

9.3. Движение точки по звену механизма

Постановка задачи. Плоский шарнирно-стержневой механизм приводится в движение кривошипом, который вращается с заданной угловой скоростью. Вдоль одного из стержней по известному закону движется точка M . Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M .

План решения

Представляем движение точки в виде суммы относительного движения по звену механизма и переносного движения вместе со звеном.

1. Вводим неподвижную систему координат xy , совмещая ее начало с положением одного из шарниров механизма в заданный момент времени. Вдоль стержня, по которому движется точка, располагаем подвижную ось u , направляя ее в сторону движения точки. Зная закон относительного движения $\sigma(t)$ (он задан в условии), определяем положение точки относительно звена и неподвижных осей xy в расчетный момент. Определяем координаты x и y шарниров.

2. Дифференцируя $\sigma(t)$ по времени, находим проекции относительной скорости и относительного ускорения на ось u :

$$v_{от}^{\tau} = d\sigma(t)/dt, \quad a_{от}^{\tau} = d^2\sigma(t)/dt^2.$$

Зная угол между осями u и x , находим проекции векторов $\vec{v}_{от}$ и $\vec{a}_{от}$ на оси xy .

3. Решаем задачу о скоростях точек многозвенного механизма, используя аналитические методы (§ 8.3., с. 179, § 8.5., с. 188). Вычисляем вектор скорости той точки механизма, в которой в данный момент находится подвижная точка M . Эта скорость является переносной скоростью для точки M .

4. Определяем вектор абсолютной скорости, $\vec{v} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_п$, и его модуль, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

5. Решаем задачу об ускорениях точек многозвенного механизма, используя аналитические методы (§ 8.4., с. 183, § 8.5., с. 188). Вычисляем вектор ускорения той точки механизма, в которой в данный момент находится подвижная точка M . Это ускорение является переносным для точки M .

6. Находим ускорение Кориолиса:

$$\vec{v}_К = 2\vec{\omega}_п \times \vec{v}_{от},$$

где $\vec{\omega}_п = \{0, 0, \omega_{пz}\}$ — вектор угловой скорости звена, по которому движется точка.

7. Находим абсолютное ускорение, $\vec{a} = \vec{a}_п + \vec{a}_{от} + \vec{v}_К$, и его модуль: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

ПРИМЕР. Плоский шарнирно-стержневой механизм $OABC$ приводится в движение кривошипом $OA = 60$ см, который вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OAz} = 3$ рад/с¹. Вдоль стержня AB движется точка M по закону $AM = 15t^2e^{t-2}$ см.

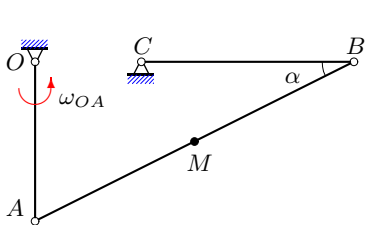


Рис. 117

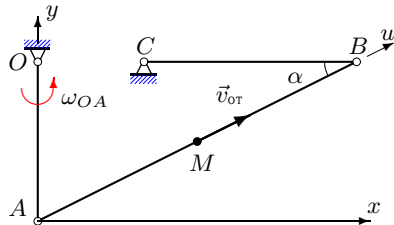


Рис. 118

Положение механизма при $t = t_1 = 2$ с указано на рис. 117; $AB = 120$ см, $BC = 80$ см, $\alpha = 30^\circ$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в этот момент.

РЕШЕНИЕ

Абсолютное движение точки представляем в виде суммы относительного движения по звену AB и переносного движения вместе с ним. Переносные скорость и ускорение являются соответственно скоростью и ускорением той точки звена, в которой в данный момент располагается точка M .

1. Вводим неподвижную систему координат xy , совмещая ее начало с положением шарнира A механизма в заданный момент времени. Вдоль стержня AB , по которому движется точка, располагаем подвижную ось u , направляя ее в сторону движения точки (рис. 118). Зная закон относительного движения $\sigma(t) = 15t^2e^{t-2}$, определяем положение точки относительно звена при $t = 2$ с: $AM = \sigma(2) = 60$ см, т.е. точка находится в центре звена AB . Определяем координаты шарниров в неподвижных осях координат:

$$\begin{aligned} x_O &= 0, & y_O &= OA, \\ x_A &= 0, & y_A &= 0, \\ x_B &= AB \cos \alpha, & y_B &= AB \sin \alpha, \\ x_C &= AB \cos \alpha - BC, & y_C &= AB \sin \alpha. \end{aligned}$$

¹Проекция угловой скорости на ось z , перпендикулярную плоскости чертежа, $\omega_{OAz} > 0$, следовательно, кривошип вращается против часовой стрелки.

