Легко показать, что кинетическая энергия однородного цилиндра массой m, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности имеет вид

$$T = \frac{3mv_C^2}{4}, \tag{3.21}$$

где v_C — скорость оси цилиндра.

Кинетическая энергия тела в произвольном движении [1] имеет вид

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{\vec{\omega} \cdot J_C\,\vec{\omega}}{2}, \tag{3.22}$$

где v_C — скорость центра масс тела, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости, J_C — тензор момента инерции тела относительно его главных центральных осей, введенный симметричной матрицей

$$J_C = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

где J_x, J_y, J_z — осевые моменты инерции, а $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{zy} = J_{yz}$ — центробежные.

Задача 111. Механизм, состоящий из трех тел, установлен на призме 4, скользящей по гладкой плоскости (рис. 240). Нить, соединяющая обод однородного цилиндра 3 с внешним радиусом составного блока 2, ось которого закреплена на призме, горизонтальна. Внутренние радиусы блоков 1 и 2 соединены нитью, параллельной плоскости призмы, по которой скатывается блок 1. Под действием

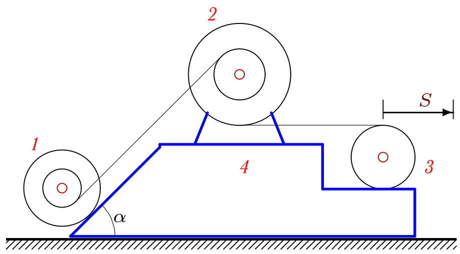

Рис. 240

внутренних сил из состояния покоя механизм пришел в движение. Ось цилиндра 3 сместилась относительно призмы на расстояние $S = 94$ см. Даны радиусы и массы $R_1 = 3$ см, $r_1 = 2$ см, $R_2 = 4$ см, $r_2 = 3$ см, $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 20$ кг, $m_4 = 12$ кг, $\cos\alpha = 0.6$. Найти смещение призмы.

[1] См. также (3.59), с. 181.

Решение

Из теоремы о движении центра масс системы (3.17) следует $ma_{cx} = F_x^e$, где a_{cx} — ускорение центра масс системы по оси x, $m = \sum_{i=1}^{4} m_i$ — масса всей системы. По условию задачи плоскость, по которой скользит призма, гладкая. Трения и других внешних горизонтальных сил нет [1]. Отсюда $F_x^e = 0$ и $ma_{cx} = 0$. Интегрируя это уравнение при нулевой начальной скорости, получаем $mv_{cx} = 0$. Еще раз интегрируем: $mx_{cx} =$const. Это означает, что в данном случае центр масс имеет постоянное положение. Следовательно, с учетом формулы (3.18) для координат центра масс, получаем $mx_{cx} = \sum_{i=1}^{4} m_i x_i =$const, или

$$\sum_{i=1}^{4} m_i \Delta x_i = 0, \tag{3.24}$$

где Δx_i, $i = 1, ..., 4$ — смещения центров масс тел системы. Смещение каждого тела представим в виде суммы относительного смещения δ_i^r, $i = 1, ..., 4$, зависящего от заданного перемещения S оси цилиндра 1, и переносного смещения призмы, которое обозначим за δ и направим вправо. Таким образом, в (3.24) входят абсолютные смещения $\Delta x_i = \delta_i^r - \delta$.

Рассмотрим относительные смещения тел. Смещение оси цилиндра 3 по условию задачи равно S. Учитывая, что точка касания цилиндра и бруска в системе координат, связанной с призмой, неподвижна, получаем, что верхняя точка обода этого цилиндра смещается на $2S$ (рис. 241).

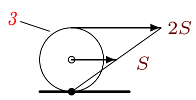

Рис. 241

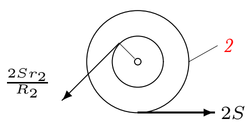

Рис. 242

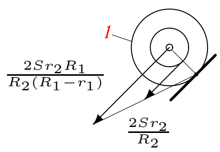

Рис. 243

Нить, связывающая блок 2 и цилиндр 3 нерастяжима, поэтому нижняя точка внешнего обода блока 2 также сместится на $2S$. При этом блок

---

[1] Для того, чтобы лучше понять суть решаемой задачи, можно представить, что призма находится на гладкой отполированной, хорошо смазанной поверхности (а еще лучше, что она закреплена на плавающей платформе). Иначе трудно понять, как это за счет смещения тела на призме сама призма начнет смещаться. Может помочь также собственный опыт выхода с лодки на берег. Лодка в этот момент начинает предательски уходить из-под ног, не вовремя демонстрируя теорему о сохранении центра масс системы.

повернется на угол $\varphi_2 = 2S/R_2$, а точка на внутреннем радиусе блока сместится на φr_2 (рис. 242). Аналогично, вычислим угол поворота $\varphi_1 = 2\,S\,r_2/(R_2\,(R_1 - r_1))$ блока 1 и, учитывая линейный характер распределения смещений в блоке 1 (рис. 243), получим относительное смещение его оси

$$\varphi_1 R_1 = 2\,S\,r_2\,R_1/(R_2\,(R_1 - r_1)),$$

а в проекции на ось x с учетом, что смещение направлено налево, получим отрицательное смещение

$$\delta_1^r = -\frac{2\,S\,r_2\,R_1}{R_2\,(R_1 - r_1)}\cos\alpha.$$

В уравнение теоремы о движении центра масс войдет абсолютное смещение $\delta_1^r - \delta$.

Уравнение (3.24) примет вид

$$-m_1\left(2\,S\frac{r_2\,R_1}{R_2\,(R_1 - r_1)}\cos\alpha + \delta\right) - m_2\,\delta + m_3\,(S - \delta) - m_4\,\delta = 0.$$

Отсюда выражаем смещение призмы δ:

$$\delta = S\,\frac{m_3 - (9/2)m_1\cos\alpha}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{611}{47} = 13 \text{ см}.$$

Задача 112*. Механизм, состоящий из цилиндра 1, блока 2 и бруска 3, установлен на призме 4, скользящей по гладкой плоскости. Нити, соединяющие блок, цилиндр и брусок, параллельны плоскости. (рис. 244). Под действием внутренних

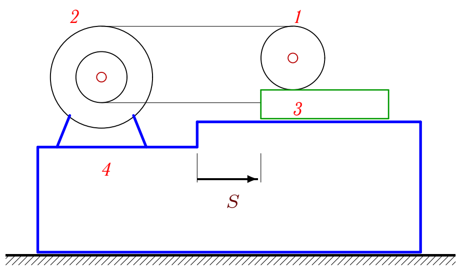

Рис. 244

сил из состояния покоя механизм пришел в движение. Брусок 3 сместился относительно призмы на расстояние $S = 1.11$ м. Найти смещение призмы. Даны массы: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 13$ кг, $m_3 = 10$ кг, $m_4 = 10$ кг, радиусы $R_2 = 3$ см, $r_2 = 2$ см.