

Поток в насыщенной сети можно посчитать по потоку, выходящему из истока 1 или входящему в сток 8. Очевидно, эти числа должны быть равны. Кроме того, для проверки решения следует проверить условие сохранения потока по узлам. Для каждого узла суммарный входящий поток должен быть равен выходящему. В рассматриваемом примере поток равен 11. Распределение потока по дугам при одном и том же суммарном минимальном потоке в сети не единственное.

Maple-программа для определения максимального потока в сети приведена на с. 123.

### 4.3. Топологическая сортировка сети

Пусть в сети в общем случае имеется несколько истоков и стоков. Стоки и истоки занимают в сети крайние положения. Все остальные вершины могут быть дальше или ближе к ним. Расположение вершины в сети определяется ее *уровнем*. Определим это понятие. Вершины уровня 0 — это истоки; они образуют множество  $N_0$ . Если  $N_i$  — множество вершин уровня  $i \leq k$ , то  $N_{k+1}$  — множество вершин уровня  $k+1$ , состоящее из тех и только тех вершин, предшественники которых принадлежат любому из множеств  $N_0, \dots, N_k$ , причем среди этих множеств нет пустых [3].

Порядковой функцией сети называют отображение, сопоставляющее каждой вершине сети ее уровень.

Задача. Найти порядковую функцию сети (рис. 4.8).

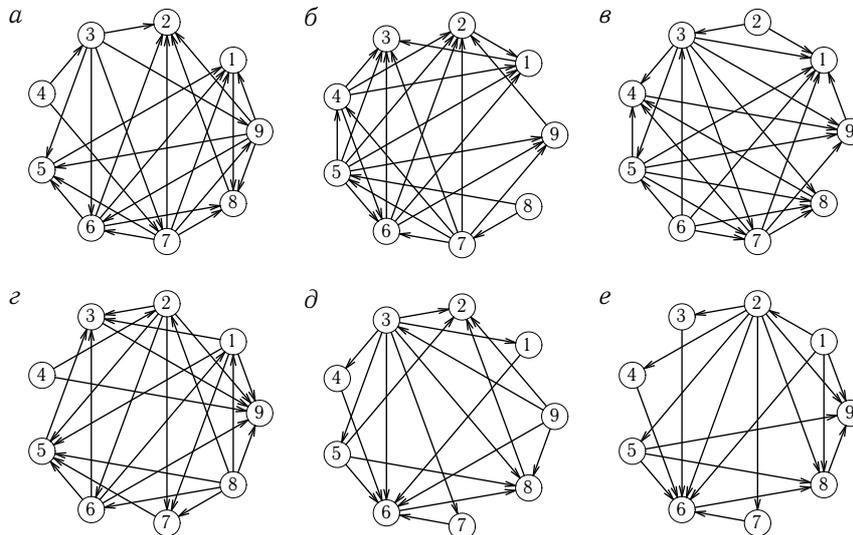


Рис. 4.8

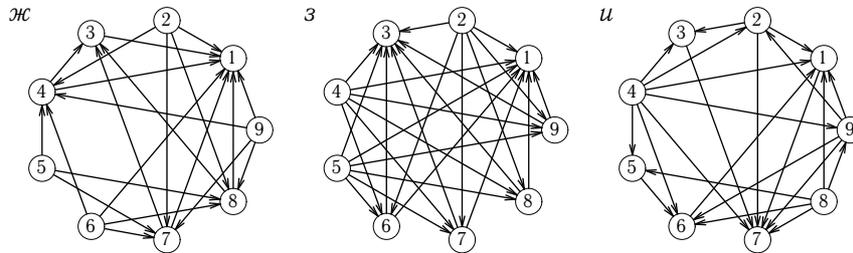


Рис. 4.8 (продолжение)

Ответы

№	Порядковая функция
<i>a</i>	4, 3, 7, 9, 6, 5, 1, 8, 2
<i>б</i>	8, 7, 5, 4, 6, 9, 2, 1, 3
<i>в</i>	(2, 6), 3, 5, 7, 8, 4, 9, 1
<i>г</i>	(4, 8), 2, 6, 1, 7, 5, 3, 9
<i>д</i>	9, 3, (1, 7, 4, 5), 6, 8, 2
<i>e</i>	1, 2, (7, 3, 4, 5), 6, 8, 9
<i>ж</i>	(5, 6, 2, 9), (4, 7, 8), 3, 1
<i>з</i>	(2, 5, 4), (8, 6, 7, 9), (3, 1)
<i>и</i>	(4, 8), (5, 9), (6, 2), (1, 3), 7

Пример. Отсортировать топологически сеть на рис. 4.9.

