

По теореме Резаля скорость  $\mathbf{u}$  точки  $A$  — конца кинетического момента  $L_O$  — геометрически равна главному моменту внешних сил  $M_O^E$ :

$$\mathbf{u} = M_O^E.$$

Следовательно, скорость  $\mathbf{u}$  точки  $A$  параллельна вектору  $M_O^E$ , т. е. в любой момент времени перпендикулярна к плоскости  $zO\xi$ .

Из этого вытекает, что ось симметрии волчка  $O\xi$  вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$  с некоторой угловой скоростью  $\omega_1$ , описывая коническую поверхность.

Угол  $\theta$ , составленный осями  $O\xi$  и  $Oz$ , при этом движении остается постоянным. Это движение, совершаемое осью симметрии волчка, называется *регулярной прецессией*, а угловая скорость  $\omega_1$  ее вращения вокруг неподвижной оси  $Oz$  называется *угловой скоростью прецессии*. Для ее определения воспользуемся выражением скорости  $\mathbf{u}$ .

По теореме Резаля

$$u = M_O^E = Gd \sin \theta.$$

С другой стороны, скорость  $\mathbf{u}$  можно рассматривать как вращательную скорость точки  $A$  во вращении волчка вокруг неподвижной оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega_1$ . Ее модуль:  $u = AB\omega_1$ , где  $AB$  — расстояние от точки  $A$  до оси  $Oz$ :

$$AB = OA \sin \theta = L_O \sin \theta = J_\xi \omega \sin \theta.$$

Таким образом,

$$u = J_\xi \omega \omega_1 \sin \theta.$$

Приравниваем два выражения, определяющие модуль скорости  $u$ :

$$J_\xi \omega \omega_1 \sin \theta = Gd \sin \theta,$$

отсюда

$$\omega_1 = \frac{Gd}{J_\xi \omega}. \quad (92.1)$$

Формула (92.1) показывает, что *угловая скорость прецессии  $\omega_1$  тем меньше, чем больше угловая скорость  $\omega$  вращения волчка вокруг его оси симметрии.*

### § 93. Гироскоп с двумя степенями свободы. Гироскопический момент

Рассмотрим теперь гироскоп с двумя степенями свободы. Этот гироскоп представляет собой маховик (рис. 207, *a*), ось симметрии которого  $DE$  опирается на подпятники, укрепленные в подвижной раме. Рама может вращаться вокруг неподвижной оси  $AB$ , проходящей через центр тяжести  $C$  маховика. Положение гироскопа определяется двумя величинами: углом поворота маховика вокруг его оси  $DE$  и углом поворота рамы вокруг оси  $AB$ , т. е. гироскоп имеет две степени свободы. Положим, что маховик вращается вокруг своей

оси симметрии  $C\zeta$  с большой угловой скоростью  $\omega$ , а рама, несущая подпятники  $D$  и  $E$ , неподвижна. Если смотреть от точки  $E$  к точке  $C$ , видно вращение маховика происходящим против движения часовой стрелки. Тогда кинетический момент маховика относительно точки  $C$  направлен от точки  $C$  к точке  $E$  и имеет модуль  $L_C = J_\zeta \omega$ .

