| № | $\mu$ | |
|---|---|---|
| 1 | 1.099 | $c_0 = 0,\ c_1 = c_4 + (7/3)c_5,\ c_2 = 0,\ c_3 = -2c_4 - (10/3)c_5$ |
| 2 | 0.514 | $c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = c_4 + 2c_5,\ c_3 = -2c_4 - 3c_5$ |
| 3 | 1.095 | $c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = (3c_4 + 7c_5)/2,\ c_3 = -(5c_4 + 9c_5)/2$ |
| 4 | 2.070 | $c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = 4c_4 + (25/2)c_5, c_3 = -4c_4 - 10c_5$ |
| 5 | 1.968 | $c_0 = 0,\ c_1 = 8c_4 + 25c_5,\ c_2 = 0,\ c_3 = -4c_4 - 10c_5$ |
| 6 | 2.136 | $c_0 = 0,\ c_1 = c_4 + (7/3)c_5,\ c_2 = 0,\ c_3 = -2c_4 - (10/3)c_5$ |
| 7 | 0.614 | $c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = c_4 + 2c_5,\ c_3 = -2c_4 - 3c_5$ |
| 8 | 1.000 | $c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = (3c_4 + 7c_5)/2,\ c_3 = -(5c_4 + 9c_5)/2$ |
| 9 | 4.357 | $c_0 = 0,\ c_1 = 8c_4 + 25c_5,\ c_2 = 0,\ c_3 = -4c_4 - 10c_5$ |
| 10 | 0.711 | $c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = 4c_4 + (25/2)c_5, c_3 = -4c_4 - 10c_5$ |

Maple – программа определения коэффициента приведения длины неоднородного стержня энергетическим методом дана на с. **??**, точное решение — на с. 314.

## 9.4. Колебания узла фермы

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *В одном из шарниров плоской фермы находится точка с массой $m$. Стержни фермы упругие. Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней, определить частоты собственных малых колебаний шарнира фермы.*

### План решения

Система имеет две степени свободы. Основные уравнения задачи следуют из уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2. \end{aligned} \tag{9.23}$$

В качестве обобщенных координат $q_1$, $q_2$ принимаем горизонтальные и вертикальные перемещения узла $x_1$ и $x_2$. Предполагая, что упругие силы линейно зависят от перемещений, записываем уравнение Лагранжа 2-го рода в матричном виде:

$$A\ddot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0, \tag{9.24}$$

где $A$ — матрица инерции, $C$ — матрица жесткости. Матрица обратная $C$ — матрица податливости $B = C^{-1}$, коэффициенты которой (перемещения от единичных сил) вычисляем по формуле Максвелла–Мора [24]:

$$b_{i,j} = b_{j,i} = \sum_{\mu=1}^{n} S_{i,\mu} S_{j,\mu} \frac{l_\mu}{EF}, \qquad i,j = 1,2, \tag{9.25}$$

где $l_\mu$ — длины стержней, $E$ и $F$ — модуль упругости и площадь поперечного сечения стержней, $S_{i,\mu}$ — безразмерное усилие в стержне с номером $\mu$ от действия единичной горизонтальной ($i = 1$) или вертикальной ($i = 2$) нагрузки на шарнир с массой. Произведение $EF$ называют жесткостью, в данной задаче она считается одинаковой для всех стержней фермы. Коэффициенты $b_{i,j}$ имеют простой физический смысл: $b_{i,j}$ — это перемещение узла в направлении $i$ под действием единичной силы, действующей в направлении $j$. Измеряются $b_{i,j}$ в м/Н. По теореме взаимности Бетти [1] $b_{i,j} = b_{j,i}$.

Кинетическая энергия точки на плоскости имеет вид $T = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2$, следовательно, матрица инерции является диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Умножаем 9.24 на $B$ и делаем подстановку $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2\vec{x}$, что равносильно замене $x_1 = A_1\sin(\omega t + \beta_0)$, $x_2 = A_2\sin(\omega t + \beta_0)$, где $A_1, A_2$ — амплитуды, $\omega$ — частота, $\beta_0$ — начальная фаза колебаний. Получаем однородную систему

$$m\omega^2 B\vec{x} - \vec{x} = 0,$$

имеющую ненулевое решение в том случае, если ее определитель равен нулю. Следовательно, задача свелась к поиску собственных значений $\lambda = 1/(m\omega^2)$ матрицы $B$.

1. К шарниру, наделенному массой, прикладываем единичную (безразмерную) горизонтальную силу. Определяем усилия в стержнях $S_{1,\mu}, \mu = 1, ..., n$, где $n$ — число стержней фермы.

