Для проверки составим сумму моментов всех сил, действующих на плиту, относительно какой-нибудь новой оси, например, z', проведенной через точку A:

$$\sum M_{zi} = -S_1 b\cos\beta + F_2 b + F_1 a + S_3 a\cos\alpha = -765 + 765 + 90 - 90 = 0.$$

Замечание. В решении получено, что усилие в стержнях 4 и 5 равно нулю. Как правило, в таких случаях в задаче есть какое-то уравнение, из которого это сразу следует. Так, $S_5 = 0$ получается из последнего уравнения системы. Аналогично, если составить уравнение моментов относительно оси, проведенной через начало координат и точку B по большой диагонали, то обнаруживается, что все силы, кроме реакции стержня 4, пересекают эту ось. Поэтому уравнение получается однородным $S_4 h = 0$, где h — плечо силы S_4 относительно этой оси. Следовательно, не вычисляя h, сразу получаем $S_4 = 0$.

С18. Статические инварианты

Не все задачи статики сводятся к определению реакций опор или усилий в стержнях. Приведение системы сил к простейшему виду — одна из таких задач. Ее решение потребуется и в динамике, и во многих других науках, например, сопротивлении материалов.

Привести систему сил к центру O означает найти главный вектор $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}_0$ системы относительно этого центра. Очевидно, при изменении центра приведения главный момент меняется, а главный вектор остается постоянным. Главный вектор — инвариант системы сил. Другим инвариантом является скалярное произведение главного вектора и главного момента $\vec{R}\cdot\vec{M}_0$.

Условия задач

К точкам A_1, A_2 и A_3 некоторого тела [1] приложены соответственно силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$. Проекции сил даны в ньютонах, координаты точек — в метрах. Найти статические инварианты системы сил.

С18.1.

$A_1(2,3,0)$, $A_2(3,0,1)$, $A_3(3,0,2)$,

$\vec{F}_1(-4,1,0)$, $\vec{F}_2(1,1,0)$, $\vec{F}_3(2,0,2)$.

С18.2.

$A_1(3,1,0)$, $A_2(1,0,0)$, $A_3(1,0,3)$,

$\vec{F}_1(2,0,1)$, $\vec{F}_2(3,2,6)$, $\vec{F}_3(1,0,2)$.

С18.3.

$A_1(0,3,0)$, $A_2(0,2,0)$, $A_3(0,1,0)$,

$\vec{F}_1(1,2,1)$, $\vec{F}_2(2,2,1)$, $\vec{F}_3(4,0,2)$.

С18.4.

$A_1(0,1,2)$, $A_2(0,0,0)$, $A_3(0,0,3)$,

$\vec{F}_1(-4,1,11)$, $\vec{F}_2(0,1,0)$, $\vec{F}_3(0,1,1)$.

[1] Системой сил называется множество сил, приложенных к *одному* телу.

С18. 25.
$A_1(1,1,0)$, $A_2(0,0,3)$, $A_3(0,2,1)$,
$\vec{F}_1(0,-2,-3)$, $\vec{F}_2(2,2,1)$, $\vec{F}_3(0,2,1)$.

С18. 26.
$A_1(0,2,1)$, $A_2(1,0,0)$, $A_3(2,0,2)$,
$\vec{F}_1(0,1,0)$, $\vec{F}_2(-1,0,0)$, $\vec{F}_3(2,1,2)$.

С18. 27.
$A_1(0,2,3)$, $A_2(2,0,2)$, $A_3(0,1,0)$,
$\vec{F}_1(1,2,2)$, $\vec{F}_2(1,0,2)$, $\vec{F}_3(-4,3,10)$.

С18. 28.
$A_1(0,0,2)$, $A_2(2,0,2)$, $A_3(0,2,1)$,
$\vec{F}_1(-2,12,11)$, $\vec{F}_2(1,-1,1)$, $\vec{F}_3(0,1,0)$.

С18. 29.
$A_1(0,3,2)$, $A_2(2,0,0)$, $A_3(0,2,0)$,
$\vec{F}_1(0,1,1)$, $\vec{F}_2(4,2,5)$, $\vec{F}_3(0,1,1)$.

С18. 30.
$A_1(3,2,0)$, $A_2(1,0,0)$, $A_3(0,2,0)$,
$\vec{F}_1(2,1,1)$, $\vec{F}_2(1,0,0)$, $\vec{F}_3(12,9,5)$.

Пример решения

Задача. К точкам $A_1(0,4,0)$, $A_2(3,0,0)$ и $A_3(0,0,1)$ приложены, соответственно, силы $\vec{F}_1(1,0,0)$, $\vec{F}_2(0,3,0)$ и $\vec{F}_3(-5,0,0)$ (рис. 85). Проекции сил даны в ньютонах, координаты точек — в метрах. Найти статические инварианты системы сил.

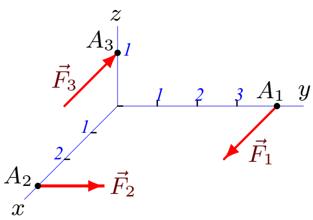

Рис. 85

Решение

Находим главный вектор системы — векторный инвариант:

$R_x = \sum_k F_{kx} = F_1 - F_3 = -5 + 1 = -4$ Н,
$R_y = \sum_k F_{ky} = F_2 = 3$ Н,
$R_z = \sum_k F_{kz} = 0$.

