К14. 27.
$\psi = 10t - \pi/4,$
$\varphi = 10t - \pi/2,$
$\vartheta = 9t + \alpha,\ \cos\alpha = 4/5.$

К14. 28.
$\psi = 12t - \pi/4,$
$\varphi = 12t - \pi/6,$
$\vartheta = 3t + \pi/3.$

К14. 29.
$\psi = 11t + \pi/6,$
$\varphi = 8t - \pi/6,$
$\vartheta = 4t + \pi/3.$

К14. 30.
$\psi = 9t - \pi/4,$
$\varphi = 6t - \pi/6,$
$\vartheta = 5t + \pi/3.$

Пример решения

Задача. Твердое тел совершает сферическое движение по закону, заданному углами Эйлера.

$$\begin{aligned}
&\psi = \sqrt{2}t,\\
&\varphi = \sin(t) + \pi/2,\\
&\vartheta = 2t + \pi/4.
\end{aligned}$$

Найти модуль угловой скорости тела при $t = 0$.

Решение

Воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера для определения проекций угловой скорости на подвижные оси координат

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi,\\
\omega_y &= \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi,\\
\omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Дифференцируя заданные функции, получаем

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \sqrt{2}\sin(\sin(t))\sin(2\,t + \pi/4) + 2\cos(\sin(t)),\\
\omega_y &= \sqrt{2}\cos(\sin(t))\sin(2\,t + \pi/4) - 2\sin(\sin(t)),\\
\omega_z &= \sqrt{2}\cos(2\,t + \pi/4) + \cos(t).
\end{aligned}$$

При $t = 0$ имеем

$$\omega_x = 2,\ \omega_y = 1,\ \omega_z = 2.$$

Находим модуль угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 3\ \text{с}^{-1}.$$

Для проверки можно воспользоваться кинематическими уравнениями Эйлера в проекции на неподвижные оси координат

$$\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \dot{\varphi}\sin\psi\,\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi,\\
\omega_{y'} &= -\dot{\varphi}\cos\psi\,\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi,\\
\omega_{z'} &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

или, еще проще, готовой формулой для модуля угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\vartheta}.$$

Легко проверить, что эту формулу можно получить как из уравнений (2.35), так и из уравнений (2.36):

$$\omega = \sqrt{\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 + \omega_{z'}^2}.$$