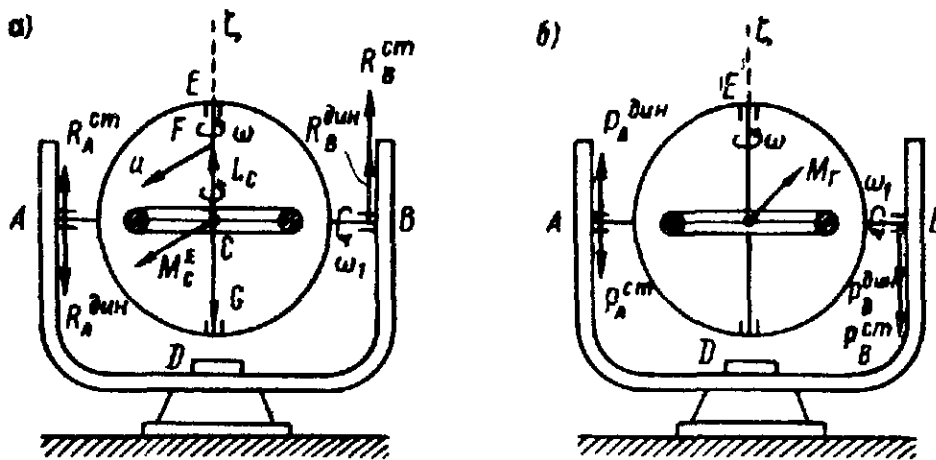


Рис. 207.

Предположим теперь, что раме сообщено вращение вокруг оси  $AB$  с небольшой угловой скоростью  $\omega_1$  и что это вращение происходит против движения часовой стрелки, если смотреть от точки  $B$  к точке  $C$ .

В этом случае точка  $F$  — конец вектора кинетического момента маховика  $L_C$  — имеет вращательную скорость  $u$ , направленную в сторону вращения рамы и равную по модулю

$$u = L_C \omega_1 = J_\zeta \omega \omega_1. \quad (93.1)$$

Определим, какие внешние силы действуют на раму при этом вращении.

По теореме Резаля главный момент внешних сил  $M_C^E$  относительно точки  $C$  геометрически равен скорости  $u$ . На раму с укрепленным в ней маховиком действуют внешние силы: сила тяжести  $G$  гироскопа и реакции подшипников  $A$  и  $B$ , в которых находится ось рамы. Сила тяжести  $G$ , приложенная в точке  $C$ , не имеет относительно нее момента, и следовательно, главный момент внешних сил  $M_C^E$  представляет собой суммарный момент реакций подшипников.

Так как при вращении рамы центр тяжести гироскопа остается неподвижным, то согласно уравнению (43.1) главный вектор внешних сил равен нулю.

Отсюда следует, что внешние силы, приложенные к гироскопу, приводятся к паре сил с моментом  $M_C^E$ .

Реакции подшипников  $A$  и  $B$  складываются из статических и динамических реакций (рис. 207, а). Статические реакции, уравновешивающие силу тяжести  $G$ , постоянны по модулю и направлению

и вследствие симметрии

$$R_A^{ст} = R_B^{ст} = \frac{G}{2}.$$

Динамические реакции составляют пару сил с моментом  $M_C^E$ . Плоскость пары перпендикулярна к моменту  $M_C^E$  и, следовательно, совпадает с плоскостью, определяемой осями  $AB$  и  $DE$ . На рис. 207, а эта плоскость вертикальна и в соответствии с направлением момента  $M_C^E$  силы пары направлены:  $R_B^{дин}$  — вверх и  $R_A^{дин}$  — вниз. При вращении рамы плоскость пары сил ( $R_A^{дин}$ ,  $R_B^{дин}$ ) поворачивается вместе с рамой. Зная расстояние между подшипниками, т. е. плечо пары сил  $AB$ , можно определить модули динамических реакций подшипников.

Пользуясь теоремой Резаля и формулой (93.1), получаем

$$M_C^E = u = J_\zeta \omega \omega_1,$$

тогда динамические реакции подшипников

$$R_A^{дин} = R_B^{дин} = \frac{J_\zeta \omega \omega_1}{AB}. \quad (93.2)$$

Статическая и динамическая реакции в каждой точке складываются геометрически. При вертикальном положении плоскости пары ( $R_A^{дин}$ ,  $R_B^{дин}$ ) линии действия статических и динамических реакций совпадают. В этот момент одна из полных реакций подшипников имеет минимальное значение, а другая — максимальное:

$$\left. \begin{aligned} R_{A_{\min}} &= R_A^{ст} - R_A^{дин} = \frac{G}{2} - \frac{J_\zeta \omega \omega_1}{AB}, \\ R_{B_{\max}} &= R_B^{ст} + R_B^{дин} = \frac{G}{2} + \frac{J_\zeta \omega \omega_1}{AB}. \end{aligned} \right\} \quad (93.3)$$

