ГЛАВА 11

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В гл. 9 в примерах 9.3, 9.4 мы столкнулись с напряженными состояниями, которые отличаются от простых состояний растяжения-сжатия и чистого сдвига, воспроизводимых в стандартных экспериментах по определению механических свойств материалов. В этой главе будут рассмотрены вопросы расчета на прочность при таких сложных напряженных состояниях.

11.1. Анализ напряженного состояния в точке

11.1.1. Еще в гл. 2 (п. 2.2.2) было отмечено, что через данную точку тела можно провести сколько угодно сечений и на каждом из них в этой точке действует свое напряжение. Напомним, что совокупность напряжений в точке на всевозможных проходящих через нее сечениях называется напряженным состоянием в этой точке. На рис. 11.1 показаны нормальные и касательные напряжения на гранях элементарного кубика, выделенного в окрестности точки О тела координатными плоскостями системы координат x, y, z. Как и в п. 2.2.2, первый индекс у касательного напряжения — это индекс нормали к сечению (площадке), на котором оно действует, а второй — индекс оси, вдоль которой оно направлено. Напряжения,показанные на рис. 11.1, в том числе и данные для невидимых граней штриховой линией, положительны. Таким образом, нормальные напряжения положительны, если они растягивающие. Положительные направления касательных напряжений на тех гранях, внешняя нормаль к которым совпадает с положительным направлением оси, совпадают с положительными направлениями двух других осей. На рис. 11.1 — это видимые грани кубика. Если же внешняя нормаль к площадке противоположна направлению координатной оси, как это имеет место для невидимых на рис. 11.1 граней кубика, то положительные касательные напряжения направлены противоположно соответствующим координатным осям. Они показаны пунктиром.

Девять составляющих напряжений σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}, σ_y, τ_{yx}, τ_{yz}, σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}, действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках, называют компонентами напряженного состояния. В п. 2.2.3 было доказано свойство парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad (11.1.1)$$

Оно следовало из тех условий равновесия элементарного кубика, которые требуют, чтобы были равны нулю суммы моментов действующих на него сил относительно осей x, y, z.

Свойство парности касательных напряжений показывает, что из девяти компонентов напряженного состояния независимыми являются только шесть.

11.1.2. Покажем, что компоненты напряженного состояния полностью определяют напряженное состояние в точке. Иными словами, если мы знаем компоненты напряженного состояния в данной точке, то мы можем найти напряжения на любой площадке, проходящей через эту точку.

Для этого рассмотрим равновесие показанного на рис. 11.2 элементарного тетраэдра, три грани которого OAB, OBC и OAC лежат в координатных плоскостях, а четвертая ABO является произвольной площадкой с нормалью ν. Обозначим через l, m, n направляющие косинусы нормали ν в осях x, y, z, т.е.

$$l = \cos(\nu, x), \ m = \cos(\nu, y), \ n = \cos(\nu, z). \tag{11.1.2}$$

Пусть F — площадь грани ABC, а F_x, F_y, F_z — площади координатных граней OBC, OAC, OAB. Тогда

$$F_x = Fl, \ F_y = Fm, \ F_z = Fn. \tag{11.1.3}$$

Для того чтобы определить полное напряжение p_ν на площадке ABC, достаточно найти его составляющие p_x, p_y, p_z по координатным осям. Проецируя действующие на тетраэдр силы на координатные оси, получаем условия его равновесия в виде

$$\sum P_x = 0: \ p_x F - \sigma_x F_x - \tau_{yx} F_y - \tau_{zx} F_z = 0,$$

$$\sum P_y = 0: \ p_y F - \tau_{xy} F_x - \sigma_y F_y - \tau_{zy} F_z = 0,$$

$$\sum P_x = 0: \ p_z F - \tau_{xz} F_x - \tau_{yz} F_y - \sigma_z F_z = 0.$$

Отсюда с учетом выражений (11.1.3), после сокращения на F, приходим к соотношениям, позволяющим определить p_x, p_y, p_z и, следовательно, полное напряжение p, через компоненты напряженного состояния

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \tag{11.1.4}$$

11.1.3. По составляющим p_x, p_y, p_z полного напряжения на площадке ABC легко найти нормальное напряжение σ_ν на этой площадке как

$$\sigma_\nu = p_x l + p_y m + p_z n. \tag{11.1.5}$$

Тогда в соответствии с соотношениями (11.1.4) получаем, учитывая парность касательных напряжений:

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \tag{11.1.6}$$

Величину касательного напряжения τ_ν на площадке ABC можем найти как

$$\tau_\nu = \sqrt{p^2 - \sigma_\nu^2} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_\nu^2}$$

С точки зрения оценки прочности, нас прежде всего должны заинтересовать площадки, на которых действуют экстремальные по величине нормальные напряжения. Такие площадки называются главными. Так как направляющие косинусы удовлетворяют соотношению

