

и уравнение (2.62):

$$-4\omega_{1z} - 2\omega_{4z} = 0,$$

$$8 + 2\omega_{4x} = 0,$$

$$-4 + 4\omega_{1x} = 0.$$

Замыкают систему скалярные произведения (2.63)

$$3\omega_{2x} - 3\omega_{2z} = 0,$$

$$2\omega_{3x} - 2\omega_{3z} = 0,$$

$$-2\omega_{4z} = 0.$$

Получим решение системы уравнений (в с^{-1}):

$$\omega_{1x} = 1, \omega_{1y} = -1, \omega_{1z} = 0,$$

$$\omega_{2x} = -1.17, \omega_{2y} = -0.33, \omega_{2z} = -1.17,$$

$$\omega_{3x} = -2, \omega_{3y} = 0, \omega_{3z} = -2,$$

$$\omega_{4x} = -4, \omega_{4y} = 0, \omega_{4z} = 0.$$

Угловая скорость пластины имеет вид (в с^{-1}):

$$\vec{\omega}_1 = [1, -1, 0]^T.$$

Задача 96. Механизм состоит из двух дисков, соединенных стержнем AB со сферическими шарнирами по концам. Диск 1

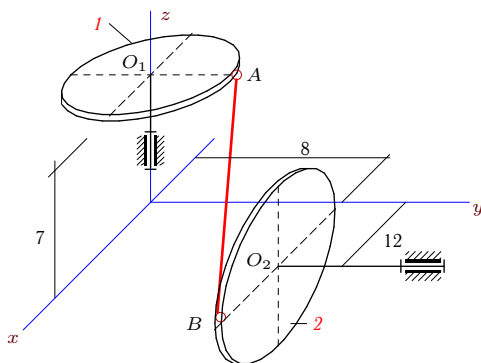


Рис. 232

вращается вокруг оси z , ось диска 2 параллельна оси y . Размеры даны в сантиметрах (рис. 232). Радиусы дисков: $R_1 = 7$ см, $R_2 = 10$ см; угловая скорость диска 1: $\omega_{1z} = 5 \text{ с}^{-1}$. Найти угловую скорость диска 2 в заданном положении механизма.

Решение

Обозначим стержень телом 3. Запишем векторное уравнение, связывающее неподвижные точки O_1 и O_2 осей дисков, что соответствует кинематическому графу

$$O_1 \xrightarrow{1} A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} O_2$$

Последовательно применяя формулу Эйлера, имеем следующее векторное соотношение

$$\begin{aligned} \vec{v}_{O_2} &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{BO_2} = \\ &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{BO_2} = \\ &= \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{O_1A} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{BO_2}. \end{aligned}$$

Диск 1 вращается вокруг оси z , а диск 2 — вокруг оси, параллельной y , поэтому

$$\vec{\omega}_1 = [0, 0, \omega_{1z}]^T, \quad \vec{\omega}_2 = [0, \omega_{2y}, 0]^T.$$

Учитывая, что скорости точек O_1 и O_2 на осях дисков равны нулю, получим

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{O_1A} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{BO_2} = 0. \quad (2.64)$$

Последнее векторное уравнение соответствует трем скалярным уравнениям и содержит четыре неизвестные: ω_{2y} , ω_{3x} , ω_{3y} , ω_{3z} . Для того, чтобы замкнуть систему, требуется еще одно уравнение. Так как стержень со сферическими шарнирами по концам может вращаться вокруг своей продольной оси с угловой скоростью, никак не влияющей на движение дисков, то эту скорость можно задать произвольной, например, нулем. Имеем скалярное произведение

$$\vec{\omega}_3 \cdot \vec{r}_{AB} = 0. \quad (2.65)$$

Векторы, входящие в систему (2.64–2.65), с учетом данных задачи (рис. 232) имеют вид

$$\vec{r}_{O_1A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 22 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{BO_2} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Перепишем систему (2.64–2.65) в скалярной форме

$$\begin{aligned} -35 - 7\omega_{3y} - \omega_{3z} &= 0, \\ 22\omega_{3z} + 7\omega_{3x} &= 0, \\ \omega_{3x} - 22\omega_{3y} + 10\omega_{2y} &= 0, \\ 22\omega_{3x} + \omega_{3y} - 7\omega_{3z} &= 0. \end{aligned}$$

Получим решение (в с^{-1}):

$$\omega_{2y} = -11, \omega_{3x} = 0.21, \omega_{3y} = -4.99, \omega_{3z} = -0.06.$$

Для проверки эту задачу можно решить по теореме о проекциях скоростей, с. 95. Вектор скорости точки A направлен по касательной к диску 1 в точке A и имеет вид

$$\vec{v}_A = [-\omega_{1z}R_1, 0, 0]^T.$$

Аналогично, вектор скорости точки B

$$\vec{v}_B = [0, 0, -\omega_{2y}R_2]^T.$$

Уравнение, из которого получаем решение, основано на равенстве проекций скоростей точек неизменяемого отрезка на ось, направленную вдоль этого отрезка, (в данном случае AB) и имеет вид

$$\vec{r}_{AB} \cdot \vec{v}_A = \vec{r}_{AB} \cdot \vec{v}_B,$$

или

$$-22 \cdot 35 = 7 \omega_{2y} \cdot 10.$$

Отсюда получаем искомое значение угловой скорости

$$\omega_{2y} = -11 \text{ с}^{-1}.$$

Второй способ решения, безусловно, проще. Но этим способом нельзя найти угловую скорость стержня AB .

Задача 97. Механизм, состоящий из двух пластин, соединенных цилиндрическим шарниром, и стержня, изображен на рисунке 233 в осях xyz . Пластина 1 вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega_z = 5 \text{ с}^{-1}$, пластина 2 опирается на стержень AO длиной 50 см. Стержень по концам имеет сферические шарниры. Известны координаты опорного шарнира: $O(0, 80, 0)$, размеры даны в сантиметрах, $AC = 50$ см. В указанный момент пластина 1 параллельна плоскости yz . Найти скорость шарнира A в заданном положении.

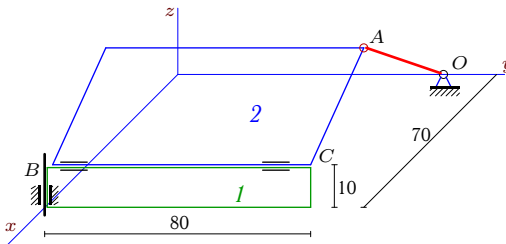


Рис. 233

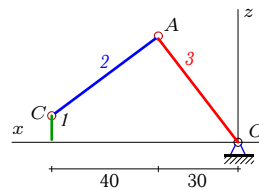


Рис. 234