По закону равенства действия и противодействия устанавливаем, что действие рамы на подшипники выражается также парой сил. Момент пары сил, приложенной к подшипникам, равен по модулю  $M_C^E$ , но направлен в противоположную сторону. Этот момент называют *гироскопическим*

Обозначив его  $M_r$ , получим

$$M_r = -M_C^E. \quad (93.4)$$

Появление гироскопического момента называется *гироскопическим эффектом*

На рис. 207, б показаны гироскопический момент  $M_r$  и соответствующая ему пара сил ( $R_A^{дин}$ ,  $R_B^{дин}$ ), приложенная к подшипникам. Таким образом, при вращении рамы гироскопа подшипники испытывают, кроме статических давлений  $R_A^{ст}$  и  $R_B^{ст}$ , динамические давления  $R_A^{дин}$  и  $R_B^{дин}$ . Давления рамы на подшипники противоположны по

направлению соответствующим реакциям подшипников и равны им по модулю, т е

$$R_A^{\text{ст}} = -R_B^{\text{ст}}, \quad R_B^{\text{ст}} = -R_A^{\text{ст}}; \quad P_A^{\text{ст}} = P_B^{\text{ст}} = \frac{G}{2},$$

$$R_A^{\text{дин}} = -R_B^{\text{дин}}; \quad R_B^{\text{дин}} = -R_A^{\text{дин}}; \quad P_A^{\text{дин}} = P_B^{\text{дин}} = \frac{J_{\xi} \omega \omega_1}{AB}.$$

Полное давление на каждый подшипник равно геометрической сумме статического и динамического давлений

Появление динамических давлений на подшипники обусловлено действием сил инерции гироскопа на опоры

Гироскопический момент представляет собой момент пары, составленной силами инерции гироскопа

Гироскопический эффект в той или иной форме проявляется всегда, когда изменяется направление оси быстро вращающегося гироскопа

В § 91 для гироскопа с тремя степенями свободы установлено, что под действием приложенной силы его ось поворачивается в плоскости, перпендикулярной к силе. Предположим, что на гироскоп, изображенный на рис 207, а, б, действует в течение малого промежутка времени  $\tau$  сила, имеющая направление скорости  $u$ . При наличии трех степеней свободы ось гироскопа  $DE$  повернулась бы в плоскости рамы вокруг точки  $C$  по движению часовой стрелки. Опоры гироскопа с двумя степенями свободы этого перемещения не допускают. При этом они испытывают давление в виде пары  $(R_A^{\text{дин}}, R_B^{\text{дин}})$ , стремящейся повернуть плоскость рамы по движению часовой стрелки, а рама гироскопа в результате действия приложенной силы начинает и продолжает вращаться вокруг оси  $AB$ , как указано на рис 207, а

*Следовательно, гироскоп с двумя степенями свободы не обладает способностью противодействовать изменению направления его оси вращения*

Гироскопы получили широкое применение в различных областях техники: на транспорте, в морском флоте, в авиации, в военном деле и проч.

Так, например, гироскопический эффект используется при езде на велосипеде.

Гироскопические устройства обеспечивают также устойчивость движения двухколесного автомобиля и вагона однопорельсовой железной дороги.

С помощью гироскопических устройств направляются по заданному курсу движения судов в открытом море и совершаются слепые полеты самолетов.

Гироскопические приборы используются для управления полетом баллистической ракеты и обеспечивают движение в заданном направлении торпеды.

Для того чтобы обеспечить пуле и снаряду устойчивость в полете, ствол винтовки и орудия снабжают винтовой нарезкой. Тогда при выходе из ствола пуля и снаряд получают быстрое вращение вокруг продольной оси и приобретают свойства быстро вращающегося гироскопа, обеспечивающие их устойчивость в полете\*.

