Кинематика

Кинематика – часть механики, которая изучает движение тела с геометрической точки зрения.

Кинематика точки

Материальная точка – тело размерами, которого можно пренебречь.

Движение – изменение положения с течением времени.

Движение точки по отношению к выбранной системе отсчета считается заданным, если известен способ, при помощи которого можно определить положение точки в любой момент времени.

Существует 3 способа задания движения точки в выбранной системе отсчета.

1. Векторный способ задания движения

Пусть существует неподвижная система координат *0xyz.*

i,j,k – единичные вектора осей.

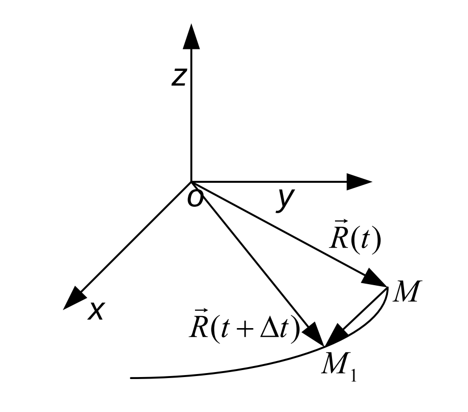


Рис. 1.1

Положение точки в пространстве будет определено, если ее радиус-вектор R, проводимый из начала координат какой-либо системы отсчета, известен как функция времени $R = R(t)$

При движении конец вектора R описывает некоторую линию, которая является траекторией движения точки.

Пусть у нас есть 2 положения точки М (Рис 1.1) эти 2 положения характеризуются векторами $\vec{R}(t), \vec{R}(t+\Delta t)$ и временем, за которое точка изменила положение Δt.

Соответственно вектор $\overrightarrow{MM_1} = \vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t) = \Delta R(t)$

Средняя скорость движения точки М на отрезке времени Δt будет равняться:

$$V_{MÑÐ} = \frac{\Delta R(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R(t)}{\Delta t} = \frac{dR(t)}{dt} = \overrightarrow{V_M}$$

Скорость точки – производная радиус вектора точки по времени.

Аналогично как скорость это производная от радиуса вектора по времени так ускорение:

$$W_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_M(t)}{\Delta t} = \frac{dV_M(t)}{dt}$$

Ускорение точки производная вектора скорости точки по времени

2. Координатный способ задания движения

Для координатного способа задания движения точки необходим выбор конкретной системы координат.

Рассмотрим задание движения точки в декартовой системе координат.

В декартовой системе координат движение в координатной форме будет задано, если известен закон изменения координат *x,y,z* от времени:

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ - координатный закон движения точки

Пусть существует неподвижная система координат *0xyz.*

i,j,k – единичные вектора осей.

Радиус вектор движения точки в выбранной системе координат можно представить в виде: $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Т.к. система координат неподвижна, то вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ постоянны, т.е производные $\frac{d\vec{i}}{dt} = 0, \frac{d\vec{j}}{dt} = 0, \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$ то в результате для выражения скорости при координатном способе задания движения получим:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{R(t)}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Скорость точки можно переписать следующим образом:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

где: $V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt}$ (*)

Отметим, что исходя из формулы (*), получаем следующее: проекция скорости точки на координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей этой оси координаты.

Через проекции можно найти модуль и углы наклона к осям скорости точки.

По теореме Пифагора:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Функции углов наклона скорости точки.

$$\cos(\vec{V}, O_x) = \frac{V_x}{\left|\vec{V}\right|},$$

$$\cos(\vec{V}, O_y) = \frac{V_y}{\left|\vec{V}\right|},$$

$$\cos(\vec{V}, O_z) = \frac{V_z}{\left|\vec{V}\right|}.$$

Аналогично как для скоростей, так и для ускорений получим.

$$\vec{W} = \frac{d\overrightarrow{V(t)}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} =$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = W_x\vec{i} + W_y\vec{j} + W_z\vec{k}.$$

$$W_x = \frac{dV_x}{dt}, \ W_y = \frac{dV_y}{dt}, \ W_z = \frac{dV_z}{dt}.$$

По теореме Пифагора:

$$\left|\overrightarrow{W}\right| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$$

Функции углов наклона скорости точки.

$$\cos(\overrightarrow{W}, O_x) = \frac{W_x}{\left|\overrightarrow{W}\right|}$$

$$\cos(\overrightarrow{W}, O_y) = \frac{W_y}{\left|\overrightarrow{W}\right|}$$

$$\cos(\overrightarrow{W}, O_z) = \frac{W_z}{\left|\overrightarrow{W}\right|}$$

Также возможен выбор других систем координат, например, цилиндрической и сферической.

3. Естественный способ задания движения точки

При естественном способе задания движения точки указываются траектория движения точки и закон ее движения по этой траектории.

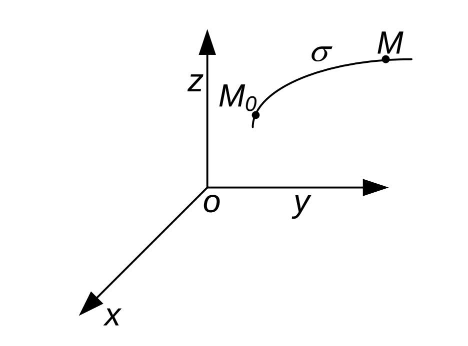


Рис. 1.2

Пусть точка движется в системе 0xyz по траектории, показанной на рисунке.

Пусть точка M_0 - какая либо фиксированная точка на траектории. Выбрав направление положительного отсчета по траектории, мы определим положение точки М в любой момент времени, если будем знать, как изменяется дуга $\sigma = M_0 M$ со временем.

