}{2} + \frac{J_5\omega_2^2}{2},$$

где $J_1 = m_1 R_1^2/2$, $J_2 = m_2\rho^2$, $J_4 = m_4 l_4^2/3$, $J_5 = m_5 l_5^2/3$. Очевидно,

$$\omega_2 = |\dot{x}|/r_2, \quad \omega_1 = \omega_2 R_2/R_1. \tag{2}$$

Отсюда

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2}\left(\frac{m_1 R_2^2}{2r_2^2} + \frac{m_2\rho^2}{r_2^2} + m_3 + \frac{m_4 l_4^2}{3r_2^2} + \frac{m_5 l_5^2}{3r_2^2}\right) = \frac{\dot{x}^2\mu}{2}.$$

С учетом числовых данных $\mu = 45$.

Найдем потенциальную энергию системы, соответствующую силам натяжения двух пружин

$$\Pi = c\frac{\Delta_4^2}{2} + c\frac{\Delta_5^2}{2},$$

где Δ_4, Δ_5 — удлинения пружин, связанные с обобщенной координатой x,

$$\Delta_4 = \varphi_2 l_4, \quad \Delta_5 = \varphi_2 l_5.$$

Интегрируя первое уравнение (2), получим угол поворота блока 2: $\varphi_2 = |x|/r_2$, откуда получаем

$$\Pi = cx^2\frac{l_4^2 + l_5^2}{2r_2^2} = C\frac{x^2}{2},$$

где с учетом данных соотношений $R_2 = 1{,}5r_2$, $l_4 = 2R_2$, $l_5 = 4R_2$ имеем $C = 9(9 + 36) = 405$.

Уравнение Лагранжа (1) примет вид

$$\mu\ddot{x} + Cx = 0,$$

Находим частоту свободных колебаний

$$k = \sqrt{C/\mu} = \sqrt{405/45} = 3\ \text{с}^{-1}.$$