## § 94. Примеры гироскопических явлений

**Пример 50.** Велосипедное колесо весом  $G$  свободно насажено на ось  $BC$  длиной  $l$  (рис. 208). Момент инерции колеса относительно оси  $BC$  равен  $J$ . Колесу сообщили быстрое вращение с угловой скоростью  $\omega$  вокруг этой оси, расположенной горизонтально, и закрепили только точку  $B$ . Определить движение колеса, пренебрегая весом оси.

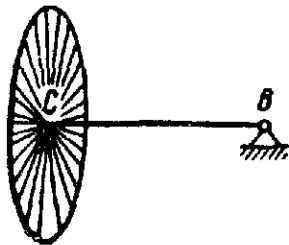


Рис. 208.

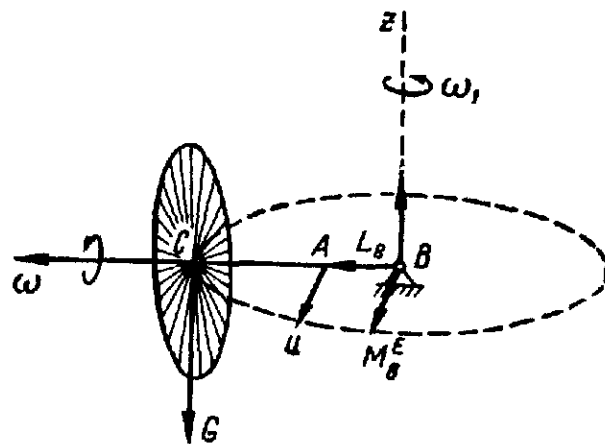


Рис. 209.

Решение. Так как неподвижной является только точка  $B$ , то вращающееся колесо представляет собой гироскоп с тремя степенями свободы. Положим, что колесо вращается вокруг оси  $BC$  против движения часовой стрелки, если смотреть от точки  $C$  к точке  $B$ . Кинетический момент гироскопа относительно точки  $B$  имеет направление, указанное на рис. 209, и модуль

$$L_B = J\omega.$$

Главный момент внешних сил относительно точки  $B$  равен моменту силы тяжести колеса  $G$ , так как реакция опоры  $B$  момента не имеет:

$$M_B^E = G \cdot BD = Gl.$$

Момент  $M_B^E$  направлен перпендикулярно к вертикальной плоскости, проходящей через линию действия силы  $G$  и неподвижную точку  $B$ , причем, смотря ему навстречу, можно видеть силу  $G$  вращающей эту плоскость против движения часовой стрелки.

\* Применение гироскопов в технике изложено в книге Е. Л. Николаи. Гироскоп и некоторые его технические применения, Гостехиздат, 1947.

На основании теоремы Резаля

$$u = M_B^E,$$

откуда

$$u = M_B^E = Gl.$$

Скорость  $u$  точки  $A$  — конца вектора  $L_B$  — имеет направление главного момента внешних сил  $M_B^E$ . Следовательно, ось колеса  $BC$  поворачивается вокруг вертикальной оси  $Bz$  и центр тяжести колеса  $C$  описывает окружность в горизонтальной плоскости. Чтобы найти угловую скорость этой прецессии  $\omega_1$ , представим скорость  $u$  как вращательную скорость точки  $A$ :

$$u = L_B \omega_1 = J \omega \omega_1.$$

Приравнивая два значения  $u$ , получаем

$$Gl = J \omega \omega_1,$$

откуда определяется угловая скорость прецессии:

$$\omega_1 = \frac{Gl}{J \omega}.$$

Прецессия имеет место потому, что центр тяжести колеса  $C$  не совпадает с точкой опоры  $B$ .

**Пример 51.** Ротор быстроходной турбины, ось которой совпадает с продольной осью корабля, имеет вес  $G = 39,2$  кн, радиус инерции относительно оси вращения  $0,75$  м и угловую скорость  $n = 3000$  об/мин. Определить максимальные гироскопические давления турбины на подшипники при килевой качке с амплитудой  $\varphi_0 = 5^\circ$  и периодом  $T = 12$  сек, если расстояние между подшипниками  $AB = 2$  м.