Для задания движения точки при помощи естественного способа нам необходимо знать

a) траекторию движения
b) начало отсчета движения. (т. M_0)
c) положительное направление движения
d) $\sigma = \sigma(t)$,

$\sigma = \sigma(t)$ - закон движения точки при естественном способе задания движения.

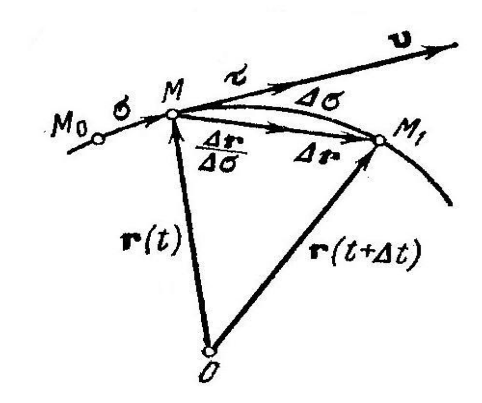


Рис. 1.3

Нахождение скорости при естественном способе задания движения точки.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{R}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{R}(t)}{dt} \quad (**)$$

Существует некоторая связь между радиус-вектором $R(t)$ законом движения точки $\sigma(t)$. Перепишем формулу (**) в виде:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta\bar{R}(t)}{\Delta\sigma(t)}\frac{\Delta\sigma(t)}{\Delta t}\right] = \frac{d\bar{R}(t)}{d\sigma(t)}\frac{d\sigma(t)}{dt}$$

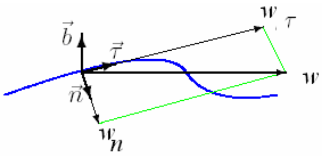
$$\left|\frac{d\bar{R}(t)}{d\sigma(t)}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\left|\frac{\Delta\bar{R}(t)}{\Delta\sigma(t)}\right| = 1$$

Т.к $\Delta R(t)$ - длина хорды $\Delta\sigma(t)$ - длина дуги. При уменьшении длины сегмента дуги $\Delta\sigma(t)\to 0$ вектор $\overrightarrow{\frac{dR(t)}{d\sigma(t)}}$ стремится по направлению и длине к единичному вектору $\vec{\tau}$ касательной к траектории в точке. В результате $\vec{V} = \overrightarrow{\frac{dR(t)}{d\sigma(t)}}\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d\sigma(t)}{dt}\vec{\tau} = V_\tau\vec{\tau}$, где $V_\tau = \frac{d\sigma(t)}{dt}$ - касательная скорость.

Нахождение ускорения при естественном способе задания движения

Из векторного способа задания движения точки вычисляется по формуле:
Для

$$\vec{W} = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{d\left(V_\tau\vec{\tau}\right)}{dt} = \frac{d\left(V_\tau\right)}{dt}\vec{\tau} + V_\tau\frac{d\left(\vec{\tau}\right)}{dt} = W_\tau\vec{\tau} + W_n\vec{n}$$



Рассмотрим систему осей координат с началом в точке M. Ось $\vec{\tau}$ направим по касательной к траектории точки, ось $\vec{n}$ — по направлению главной нормали, а третью ось $\vec{\beta}$ — так, чтобы тройка этих векторов образовала правую систему. Выбранные так оси представляют собой сопровождающий трехгранник, который называют также **естественным трехгранником**.

Проекции ускорения на оси естественного трехгранника равны:

$W_\tau = dv/dt,\ \ W_n = v^2/\rho$

Кинематика абсолютно твердого тела

Определение. *Абсолютно твердым телом называют такую систему материальных точек, расстояние между двумя любыми точками которой, остается неизменным.*

Задание движения абсолютно твердого тела:

Движение твердого тела мы будем считать заданным, если в любой момент времени будет существовать способ в любой момент времени определить положение любой точки тела в заданной системе координат. Для задания положения твердого тела в любой момент времени достаточно всего 6 параметров. Возьмем 3 точки A_1, A_2, A_3, не лежащие на 1 прямой с координатами: $x_i, y_i, z_i;\ (i = 1,2,3)$. По определению абсолютного твердого тела расстояния $d_1, d_2, d_3;$ между соответствующими парами точек остаются неизменны. Исходя из этого, координаты точек должны удовлетворять следующим уравнениям:

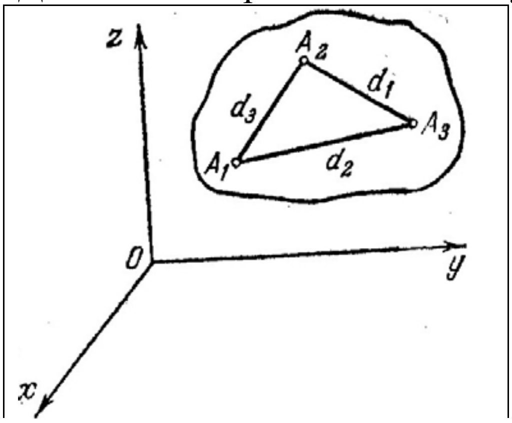


Рис. 1.3

$$(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1) = d_1$$

$$(x_3 - x_2) + (y_3 - y_2) + (z_3 - z_2) = d_2$$

$$(x_1 - x_3) + (y_1 - y_3) + (z_1 - z_3) = d_3;$$

В соответствии с этими уравнениями из 9 координат 3-х точек линейно независимыми остаются только 6. Для любой 4-й точки добавятся еще три уравнения связи показывающие, что координаты новой точки линейно зависимы от координат предыдущих 3-х точек.