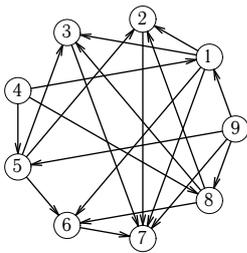


Рис. 4.9

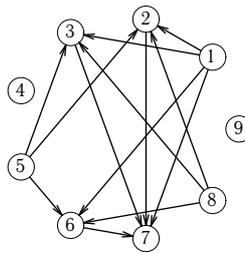


Рис. 4.10

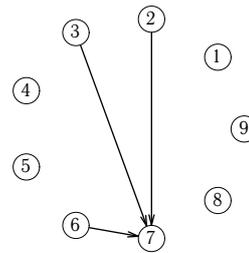


Рис. 4.11

Решение. Находим вершины (4 и 9), полустепень захода которых равна 0. Удаляем эти вершины и дуги, выходящие из них [3]. Удаленные вершины образуют первый уровень упорядоченной сети. Получаем новую сеть (рис. 4.10). В новой сети в вершины 1, 5 и 8 не входят дуги. Удаляем

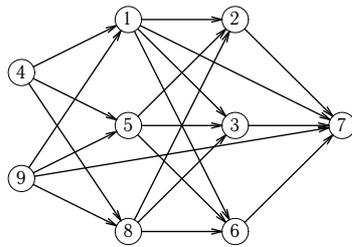


Рис. 4.12

эти вершины (они образуют второй уровень) и получаем сеть, изображенную на рис. 4.11. Очевидно, третий уровень состоит из вершин 2, 3 и 6, а последний (сток сети) — из единственной вершины 7. Изображаем ту же сеть по уровням (рис. 4.12).

Maple-программа для топологической сортировки сети приведена на с. 127.

#### 4.4. Паросочетание в двудольном графе

Граф называется *двудольным*, если существует такое разбиение множества его вершин на две части, что концы каждого ребра принадлежат разным частям (долям).

**Теорема 16** (Кенига<sup>1</sup>). *Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечетной длины.*

Если любые две вершины двудольного графа, входящие в разные доли, смежны, то граф называется *полным двудольным*. Обозначение для полного двудольного графа с  $n$  и  $m$  вершинами в долях —  $K_{n,m}$ .

Так как по определению в двудольном графе вершины одной доли никогда не соединяются ребрами, для избежания ввода ненужной информации матрицу смежности для двудольного графа можно записать в сокращенной форме: элемент  $a_{ij}$  матрицы смежности двудольного графа равен 1, если  $i$ -я вершина одной доли соединена с  $j$ -й вершиной другой доли; в противном случае  $a_{ij} = 0$ . Если нумерация вершин графа общая, а не по долям, то  $j$ -ю вершину другой доли в определении надо заменить на  $(j + n)$ -ю вершину графа  $K_{n,m}$ . Очевидно, матрица двудольного графа в общем случае имеет размер  $n \times m$ , т.е. не является квадратной.

*Паросочетанием* графа называется граф, ребра которого являются подмножеством ребер графа, а вершины имеют степень 1.

Паросочетание, не являющееся подмножеством другого паросочетания, называется *максимальным*.

Паросочетание, содержащее наибольшее число ребер, называется *наибольшим*. Наибольшее паросочетание является и максимальным.

Паросочетание, порядок которого равен порядку графа, называется *совершенным*. Совершенное паросочетание включает в себя все вершины двудольного графа. Очевидно, совершенное паросочетание является наибольшим и максимальным. Максимальное паросочетание

<sup>1</sup>König D.