

ПРИМЕР. Найти функцию Гамильтона механической системы с двумя степенями свободы по известной функции Лагранжа

$$L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_2 \cos q_1 + \sin q_2.$$

РЕШЕНИЕ

1. Дифференцируя функцию Лагранжа по \dot{q}_1 и \dot{q}_2 , находим обобщенные импульсы p_j :

$$\begin{aligned} p_1 &= 2\dot{q}_1 + \dot{q}_2, \\ p_2 &= \dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 - \cos q_1. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Решаем систему (4) относительно обобщенных скоростей:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= (2p_1 - p_2 - \cos q_1)/3, \\ \dot{q}_2 &= (2p_2 - p_1 + 2 \cos q_1)/3. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Записываем функцию Гамильтона (1), в которой обобщенные скорости заменяем на выражения (5):

$$H = \frac{1}{3} (p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + (2p_2 - p_1) \cos q_1 + \cos^2 q_1) - \sin q_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для стационарных связей функция Гамильтона равна полной механической энергии $H = T + \Pi$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти функцию Гамильтона механической системы с двумя степенями свободы по известной функции Лагранжа; q_1, q_2 — обобщенные координаты.

- | | |
|---|---|
| 1. $L = 6\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 2q_1^2 + 4q_2^2.$ | 2. $L = 2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 3q_1^2 + 4q_1q_2.$ |
| 3. $L = 2\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 4q_2^2 + 2q_1q_2.$ | 4. $L = 4\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 4q_1q_2.$ |
| 5. $L = \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \cos q_1.$ | 6. $L = \dot{q}_1\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1q_1 + 2\dot{q}_2q_2.$ |
| 7. $L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 3\dot{q}_2q_2.$ | 8. $L = 2\dot{q}_1^2 + 6\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 3q_1^2.$ |
| 9. $L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_2 \cos q_2.$ | 10. $L = 4\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 12q_2^2.$ |

Ответы

- $H = -6p_1^2 + p_1p_2 - 2q_1^2 - 4q_2^2.$
- $H = p_1p_2 - 2p_2^2 - 3q_1^2 - 4q_1q_2.$
- $H = (1/8)p_1^2 + (1/8)p_2^2 - 4q_2^2 - 2q_1q_2.$
- $H = (4p_1^2 - p_1p_2 + 4p_2^2)/63 - 4q_1q_2.$
- $H = (p_1^2 + p_2^2/2)/4 - p_1 \cos q_1 - \cos^2 q_1.$
- $H = p_1p_2 - 2p_1q_2 - 2p_2q_1 + 4q_1q_2.$
- $H = p_1p_2 - 3p_1q_2 - p_2^2 + 6q_2p_2 - 9q_2^2.$