Решение

Воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера (9.1), с. 256, для определения проекций угловой скорости на подвижные оси координат. Дифференцируя заданные функции, получаем

$$\omega_x = \sqrt{2}\,\sin(\sin t)\sin(2\,t + \pi/4) + 2\,\cos(\sin t),$$
$$\omega_y = \sqrt{2}\,\cos(\sin t)\sin(2\,t + \pi/4) - 2\,\sin(\sin t),$$
$$\omega_z = \sqrt{2}\,\cos(2\,t + \pi/4) + \cos t.$$

При $t = 0$ имеем

$$\omega_x = 2,\ \omega_y = 1,\ \omega_z = 2.$$

Находим модуль угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 3\ \text{c}^{-1}.$$

Для проверки можно воспользоваться кинематическими уравнениями Эйлера в проекции на неподвижные оси координат

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot\varphi \sin\psi\,\sin\theta + \dot\theta\cos\psi,\\ \omega_{y'} &= -\dot\varphi\cos\psi\,\sin\theta + \dot\theta\sin\psi,\\ \omega_{z'} &= \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi, \end{aligned} \tag{9.2}$$

или, еще проще, готовой формулой для модуля угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\dot\psi^2 + \dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2 + 2\dot\varphi\dot\psi\cos\vartheta}.$$

Легко проверить, что эту формулу можно получить как из уравнений (9.1), так и из уравнений (9.2):

$$\omega = \sqrt{\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 + \omega_{z'}^2}.$$

K19. Поворот вокруг произвольной оси

Результат поворота тела вокруг оси с единичным вектором $\vec e$ на угол α описывается формулой Родрига [1] [10]

$$\vec X\,' = \vec X + 2\,q_0\,\vec b + 2\,\vec q \times \vec b, \tag{9.3}$$

где $\vec q = \vec e\,\sin(\alpha/2)$, $\vec b = \vec q \times \vec X$, $q_0 = \cos(\alpha/2)$, $\vec X$ — радиус-вектор точки A, $\vec X\,'$ — радиус-вектор точки A', в которую точка A перейдет после поворота.

[1] *Benjamin-Olinde Rodrigues* (1795–1851) — французский математик, механик.

Эта же формула часто записывается в другом виде

$$\vec{X}\,' = \vec{X}\,\cos\alpha + \vec{e}\,(1-\cos\alpha)\,\vec{e}\cdot\vec{X} + \vec{e}\times\vec{X}\,\sin\alpha.$$

Условия задач

Твердое тело, закрепленное шарниром в начале координат, поворачивается на угол α вокруг вектора $\vec{d}$. Найти перемещение точки A. Заданы координаты начального положения точки, угол α (или его тригонометрические функции).

К19.1.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{d} = (1, 2, -2)$, $A(1, 12, 8)$.

К19.2.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{d} = (1, -2, 2)$, $A(5, 3, 5)$.

К19.3.
$\alpha = -\pi/2$, $\vec{d} = (2, 1, 2)$, $A(-3, 5, 5)$.

К19.4.
$\alpha = \pi$, $\vec{d} = (8, 4, 1)$, $A(-8, 0, 1)$.

К19.5.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}6$, $\cos(\alpha/2) = 0{,}8$,
$\vec{d} = (1, 4, 8)$, $A(-5, 0, -5)$.

К19.6.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}8$, $\cos(\alpha/2) = -0{,}6$,
$\vec{d} = (-2, 1, -2)$, $A(-6, 2, 1)$.

К19.7.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{d} = (1, 2, -2)$, $A(4, 3, 5)$.

К19.8.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{d} = (1, -2, 2)$, $A(7, 1, 5)$.

К19.9.
$\alpha = -\pi/2$, $\vec{d} = (2, 1, 2)$, $A(-1, 7, 5)$.

К19.10.
$\alpha = \pi$, $\vec{d} = (8, 4, 1)$, $A(-5, -4, 2)$.

К19.11.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}6$, $\cos(\alpha/2) = 0{,}8$,
$\vec{d} = (1, 4, 8)$, $A(-1, 4, -3)$.

К19.12.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}8$, $\cos(\alpha/2) = -0{,}6$,
$\vec{d} = (-2, 1, -2)$, $A(-4, 1, 3)$.

К19.13.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{d} = (1, 2, -2)$, $A(7, 5, 1)$.

К19.14.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{d} = (1, -2, 2)$, $A(9, 9, 15)$.

К19.15.
$\alpha = -\pi/2$, $\vec{d} = (2, 1, 2)$, $A(1, 5, 1)$.

К19.16.
$\alpha = \pi$, $\vec{d} = (8, 4, 1)$, $A(-4, -1, 0)$.

К19.17.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}6$, $\cos(\alpha/2) = 0{,}8$,
$\vec{d} = (1, 4, 8)$, $A(4, 0, -5)$.

К19.18.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}8$, $\cos(\alpha/2) = -0{,}6$,
$\vec{d} = (-2, 1, -2)$, $A(8, 6, 10)$.

