Сложное движение точки

Формула Бура.

Введем понятия относительной и абсолютной производных вектора

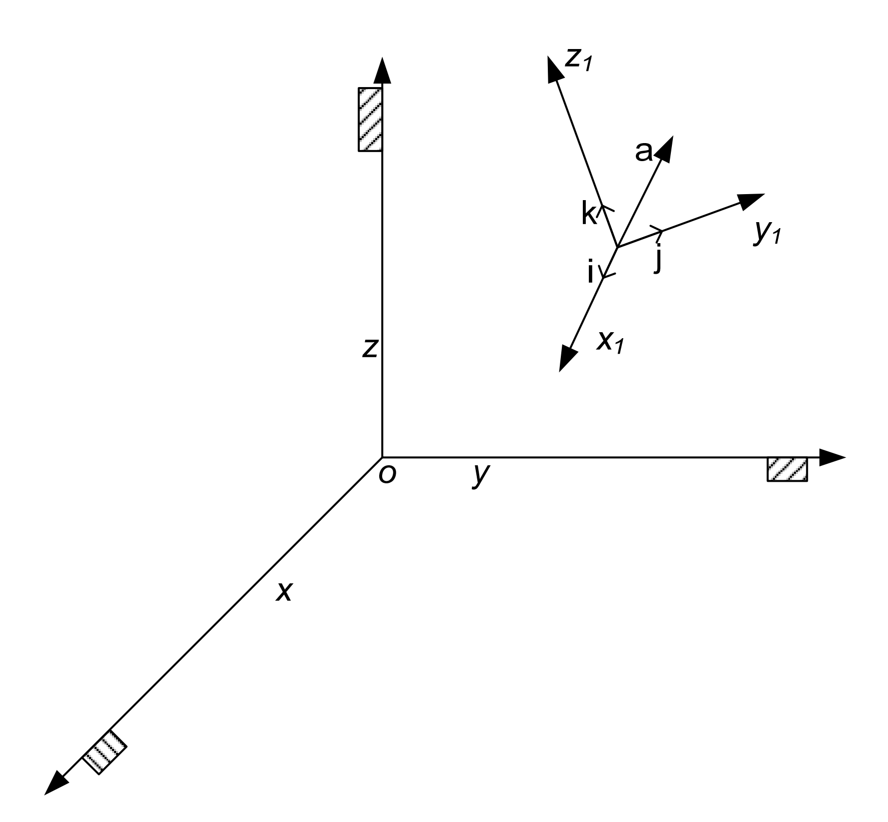

Рис. 1.1 подвижная и неподвижная системы координат

Пусть: x,y,z – неподвижная система координат (сокращенно - СК).

x_1, y_1, z_1 - подвижная система координат

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - единичные вектора подвижной системы координат.

В подвижной системе координат задан радиус вектор $\mathbf{a}$ в проекциях на оси x_1, y_1, z_1

$$\mathbf{a} = a_{x1}\mathbf{i} + a_{y1}\mathbf{j} + a_{z1}\mathbf{k} \quad (1)$$

Продифференцируем равенство 1 по времени так как система координат x_1, y_1, z_1 двигается с течением времени, то вектора $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ также меняются с течением времени. Применив формулу производной произведения, получим:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_{x1}}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_{y1}}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_{z1}}{dt}\mathbf{k} + a_{x1}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + a_{y1}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + a_{z1}\frac{d\mathbf{k}}{dt} \quad (2)$$

Назовем сумму первых трех слагаемых относительной или локальной производной и обозначим ее:

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_{x1}}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_{y1}}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_{z1}}{dt}\mathbf{k}.$$

Сумма вторых трех компонент производной может быть представлена в виде векторного произведения:

$$a_{x1}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + a_{y1}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + a_{z1}\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$$

Где $\boldsymbol{\omega}$ - угловая скорость подвижной системы координат относительно неподвижной, $\mathbf{a}$ - исходный заданный вектор.

В результате получим формулу Бура:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \quad (3)$$

Таким образом: ***абсолютная производная вектора равна сумме относительной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости подвижной системы координат на этот вектор.***

