

Задача. Механизм состоит из двух дисков, соединенных стержнем AB со сферическими шарнирами по концам. Оси вращения дисков параллельны оси y , размеры даны в сантиметрах (рис. 1). Радиусы дисков: $R_1 = 5$ см, $R_2 = 6$ см, угловая скорость диска 1: $\omega_{1y} = 3$ с⁻¹. Найти угловую скорость диска 2 в заданном положении механизма.

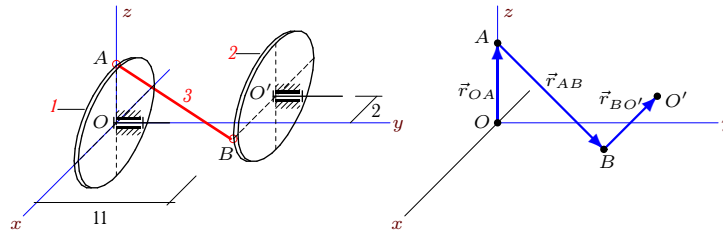


Рис. 1

Рис. 2

Решение

Обозначим стержень телом №3. Запишем векторное уравнение, связывающее неподвижные точки O и O' осей дисков, что соответствует кинематическому графу (рис. 2)

$$O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} O'$$

Последовательно применяя формулу Эйлера, имеем следующее соотношение

$$\begin{aligned} \vec{v}_{O'} &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{BO'} = \\ &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{BO'} = \\ &= \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OA} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{BO'}. \end{aligned}$$

Диски вращаются вокруг осей, параллельных y , поэтому $\vec{\omega}_1 = [0, \omega_{1y}, 0]^T$, $\vec{\omega}_2 = [0, \omega_{2y}, 0]^T$. Учитывая, что скорости точек O и O' равны нулю, получим

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OA} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{BO'} = 0. \quad (0.1)$$

Последнее векторное уравнение соответствует трем скалярным и содержит четыре неизвестные ω_{2y} , ω_{3x} , ω_{3y} , ω_{3z} . Для того, чтобы замкнуть систему, требуются еще одно уравнение. Так как стержень со сферическими шарнирами по концам может вращаться вокруг своей продольной оси с угловой скоростью, никак не влияющей на движение дисков, то эту скорость можно задать произвольной, например нулем. Имеем скалярное произведение

$$\vec{\omega}_3 \cdot \vec{r}_{AB} = 0. \quad (0.2)$$

Векторы, входящие в систему (0.1–0.2), с учетом данных задачи (рис. 1) имеют вид

$$\vec{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{BO'} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Перепишем систему (0.1–0.2) в скалярной форме

$$15 - 5\omega_{3y} - 11\omega_{3z} = 0,$$

$$4\omega_{3z} + 5\omega_{3x} = 0,$$

$$11\omega_{3x} - 4\omega_{3y} + 6\omega_{2y} = 0,$$

$$4\omega_{3x} + 11\omega_{3y} - 5\omega_{3z} = 0.$$

Получим решение (в с^{-1}):

$$\omega_{2y} = 2, \quad \omega_{3x} = -0,815, \quad \omega_{3y} = 0,759, \quad \omega_{3z} = 1,18.$$