Момент силы $\vec{F}$ в точке $A(x,y,z)$ относительно начала координат вычисляется по формуле

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

где $\vec{r}_A$ — радиус-вектор точки A. Проекции вектора момента на оси (или моменты силы относительно осей) имеют вид

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y, \\ M_y &= zF_x - xF_z, \\ M_z &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Находим проекции главного момента $\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_k)$ системы сил как суммы моментов сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ относительно осей:

$$M_x = \sum_k M_{kx} = 0,$$
$$M_y = \sum_k M_{ky} = -F_3 \cdot 1 = -5 \text{ Нм},$$
$$M_z = \sum_k M_{kz} = F_2 \cdot 3 - F_1 \cdot 4 = 9 - 4 = 5 \text{ Нм}.$$

Находим скалярный инвариант системы сил:

$$I = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} = M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z = -15 \text{ Н}^2\text{м}.$$

Замечание. При вычислении моментов относительно осей не обязательно пользоваться аналитическими формулами (3.3). Воспользуемся определением момента силы относительно оси на с. 111, рис. 80. Найдем, например, момент силы $\vec{F}_1$ относительно оси z. Из рисунка 85 ясно, что вектор силы $\vec{F}_1$ стремится повернуть тело, к которому он приложен, вокруг оси z *по часовой* стрелке с плечом 4 м, если смотреть с конца оси z, т. е. сверху. Следовательно, момент равен $-1 \cdot 4 = -4$ Нм. Аналогично, сила $\vec{F}_2$ стремится повернуть тело вокруг этой же оси *против часовой* стрелки с плечом 3 м, и ее момент равен $3 \cdot 3 = 9$ Нм. В сумме получаем $M_z = 5$ Нм. Относительно оси x силы системы моментов не имеют: силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ параллельны оси, а сила $\vec{F}_1$ — пересекает ось [1]. Вращательной способности у этих сил нет, в результате $M_x = 0$. Сила $\vec{F}_3$ стремится повернуть тело вокруг оси y *по часовой* [2] стрелке с плечом 1 м. Вычисляем момент: $-5 \cdot 1 = -5$ Нм.

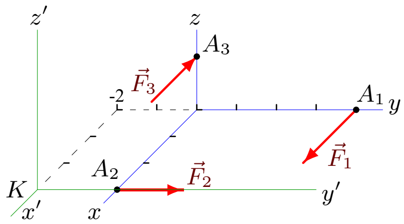

Рис. 86

Проверка. Значение инварианта системы сил не зависит от выбора точки приведения. В предложенном решении точка приведения находилась в начале координат. Расположим для проверки точку приведения в другом месте, например, на плоскости xy в точке $K(3, -2, 0)$ (рис. 86). Новые оси координат $x'y'z'$ с центром в K проведем параллельно старым.

[1] В общем — если вектор силы и ось лежат в одной плоскости, то момент силы относительно этой оси равен нулю.

[2] Поэтому произведение берется с минусом.

Вычислим проекции главного момента:

$$M_{x'} = \sum_k M_{kx'} = 0,$$
$$M_{y'} = \sum_k M_{ky'} = -F_3 \cdot 1 = -5 \text{ Нм},$$
$$M_{z'} = \sum_k M_{kz'} = F_3 \cdot 2 - F_1 \cdot 6 = 4 \text{ Нм}.$$

Скалярный инвариант системы сил имеет вид

$$I = \vec{M}_K \cdot \vec{R} = M_{x'}R_x + M_{y'}R_y + M_{z'}R_z = -15 \text{ Н}^2\text{м}.$$

Проверка выполнена. Значение инварианта получилось тем же.

Интересно сравнить модули главных моментов относительно точек O и K. Имеем: $M_O = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2} = 7{,}07$ Нм, $M_K = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41} = 6{,}40$ Нм. Модуль момента уменьшился. Главный момент относительно различных центров приведения меняет и величину, и направление, а скалярный инвариант I и главный вектор

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \text{ Н}$$

остаются постоянными. Минимальное значение модуля главного момента вычисляется по формуле

$$M_* = |I|/R = 15/5 = 3 \text{ Нм}.$$

Точки, относительно которых главный момент минимальный, образуют прямую — центральную винтовую ось, уравнение которой имеет вид

$$\frac{M_{Ox} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_{Oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{Oz} - xR_y + yR_x}{R_z} = p,$$

где $p = I/R^2$ — шаг винта. Индексы в уравнениях образуют круговую перестановку

$$\overleftarrow{x \to y \to z}.$$

Если систему сил привести к любой точке на центральной винтовой оси, то главный вектор и главный момент будут лежать на этой оси и образовывать так называемую *динаму*.

Глава 4

Центр тяжести

Принято считать, что задачи статики — это определение реакций опор. И действительно, в большинстве задач этого сборника ставится такая задача. Однако есть исключения. Одно такое исключение отмечено в