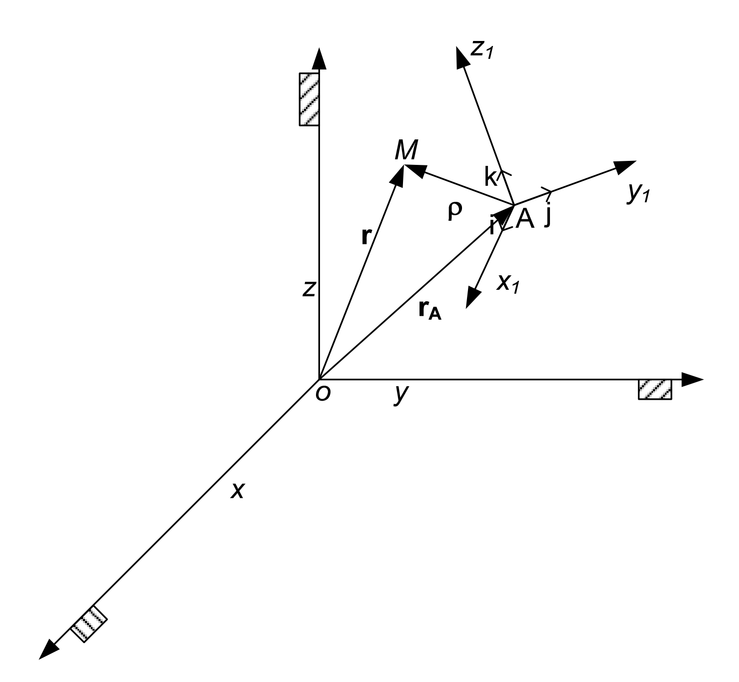

Рис. 1.2 Движение точки М в различных системах координат.

Пусть точка М совершает произвольное движение.

Произвольная система координат x_1, y_1, z_1 также совершает произвольное движение.

Определение: ***Будем называть сложным или "абсолютным" движением точки М ее движение по отношению к неподвижной системе координат.***

Движение точки М по отношению к подвижной системе координат будем называть относительным.

Движение подвижной системы координат относительно неподвижной СК называется переносным.

Относительной скоростью и ускорением точки называется скорость и ускорение точки относительно подвижной системы координат.

Переносными скоростью и ускорением точки М называется скорость и ускорение точки М подвижной системы координат, по отношению к неподвижной.

Абсолютными скоростью и ускорением точки называется скорость и ускорение относительно неподвижной СК.

<u>Теорема о скорости точки в сложном движении</u>

Скорость точки в сложном движении равна векторной сумме 2х скоростей: относительной и переносной.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r_0} + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

$$\bar{V}_{abs} = \frac{d\mathbf{r_0}}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\mathbf{i} + x_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\mathbf{j} + y_1\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\mathbf{k} + z_1\frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

$$\bar{V}_{abs} = \frac{d\mathbf{r_0}}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_1}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz_1}{dt}\mathbf{k} + x_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_1\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z_1\frac{d\mathbf{k}}{dt} \qquad (4)$$

$$\bar{V}_{otn} = \left.\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\right|_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}=const} = \frac{dx_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_1}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz_1}{dt}\mathbf{k} \qquad (5)$$

По определению переносной скорости.

$$\bar{V}_{per} = \frac{d\mathbf{r_0}}{dt} + \left.\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\right|_{x_1,y_1,z_1=const} = \frac{d\mathbf{r_0}}{dt} + x_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_1\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z_1\frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

(6)

Подставив (5),(6) в (4), получим: $\bar{V}_{абс} = \bar{V}_{пер} + \bar{V}_{отн}$ чтд.

Теорема об ускорении точки в сложном движении (теорема Кориолиса).
Ускорение точки в сложном движении равно векторной сумме 3х ускорений: относительного, переносного и добавочного (Кориолисова).
Доказательство:

$$\overline{W}_{abs}=\frac{d\overline{V}_{abs}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r_0}}{dt^2}+\frac{d^2x_1}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{dx_1}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt}+\frac{d^2y_1}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt}+\frac{d^2z_1}{dt^2}\mathbf{k}+\frac{dz_1}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt}+$$
$$+\frac{dx_1}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt}+x_1\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt}+y_1\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2}+\frac{dz_1}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt}+z_1\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} \qquad (7)$$

Собрав подобные члены в формуле (7), получим:

$$\overline{W}_{abs}=\frac{d\overline{V}_{abs}}{dt}=\frac{d^2x_1}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y_1}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z_1}{dt^2}\mathbf{k}+\frac{d^2\mathbf{r_0}}{dt^2}+x_1\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}+y_1\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2}+z_1\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2}+$$
$$+2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt}+\frac{dz_1}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right) \qquad (8)$$

По определению относительного ускорения имеем:

$$\overline{W}_{от}=\left.\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2}\right|_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}=const}=\frac{d^2x_1}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y_1}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z_1}{dt^2}\mathbf{k} \qquad (9)$$

По определению переносного ускорения.

$$\overline{W}_{пер}=\frac{d^2\mathbf{r_0}}{dt^2}+x_1\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2}+y_1\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2}+z_1\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} \qquad (10)$$

Подставив 9,10 в 8, получим:

$$\overline{W}_{абс}=\frac{d\overline{V}_{абс}}{dt}=\overline{W}_{отн}+\overline{W}_{пер}+\overline{W}_{доб}$$ чтд.

Здесь $\overline{W}_{доб}=2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt}+\frac{dz_1}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)$. Используя формулу Бура, добавочное ускорение можно записать следующим образом: $\overline{W}_{доб}=2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V_{отн}}$