Пример решения

Задача. Ящик с крышкой имеет форму параллелепипеда. Крышка крепится к ящику на цилиндрическом шарнире и опирается в середине ребра на стержень AO длиной 50 см. Стержень по концам имеет сферические шарниры. Известны координаты опорного шарнира: $O(70, 40, 0)$, размеры даны в сантиметрах (рис. 169). Ящик вращают вокруг оси z с угловой скоростью $\omega_z = 5$ с$^{-1}$. Найти скорость шарнира A в заданном положении.

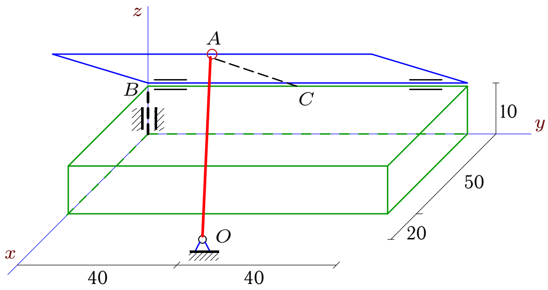

Рис. 169

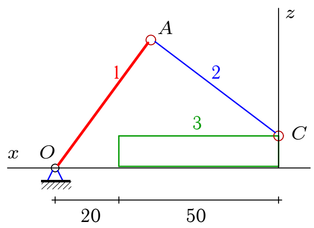

Рис. 170

Решение

Для решения задачи потребуются координаты шарнира A. Рассмотрим сечение механизма плоскостью, проходящей через точки O и A, параллельно xz (рис. 170). Точка C этого сечения, лежащая на цилиндрическом шарнире, прикрепляющем крышку, имеет координаты $C(0, 40, 10)$. Имеем два очевидных соотношения

$$(x_O - x_A)^2 + (z_O - z_A)^2 = OA^2,$$
$$(x_C - x_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = AC^2.$$

Зная координаты точек O, C и длины $OA = AC = 50$ см, получим два решения этой системы уравнений

$$x_A = 30 \text{ см}, \; y_A = -30 \text{ см},$$

и

$$x_A = 40 \text{ см}, \; y_A = 40 \text{ см}.$$

Очевидно, первое решение не подходит к условию задачи, берем второе решение.

Понумеруем тела механизма: стержень OA — № 1, крышка — №2, ящик — № 3. Поместим неподвижную точку $B(0, 0, 10)$ на оси вращения и построим кинематический граф

$$O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B$$

Дважды применяя формулу Эйлера, получим следующее векторное соотношение

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{AB} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OA} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{AB}. \tag{10.8}$$

Крышка 2 совершает сложное движение: относительное с угловой скоростью ω_{2y}^r (поворот вокруг цилиндрического шарнира на ящике) и переносного с заданной угловой скоростью ω_{3z}. Абсолютная угловая скорость, входящая в (10.8), получается суммированием

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2^e + \vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{2y}^r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{2y}^r \\ \omega_{3z} \end{bmatrix}.$$

Радиус-векторы, входящие в (10.8), известны

$$\vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} -40 \\ -40 \\ -30 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{OA} = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

С учетом того, что $\vec{v}_B = 0$, $\vec{v}_O = 0$, получаем следующие уравнения

$$\begin{aligned} &40\,\omega_{1y} - 30\,\omega_{2y}^r + 200 = 0, \\ &-30\,\omega_{1z} - 40\,\omega_{1x} - 200 = 0, \\ &30\,\omega_{1y} + 40\,\omega_{2y}^r = 0. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Трех уравнений (10.9) недостаточно для нахождения четырех неизвестных величин ω_{2y}^r, ω_{1x} , ω_{1y} и ω_{1z}. Заметим, что вращение стержня 1 вокруг своей продольной оси никак не отражается на движении механизма. Положим эту угловую скорость произвольной величиной, например, нулем. Это выражается следующим скалярным произведением

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{r}_{OA} = -30\,\omega_{1x} + 40\,\omega_{1z} = 0. \tag{10.10}$$

Таким образом замкнем систему уравнений. Решение системы (10.9–10.10) имеет вид

$$\omega_{2y}^r = 2{,}4\ \text{с}^{-1}, \omega_{1x} = \omega_{1y} = -3{,}2\ \text{с}^{-1} \omega_{1z} = -2{,}4\ \text{с}^{-1}.$$

Скорость шарнира A (в см/с) найдем по формуле

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OA} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3{,}2 & -3{,}2 & -2{,}4 \\ -30 & 0 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -128 \\ 200 \\ -96 \end{bmatrix}.$$