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \tag{11.1.7}$$

то задача поиска главных площадок заключаются в отыскании соответствующих величин l, m, n, при которых функция σ_ν (11.1.6) принимает экстремальные значения при условии (11.1.7). Математически это задача на условный экстремум, которая сводится к отысканию экстремума функции Лагранжа:

$$\Phi = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl + \sigma(1 - l^2 - m^2 - n^2). \tag{11.1.8}$$

Здесь σ — неопределенный множитель Лагранжа. Условия экстремума функции Лагранжа $\partial\Phi/\partial l = 0$, $\partial\Phi/\partial m = 0$, $\partial\Phi/\partial n = 0$ приводят нас к соотношениям, которые удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \sigma m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \sigma n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \tag{11.1.9}$$

Сравнивая эти соотношения с выражениями (11.1.4), видим, что для главных площадок

$$p_x = \sigma l, \ \ p_y = \sigma m, \ \ p_z = \sigma n, \tag{11.1.10}$$

т.е. σl, σm, σn являются составляющими по координатным осям полного напряжения на главной площадке. Более того, они пропорциональны с коэффициентом пропорциональности σ направляющим косинусам l, m, n, которые фактически являются составляющими по координатным осям вектора единичной нормали ν к искомой главной площадке. Поэтому вектор полного напряжения p_ν на главной площадке направлен вдоль нормали ν и является, таким образом, нормальным напряжением. А коль скоро на главной площадке нормальное напряжение и является полным напряжением, то касательное напряжение на такой площадке равно нулю.

На рис. 11.3 показано полное напряжение p_ν на главной (рис. 11.3 а) и неглавной (рис. 11.3 5) площадках. Множитель Лагранжа а является величиной напряжения на главной площадке. Действительно, $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$. Но для главной площадки p_x, p_y, p_z определены выражениями (11.1.10); поэтому

$$p = \sqrt{\sigma^2 l^2 + \sigma^2 m^2 + \sigma^2 n^2} = \sigma\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = \sigma.$$

Направляющие косинусы главной площадки определяются из уравнений (11.1.9), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = 0, \\ &\tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} n = 0, \\ &\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n = 0. \end{aligned} \tag{11.1.11}$$

Для неизвестных l, m, n эти уравнения являются системой линейных однородных уравнений. Так как $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, то эта система должна иметь ненулевое решение. А это возможно только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \qquad (11.1.12)$$

Раскрывая этот определитель, приходим к следующему кубическому уравнению:

$$\sigma^3 - J_l\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0. \qquad (11.1.13)$$

Здесь

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_z\sigma_x + \sigma_z\sigma_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{zy}^2, \qquad (11.1.14)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yx} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Все три корня уравнения (11.1.13) вещественны. Действительно, по математической классификации задача (11.1.11) является задачей на собственные значения для системы линейных уравнений, матрица которой в силу парности касательных напряжений — симметрическая. А собственные значения симметрической матрицы, являющиеся корнями ее характеристического (векового) уравнения (11.1.13), всегда вещественны. Каждому из них соответствует собственный вектор, являющийся в нашем случае решением систем (11.1.11) и определяющий единичный вектор нормали к главной площадке. Если корни различны, то соответствующие им собственные векторы ортогональны и поэтому три главные площадки взаимно перпендикулярны.

Сами же корни уравнения (11.1.13) являются напряжениями на главных площадках. Они называются главными напряжениями. Их принято обозначать через σ_1, σ_2, σ_3 и располагать в таком порядке, что а $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Заметим, что напряженное состояние в точке тела определяется действующими на него нагрузками и поэтому оно не зависит от того, какая система координат выбрана для его описания. Соответственно, и главные напряжения не зависят от выбранной системы координат. Но они являются корнями уравнения (11.1.13). Следовательно, и его коэффициенты J_1, J_2, J_3 также не зависят от выбора системы координат, хотя компоненты напряженного состояния σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{zy}, τ_{xz} конечно определяются системой координат. Поэтому главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 и коэффициенты характеристического уравнения J_1, J_2, J_3 называют *инвариантами напряженного состояния*.

Если элементарный кубик в окрестности точки тела выделить так, чтобы его грани совпадали с главными площадками, то напряженное состояние можно рассматривать как трехосное растяжение — сжатие (рис. 11.4). А это значительно упрощает анализ напряженного состояния.

Для определения положения главных площадок, например, той площадки, на которой действует главное напряжение σ_1, нужно задать в системе

(11.1.11) $\sigma = \sigma_1$, тогда определитель системы становится равным нулю, и следовательно, ее уравнения линейно зависимы, т.е. одно из уравнений является линейной комбинацией двух других. Выразив из этих двух уравнений два неизвестных (например, l и m) через третье (n) и подставив полученные выражения в условие $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, найдем последнее неизвестное (n). А его уже используем для вычисления двух оставшихся косинусов (l и m) первой главной площадки.

Для дальнейшего, однако, знание положения главных площадок не существенно.