2. Дифференцируя $\sigma(t)$ по времени, находим проекции относительной скорости и относительного ускорения на ось u :

$$\begin{aligned} v_{от}^\tau &= \dot{\sigma} = 15e^{t-2}(2t + t^2) = 120 \text{ см/с}, \\ a_{от}^\tau &= \ddot{\sigma} = 15e^{t-2}(2 + 4t + t^2) = 210 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Угол между осями u и x равен $\alpha = 30^\circ$. Находим проекции: ¹

$$\begin{aligned} v_{от.x} &= v_{от} \cos \alpha = 103.923 \text{ см/с}, & v_{от.y} &= v_{от} \sin \alpha = 60 \text{ см/с}, \\ a_{от.x} &= a_{от}^\tau \cos \alpha = 181.865 \text{ см/с}^2, & a_{от.y} &= a_{от}^\tau \sin \alpha = 105 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

3. Решаем задачу о скоростях точек многозвенного механизма, используя уравнения трех угловых скоростей (§ 8.3., с. 179):

$$\begin{aligned} \omega_{OAz}(x_O - x_A) + \omega_{ABz}(x_A - x_B) + \omega_{BCz}(x_B - x_C) &= 0, \\ \omega_{OAz}(y_O - y_A) + \omega_{ABz}(y_A - y_B) + \omega_{BCz}(y_B - y_C) &= 0, \end{aligned}$$

где по условию $\omega_{OAz} = 3$ рад/с. Решаем систему двух уравнений относительно ω_{ABz} и ω_{BCz} . Подставляя численные значения, получаем $\omega_{ABz} = 3$ рад/с, $\omega_{BCz} = 3.897$ рад/с. Скорость \vec{v}_M определяем из равенства

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AM} = \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AM}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\vec{v}_M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{OAz} \\ x_A - x_O & y_A - y_O & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{ABz} \\ x_M - x_A & y_M - y_A & 0 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Получаем

$$\begin{aligned} v_{Mx} &= \omega_{OAz}OA - \omega_{ABz}AM \sin \alpha = 90 \text{ см/с}, \\ v_{My} &= \omega_{ABz}AM \cos \alpha = 155.886 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

Найденная скорость является переносной скоростью для точки M ²

$$v_{п.x} = v_{Mx}, \quad v_{п.y} = v_{My}.$$

Модуль переносной скорости $v_{п} = \sqrt{v_{п.x}^2 + v_{п.y}^2} = 180 \text{ см/с}$.

¹Преобразование координат вектора при переходе к новому базису см. *Решешник ВМ*, §2.8.

²Можно выполнить простую геометрическую проверку вычисления v_M . Концы векторов \vec{v}_A , \vec{v}_B , \vec{v}_M (построенных в масштабе) должны лежать на одной прямой. Векторы \vec{v}_A , \vec{v}_B строим перпендикулярно звеньям OA и BC , соответственно, а их модули вычисляем по известным угловым скоростям — $v_A = |\omega_{OAz}|OA = 180 \text{ см/с}$, $v_B = |\omega_{BCz}|BC = 311.769 \text{ см/с}$.

4. Определяем проекции,

$$\begin{aligned}v_x &= v_{от.x} + v_{п.x} = 103.923 + 90 = 193.923 \text{ см/с}, \\v_y &= v_{от.y} + v_{п.y} = 60 + 155.886 = 215.886 \text{ см/с}\end{aligned}$$

и модуль абсолютной скорости: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 290.194 \text{ см/с}$.

5. Решаем задачу об ускорениях точек многосвязного механизма, используя уравнения трех угловых ускорений (уравнение (2), с. 184), где $\varepsilon_{OAz} = 0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ABz}(x_A - x_B) + \varepsilon_{BCz}(x_B - x_C) - \\ - \omega_{OAz}^2(y_O - y_A) - \omega_{ABz}^2(y_A - y_B) - \omega_{BCz}^2(y_B - y_C) = 0, \\ \varepsilon_{ABz}(y_A - y_B) + \varepsilon_{BCz}(y_B - y_C) + \\ + \omega_{OAz}^2(x_O - x_A) + \omega_{ABz}^2(x_A - x_B) + \omega_{BCz}^2(x_B - x_C) = 0.\end{aligned}$$

Находим $\varepsilon_{ABz} = 4.662 \text{ рад/с}^2$. Вычисляем вектор ускорения той точки механизма, в которой в данный момент находится подвижная точка M . Это ускорение является переносным для точки M . Учитывая, что $\varepsilon_{OAz} = 0$, записываем векторное равенство

$$\begin{aligned}\vec{a}_M &= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{A}\vec{M} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{A}\vec{M}) = \\ &= \vec{\omega}_{OA} \times (\vec{\omega}_{OA} \times \vec{O}\vec{A}) + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{A}\vec{M} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{A}\vec{M}).\end{aligned}$$

Раскрывая векторные произведения по аналогии с (1), вычисляем $a_{Mx} = -607.504 \text{ см/с}^2$, $a_{My} = 512.222 \text{ см/с}^2$. Это ускорение является переносным для точки M :

$$a_{п.x} = a_{Mx}, \quad a_{п.y} = a_{My}.$$

Модуль переносного ускорения $a_{п} = \sqrt{a_{п.x}^2 + a_{п.y}^2} = 794.628 \text{ см/с}^2$.