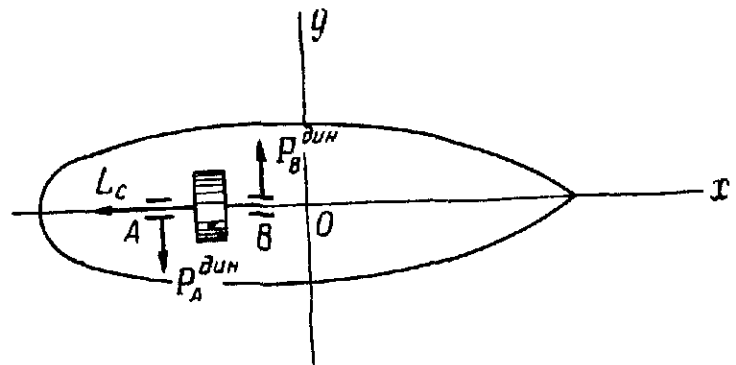


Рис. 210.

**Решение.** Обозначим продольную и поперечную оси судна  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 210). Определим кинетический момент ротора турбины, вращающегося вокруг оси  $Ox$ , относительно его центра тяжести  $C$ :

$$L_C = J_{Cx} \omega = \frac{G}{g} i_x^2 \frac{\pi n}{30} = \frac{39\,200}{9,81} \cdot 0,75^2 \cdot \frac{3,14 \cdot 3000}{30} = 706\,500 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек}.$$

Килевая качка представляет собой качание судна вокруг поперечной оси  $Oy$ .

Положим, что это качание происходит по гармоническому закону:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Угловая скорость вращения корпуса судна вокруг оси  $y$ :

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Наибольший модуль угловой скорости  $\omega_1$ , соответствует значениям  $\cos \frac{2\pi}{T} t = \pm 1$ :

$$\omega_{1\max} = \frac{2\pi\varphi_0}{T} = \frac{2\pi \frac{\pi}{36}}{18 \cdot 12} = \frac{9,86}{18 \cdot 12} = 0,046 \text{ сек}^{-1}.$$

Положим, что нос судна поднимается, а корма опускается. Тогда вращательная скорость  $u$  конца вектора  $L_C$  направлена вертикально вниз и равна

$$u = L_C \omega_1.$$

Согласно теореме Резаля момент пары, составленной реакциями подшипников и приложенной к ротору турбины, направлен так же, как и скорость  $u$  — вертикально вниз

$$M_C^E = u = L_C \omega_1.$$

Гироскопический момент, т. е. момент пары, приложенной к подшипникам, определяется согласно (93.4):

$$M_r = -M_C^E,$$

т. е. гироскопический момент направлен вертикально вверх

$$M_r = M_C^E = L_C \omega_1.$$

Пара ( $P_A^{\text{дин}}$ ,  $P_B^{\text{дин}}$ ), составленная динамическими давлениями ротора на подшипники, лежит в горизонтальной плоскости, а силы  $P_A^{\text{дин}}$  и  $P_B^{\text{дин}}$  имеют направления, указанные на рис. 209.

Определяем эти силы:

$$P_A^{\text{дин}} = P_B^{\text{дин}} = \frac{M_r}{AB} = \frac{L_C \omega_1}{AB}.$$

Максимальные гироскопические давления ротора на подшипники равны:

$$P_{A\max}^{\text{дин}} = P_{B\max}^{\text{дин}} = \frac{L_C \omega_{1\max}}{AB} = \frac{706\,500 \cdot 0,046}{2} = 16\,250 \text{ н} = 16,25 \text{ кн}.$$

При движении кормы вверх динамические давления ротора на подшипники имеют направления, противоположные указанным на рис. 210.

## § 95. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела

Движение свободного твердого тела можно рассматривать как совокупность двух его движений: поступательного вместе с центром масс и сферического вокруг центра масс.