2. Прикладываем к этому же шарниру единичную вертикальную силу. Определяем усилия в стержнях $S_{2,\mu}$.

3. Используя формулу Максвелла–Мора (2), вычисляем коэффициенты податливости $b_{i,j}$. Записываем их в симметричную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем собственные значения (*Решебник ВМ,* §2.10, с. 68) $\lambda_{1,2}$ матрицы $B$.

[1] *Энрико Бетти* (1823–1892) — итальянский математик.

5. Находим частоты собственных колебаний $\omega_1 = 1/\sqrt{m\lambda_1}$, $\omega_2 = 1/\sqrt{m\lambda_2}$.

**Пример.** В шарнире $C$ плоской фермы находится точка с массой $m = 9$ кг (рис. 233). Жесткость всех стержней фермы одинакова $EF =$ $= 0.1$ кН, $l = 1$ м. Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней, определить частоты собственных малых колебаний шарнира.

### Решение

1. К шарниру $C$, наделенному массой, прикладываем единичную (безразмерную) горизонтальную силу (рис. 234). Методом Риттера или методом вырезания узлов [10] определяем усилия в стержнях: $S_{1,1} = S_{1,2} = S_{1,4} = S_{1,5} = 0$, $S_{1,3} = -1$. В усилии $S_{1,\mu}$ первый индекс указывает направление приложенной единичной силы.

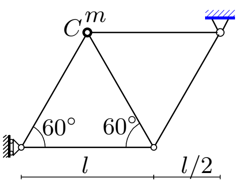


**Рис. 233**

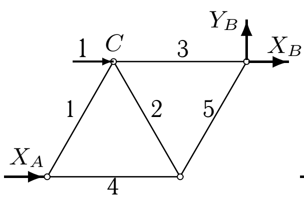


**Рис. 234**

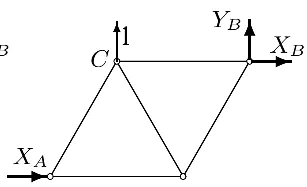


**Рис. 235**

Индекс 1 соответствует горизонтальной единичной силе, 2 — вертикальной силе. Второй индекс — номер стержня. Номера стержней указаны на рис. 234.

2. К шарниру $C$ прикладываем единичную вертикальную силу (рис. 235). Определяем усилия в стержнях: $S_{2,1} = 0$, $S_{2,2} = 1.155$, $S_{2,3} = -0.577$, $S_{2,4} = S_{2,5} = -1.155$ [1].

3. По формуле Максвелла–Мора (2) находим коэффициенты податливости $b_{i,j}$. Промежуточные результаты заносим в таблицу:

[1] Определение усилий в стержнях с помощью Maple см. программу 23, с. 297.

| $\mu$ | $S_{1,\mu}$ | $S_{2,\mu}$ | $l_\mu$ | $l_\mu S_{1,\mu}^2$ | $l_\mu S_{1,\mu} S_{2,\mu}$ | $l_\mu S_{2,\mu}^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1.155 | 1 | 0 | 0 | 1.333 |
| 3 | $-1$ | $-0.577$ | 1 | 1 | 0.577 | 0.333 |
| 4 | 0 | $-1.155$ | 1 | 0 | 0 | 1.333 |
| 5 | 0 | $-1.155$ | 1 | 0 | 0 | 1.333 |
| $\sum_{\mu=1}^{5}$ | | | | 1.000 | 0.577 | 4.333 |

Суммируя три последних столбца, получаем коэффициенты податливости, отнесенные к жесткости $EF$:

$$b_{1,1} = 1.000/(EF),\ b_{1,2} = 0.577/(EF), b_{2,2} = 4.333/(EF),$$

и записываем их в виде симметричной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.00577 \\ 0.00577 & 0.04333 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы $B$. Приравниваем нулю определитель

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Решаем квадратное уравнение и находим собственные значения:

$$\lambda_1 = 0.044305, \lambda_2 = 0.009028.$$

5. Находим частоты собственных колебаний (круговые частоты):

$$\omega_1 = 1/\sqrt{m\lambda_1} = 1.584 \text{ рад/с},\ \omega_2 = 1/\sqrt{m\lambda_2} = 3.508 \text{ рад/с}.$$

**Условия задач**. *В одном из шарниров плоской фермы (на рисунке выделен) находится точка с массой $m$. Стержни фермы упругие. Жесткость стержней $EF$; $l = 1$ м. Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней, определить частоты собственных малых колебаний шарнира фермы.*