6. Находим ускорение Кориолиса $\vec{v}_K = 2\vec{\omega}_{п} \times \vec{v}_{от}$, где $\vec{\omega}_{п}$ — вектор угловой скорости звена AB , по которому движется точка:

$$\vec{v}_K = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{ABz} \\ v_{от.x} & v_{от.y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем

$$a_{Kx} = -2\omega_{ABz}v_{от.y} = -360 \text{ см/с}^2, \quad a_{Ky} = 2\omega_{ABz}v_{от.x} = 623.538 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения Кориолиса ¹

$$|v_K| = \sqrt{a_{Kx}^2 + a_{Ky}^2} = 720 \text{ см/с}^2.$$

¹Проверка: $|v_K| = 2|\omega_{ABz}||v_{от}|\sin 90^\circ = 720 \text{ см/с}^2$.

7. Вычисляем абсолютное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_{от} + \vec{a}_п + \vec{v}_к$:

$$a_x = a_{от.x} + a_{п.x} + a_{к.x} = -785.639 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = a_{от.y} + a_{п.y} + a_{к.y} = 1240.76 \text{ см/с}^2$$

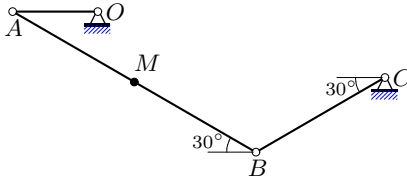
и его модуль $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 14.686 \text{ м/с}^2$.

Результаты заносим в таблицу.

$\omega_{пz}$	$v_{от}$	$v_{п}$	v	$a_{от}$	$a_{п}$	$v_к$	a
рад/с	м/с			м/с ²			
3.000	1.200	1.800	2.902	2.100	7.946	7.200	14.686

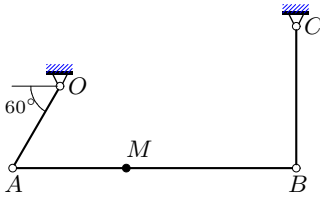
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Плоский шарнирно-стержневой механизм приводится в движение кривошипом OA , который вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω . Вдоль стержня AB движется точка M по закону $AM = \sigma(t)$ или $BM = \sigma(t)$ (σ в см). Положение механизма при $t = t_1$ указано на рисунке. Стержни, положение которых не задано углом, горизонтальны или вертикальны. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в этот момент.

1.



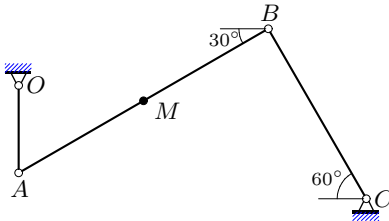
$$\begin{aligned} \omega &= 1.4 \text{ рад/с}, t = 3 \text{ с}, \\ BM &= 2t(14 - t), \\ OA &= 40 \text{ см}, AB = 132 \text{ см}, \\ BC &= 70 \text{ см}. \end{aligned}$$

2.



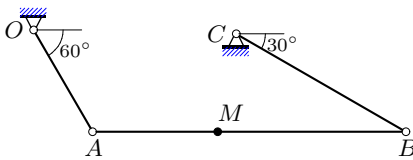
$$\begin{aligned} \omega &= 2 \text{ рад/с}, t = 4 \text{ с}, \\ AM &= 8t(2 + \cos(\pi t/3)), \\ OA &= 40 \text{ см}, AB = 120 \text{ см}, \\ BC &= 60 \text{ см}. \end{aligned}$$

3.



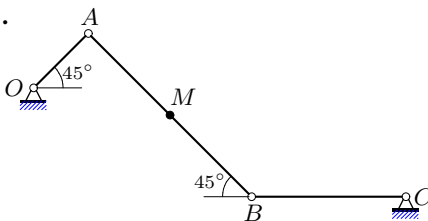
$$\begin{aligned} \omega &= 1.3 \text{ рад/с}, t = 2 \text{ с}, \\ AM &= 11t(5 - t), \\ OA &= 40 \text{ см}, AB = 132 \text{ см}, \\ BC &= 90 \text{ см}. \end{aligned}$$

4.



$$\begin{aligned} \omega &= 1.4 \text{ рад/с}, t = 2 \text{ с}, \\ AM &= 12t + 8 \sin^2(\pi t/4), \\ OA &= 30 \text{ см}, AB = 80 \text{ см}, \\ BC &= 50 \text{ см}. \end{aligned}$$

5.



$$\begin{aligned} \omega &= 2.5 \text{ рад/с}, t = 1 \text{ с}, \\ BM &= 10(\sin(\pi t/6) + t^2), \\ OA &= 10 \text{ см}, AB = 30 \text{ см}, \\ BC &= 20 \text{ см}. \end{aligned}$$