К19.19.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{d} = (1, 2, -2)$, $A(11, 12, 4)$.

К19.20.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{d} = (1, -2, 2)$, $A(12, 6, 6)$.

К19.21.
$\alpha = -\pi/2$, $\vec{d} = (2, 1, 2)$, $A(-4, 1, 8)$.

К19.22.
$\alpha = \pi$, $\vec{d} = (8, 4, 1)$, $A(-8, -3, 4)$.

К19. 23.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}6$, $\cos(\alpha/2) = 0{,}8$,
$\vec{d} = (1, 4, 8)$, $A(-5, -4, -3)$.

К19. 24.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}8$, $\cos(\alpha/2) = -0{,}6$,
$\vec{d} = (-2, 1, -2)$, $A(-7, 1, 0)$.

К19. 25.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{d} = (1, 2, -2)$, $A(2, 12, 4)$.

К19. 26.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{d} = (1, -2, 2)$, $A(6, 14, 2)$.

К19. 27.
$\alpha = -\pi/2$, $\vec{d} = (2, 1, 2)$, $A(-1, 2, 9)$.

К19. 28.
$\alpha = \pi$, $\vec{d} = (8, 4, 1)$, $A(-7, -4, 0)$.

К19. 29.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}6$, $\cos(\alpha/2) = 0{,}8$,
$\vec{d} = (1, 4, 8)$, $A(-2, -3, 4)$.

К19. 30.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}8$, $\cos(\alpha/2) = -0{,}6$,
$\vec{d} = (-2, 1, -2)$, $A(-4, -3, -5)$.

Пример решения

Задача. Твердое тело, закрепленное шарниром в начале координат, поворачивается на угол $\alpha = -\pi/2$ вокруг вектора $\vec{d} = (1, 0, 0)$. Найти перемещение точки $A(0, 17, 31)$ (рис. 163).

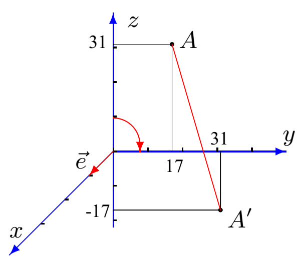

Рис. 163

Решение

Способ 1. Воспользуемся формулой Родрига (9.3). Вектор перемещения имеет вид $\Delta\vec{X} = \vec{X}\,' - \vec{X}$.

Единичный вектор $\vec{e}$, определяющий направление оси, вокруг которой производится поворот, в данном случае совпадает с заданным вектором $\vec{d}$[1]. Вычислим все необходимые величины

$$q_0 = \cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ \ \vec{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \\ 31 \end{bmatrix},\ \ \vec{q} = -\sqrt{2}/2\,\vec{e} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

[1]В общем случае $\vec{e} = \vec{d}/|\vec{d}| = \vec{d}/\sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 31 \end{bmatrix} = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} 0 \\ 31 \\ -17 \end{bmatrix}, \; 2\,q_0\,\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 31 \\ -17 \end{bmatrix},$$

$$2\,\vec{q} \times \vec{b} = 2 \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 31\sqrt{2}/2 & -17\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -17 \\ -31 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем вектор перемещения

$$\Delta\vec{X} = \vec{X}\,' - \vec{X} = 2\,q_0\vec{b} + 2\,\vec{q} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 31 \\ -17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -17 \\ -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ -48 \end{bmatrix}.$$

Модуль перемещения AA' равен (рис. 163)

$$|\Delta\vec{X}| = \sqrt{14^2 + 48^2} = 50.$$

Способ 2. Найдем параметры Эйлера [10], соответствующие заданному повороту тела. Один параметр уже найден, это $q_0 = \cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$, другие являются координатами вектора $\vec{q}$ в разложении по неподвижным осям [1], т. е.

$$q_1 = -\sqrt{2}/2, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0.$$

Компоненты оператора поворота имеют вид

$$\begin{aligned} r_{11} &= 2\,(q_0^2 + q_1^2) - 1, & r_{12} &= 2\,(q_1\,q_2 - q_0\,q_3), & r_{13} &= 2\,(q_1\,q_3 + q_0\,q_2), \\ r_{12} &= 2\,(q_1\,q_2 + q_0\,q_3), & r_{22} &= 2\,(q_0^2 + q_2^2) - 1, & r_{23} &= 2\,(q_2\,q_3 - q_0\,q_1), \\ r_{13} &= 2\,(q_1\,q_3 - q_0\,q_2), & r_{32} &= 2\,(q_2\,q_3 + q_0\,q_1), & r_{33} &= 2\,(q_0^2 + q_3^2) - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица оператора поворота R в данной задаче имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления столбца компонент вектора $\vec{X}\,'$ умножим эту матрицу на столбец компонент вектора $\vec{X}$:

$$\vec{X}\,' = R\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 31 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

Оба способа дают один и тот же результат.

[1] Легко проверить свойство параметров Эйлера: $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$.